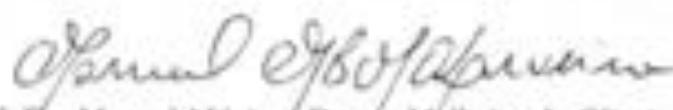


Tese apresentada à Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa do Instituto Tecnológico de Aeronáutica, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências no Programa de Física, Área de Física Nuclear.

Edson Otoniel da Silva

**MATÉRIA FERMIÔNICA SUJEITA A ALTOS
CAMPOS MAGNÉTICOS E SEUS EFEITOS EM
ANÃS BRANCAS MAGNÉTICAS**

Tese aprovada em sua versão final pelos abaixo assinados:



Prof. Dr. Manoel Máximo Bastos Malheiro de Oliveira
Orientador

Prof. Dr. Fridolin Weber
Coorientador

Prof. Dr. Luiz Carlos Sandoval Góes
Pró-Reitor de Pós-Graduação e Pesquisa

Campo Montenegro
São José dos Campos, SP - Brasil
2016

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
Divisão de Informação e Documentação

Otoniel da Silva, Edson
Matéria fermiônica sujeita a altos campos magnéticos e seus efeitos em anéis brancos magnéticos
/ Edson Otoniel da Silva.
São José dos Campos, 2016.
142f.
Tese de Doutorado - Curso de Física, Área de Física Nuclear - Instituto Tecnológico de Aeronáutica, 2016. Orientador: Prof. Dr. Manoel Máximo Bastos Malheiro de Oliveira.
Coorientador: Prof. Dr. Fridolin Weber.
1. Altos campos magnéticos. 2. Equação de estado. 3. Anéis brancos. I. Instituto Tecnológico de Aeronáutica. II. Título.

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

OTONIEL, DA SILVA, Edson. Matéria fermiônica sujeita a altos campos magnéticos e seus efeitos em anéis brancos magnéticos. 2016. 142f. Tese de Doutorado - Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos.

CESSÃO DE DIREITOS

NOME DO AUTOR: Edson Otoniel da Silva
TÍTULO DO TRABALHO: Matéria fermiônica sujeita a altos campos magnéticos e seus efeitos em anéis brancos magnéticos.
TIPO DO TRABALHO/ANO: Tese / 2016

É concedida ao Instituto Tecnológico de Aeronáutica permissão para reproduzir cópias desta tese e para emprestar ou vender cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta tese pode ser reproduzida sem a autorização do autor.



Edson Otoniel da Silva
Rua Haia, 84
12216-650 - São José dos Campos - SP

MATÉRIA FERMIÔNICA SUJEITA A ALTOS CAMPOS MAGNÉTICOS E SEUS EFEITOS EM ANÃS BRANCAS MAGNÉTICAS

Edson Otoniel da Silva

Composição da Banca Examinadora:

Prof. Dr. Rubens de Melo Marinho Junior	Presidente	-	ITA
Prof. Dr. Manuel Máximo Bastos Malheiro de Oliveira	Orientador	-	ITA
Prof. Dr. Fridolin Weber	Coorientador	-	SDSU
Prof. Dr. Márcio Eduardo da Silva Alves	Membro interno	-	UNESP
Prof. Dr. Rodrigo Picanço Negreiros	Membro externo	-	UFF
Prof. Dr. Laura Paulucci Marinho	Membro externo	-	UFABC

Dedico esta tese de doutoramento a minha mãe Maria da Guia Silva, guerreira que me conduziu até esta vitória. Aos meus irmãos Cícero Gilberto Ottoniel da Silva e Eriberto Ottoniel da Silva que sempre torceram por mim. E a minha namorada Carla Cristina Vicência de Lima que muito batalhou comigo e sempre esteve ao meu lado até este momento especial.

Agradecer é sempre uma tarefa muito difícil, principalmente porque muitas vezes esquecemos pessoas importantes no qual devemos gratidão durante todo esse processo, mas desde de já quero deixar claro aqui, que nesses minutos que reservei para escrever esses agradecimentos, pensei mesmo que sem citar por minha displicência em todos que me ajudaram nessa empreitada.

Agradeço primeiramente ao Senhor "DEUS" por guiar-me por esse caminho de maneira a propiciar a conclusão deste meu doutoramento, concluindo mais um ciclo da minha vida.

A minha mãe Maria da Guia Silva por estar sempre presentes na minha vida e ter propiciado condições para chegar até aqui.

Aos meus dois irmãos Cícero Gilberto da Silva e Eriberto Otomiel da Silva e meu sobrinho Gyordan Henrique, grandes companheiros e incentivadores em todos estes anos de luta.

A minha namorada Carla Cristina Vicência de Lima que me ajudou enormemente durante todo esse doutoramento, me pondo de pé nas horas que eu fraquejava, sem dúvida uma das pessoas mais importantes nessa conquista.

Ao meu orientador Dr. Manuel Máximo Bastos Malheiro de Oliveira um agradecimento especial pela orientação, contribuição intelectual, confiança em mim depositada e incentivo na conclusão desta tese, uma pessoa maravilhosa e sem dúvida uma das melhores que já tive o prazer de conhecer.

A meu coorientador Dr. Fridolin Weber uma pessoa excepcional que contribui muito para o meu doutoramento.

Não poderia deixar de agradecer aos Professores Dr. Rubens Marinho, Dr. Tobias Frederico e ao Dr. Brett Carlson, professores que contribuíram muito para minha formação.

A todos os colegas de doutoramento que dividiram sala comigo no ITA, nesse intervalo de quatro anos , em especial Lucas de Souza, Ronaldo Lobato, Emanuel Chimanski, Granderson Carvalho e não podia esquecer Jaziel Goulart.

Ao meu amigo (irmão) Thiago Moreira que muito me ajudou nesses oito anos de região Sudeste, me ensinando história e com seus ótimos pontos de vista, sobre educação e sociedade.

A todos os meus tios e primos e amigos que de forma direta ou indireta me ajudaram e que sempre torceram por esse momento.

Também gostaria de Agradecer ao Instituto Tecnológico de Aeronáutica pela estrutura, ao apoio financeiro dado pela CAPES e FAPESP pelo apoio ao nosso grupo de física nuclear dado através do projeto 13/26258-4 intitulado Matéria Superdensa no Universo.

*"Só eu sei cada passo por mim dado,
nessa estrada esburacada que é a vida,
passei coisas que até mesmo Deus dúvida,
fiquei triste, capiongo, apenado,
porém nunca me senti abandonado...
Me agarrava sempre numa mão amiga
e de força a minha alma era munida,
pois do céu a voz de Deus dizia assim:
Suba os queixo, meta os pés, confia em mim,
Siga a luta que eu cuido das feridas."*

— BRÁULIO BESSA

Resumo

Neste trabalho, estudamos as propriedades das anãs brancas magnetizadas tendo em conta as possíveis instabilidades devido à captura de elétrons e as reações de fusão pícnucleares nos núcleos de tais estrelas. A estrutura das anãs brancas é obtida resolvendo inicialmente a equação de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) com um campo magnético constante na equação de estado e posteriormente as equações Einstein-Maxwell com um campo magnético poloidal em uma abordagem de relatividade geral. O interior estelar é composto de uma estrutura cristalina regular, formada por íons de carbono e carbono/oxigênio imerso em um gás de elétrons degenerado relativista. Os inícios das reações de captura de elétrons e reações pícnucleares são determinados com e sem campos magnéticos. Concluímos que as anãs brancas magnetizadas violam significativamente o limite padrão de massa de Chandrasekhar, mesmo quando a captura eletrônica e as instabilidades pícnucleares não estão presentes no interior da estrela. Obtemos uma anã branca com massa máxima de $2.12 M_{\odot}$ com um campo magnético central $B \sim 1.74 \times 10^{14}$ G, o que indica que as anãs brancas magnetizadas podem ser candidatas a progenitoras de supernovas superluminosas Tipo Ia. Além disso, mostramos que a densidade crítica para reações de fusão pícnuclear limita a densidade central na anã branca em até $\rho \sim 2.39 \times 10^9$ g/cm³ e em consequência, o seu raio equatorial não pode ser menor do que $R \sim 1.600$ km. Encontramos para anãs brancas magnetizadas com o campo magnético central inferior a $B \sim 10^{13}$ G a fenomenologia usual conhecida na literatura: aumentando o campo magnético central (a densidade de energia magnética), a densidade central de número bariônico reduz-se com o raio estelar aumentando. No entanto, para campos magnéticos centrais maiores (e as massas mais elevadas), temos uma nova fenomenologia para a estrutura estelar: ao aumentar o campo magnético da estrela, a densidade central de número bariônico aumenta proporcionalmente, uma vez que o raio equatorial diminui, tornando as anãs brancas magnetizadas mais compactas. Concluímos também que anãs brancas magnetizadas com rápidas rotações podem ser até dez vezes menos densas no seu centro do que as anãs brancas comuns. Por fim, propusemos uma nova classe de estrelas, as anãs estranhas compostas por um núcleo de matéria de quarks, envolta por uma crosta de elétrons degenerados e uma rede cristalina de íons sujeita a campos magnéticos como nas anãs brancas normais. Estas estrelas com uma crosta formada de carbono e oxigênio e não como feito anteriormente com

uma crosta de estrela de nêutrons descrita por um equação BPS, descrevem bem melhor algumas anãs brancas muito compactas observadas, normalmente entendidas como tendo ferro no seu interior mas esperadas serem instáveis.

Abstract

In this work, we study the properties of magnetized white dwarfs taking into account the possible instabilities due to electron capture and pycnonuclear fusion reactions in the core of such stars. The structure of white dwarfs is obtained by solving firstly the Tolman-Oppenheimer-Volkoff equation (TOV) with a constant magnetic field in the equation of state and subsequently the Einstein-Maxwell equations with a poloidal magnetic field in a totally general relativistic approach. The stellar interior is composed of a regular crystal lattice made of carbon ions and carbon/oxygen immersed in a degenerate relativistic electron gas. The onset of the electron capture reactions and pycnonuclear reactions are determined with and without magnetic fields. We find that magnetized white dwarfs violate the standard Chandrasekhar mass limit significantly, even when electron capture and pycnonuclear instabilities are not present in the stellar interior. We obtain a maximum white dwarf mass of around $2.12 M_{\odot}$ with a central magnetic field of $B \sim 1.74 \times 10^{13} \text{G}$, which indicates that magnetized white dwarfs may be the progenitor candidates of superluminous type Ia supernovae. Furthermore, we show that the critical density for pycnonuclear fusion reactions limits the central white dwarf density up to $\rho = 2.39 \times 10^9 \text{g/cm}^3$ and, as a consequence, its equatorial radius cannot be smaller than $R \sim 1600 \text{km}$. Furthermore, we find for magnetized white dwarfs with central magnetic field lower than $B \sim 10^{13} \text{G}$ the usual phenomenology known in the literature: increasing the central magnetic field (the magnetic energy density), the central baryonic number density reduces and the stellar radius increases. However, for higher central magnetic fields (and higher masses), we have a new phenomenology for the star structure: increasing the magnetic field of the star, the central baryonic number density increases proportionally, since the equatorial radius decreases, making ultramagnetized white dwarfs more compact. We also conclude that magnetized white dwarfs with fast speed rotation can be up to ten times less dense in their center than ordinary white dwarfs. Finally, we propose a new class of stars, strange dwarf composed of a core of quark matter, surrounded by a crust of degenerate and magnetized electrons in a ion lattice as in normal white dwarfs. These stars compose with a carbon-oxygen crust, and not as has been considered before formed by a neutron star crust described with a BPS equation of state, can describe much better some compact white dwarf observed, usually understood as made of an iron core in their interior but expected

to be unstable.

Lista de Figuras

- FIGURA 2.1 – Nebulosa planetária NGC 3132 com uma estrela anã branca em seu centro. Fonte: Hubble Heritage Team, via Wikimedia Commons . . . 30
- FIGURA 3.1 – Pressão paralela em função da densidade de massa ρ para um gás não magnetizado (linha preta) e para um gás magnetizado com diferentes campos magnéticos: $B = 10^{10}$ G (linha pontilhada vermelha), $B = 10^{11}$ G (linha pontilhada azul), $B = 10^{12}$ G, (linha pontilhada verde), $B = 10^{13}$ G (linha pontilhada laranja). Os quadrados nas pontas do pico de cada curva, indica o ponto no qual o nível mais fundamental $n = 0$ é totalmente preenchido pelos elétrons. 55
- FIGURA 3.2 – Pressão paralela versus densidade de massa para um gás de elétrons com $B = 10^{11}$ G e $B = 0$ (A) e para um gás de elétrons com $B = 10^{12}$ G e $B = 0$ (B), com os elétrons ocupando até o quinto $n = 5$ e terceiro $n = 3$ níveis de Landau respectivamente. 55
- FIGURA 3.3 – Pressão paralela em função da densidade de massa para uma energia de Fermi fixa $E_F = 1.205 m_e c^2$ para valores de campos magnéticos até $B = 1.0 \times 10^{13}$ G. A linha sólida preta representa um gás de elétron na ausência de campo magnético $B = 0$ 56
- FIGURA 3.4 – Relação da pressão como função de densidade de massa. As círculos preto e as linhas tracejadas verde representam as pressões paralela e perpendicular respectivamente para um campo magnético de $B = 10^{12}$ G, os símbolos em diamantes vermelho representam a EOS com $B = 0$. O sub-gráfico mostra a razão $(P_{\parallel}/P_{\perp})$ para campos magnéticos de $B = (10^{11} - 10^{13})$ G. 57
- FIGURA 3.5 – Relação da pressão de degenerescência dos elétrons $P_e = -\Omega_e$ como função de densidade de massa. Para diferentes campos magnéticos de $B = 10^{11} - 10^{15}$ G. 58

- FIGURA 4.1 – Estruturas cristalinas heterogêneas: rede cúbica simples (sc), estrutura cúbica de face centrada (fcc), estrutura cúbica de corpo centrado (bcc), e hexagonal compacta (hcp). Fonte: (CHAMEL *et al.*, 2014) 60
- FIGURA 4.2 – Relação da pressão como função de densidade de massa para um gás de elétrons magnetizado com campo magnético de $B = 10^{12}$ G, em uma estrutura de rede do tipo (bcc). A linha preta representa a EOS com a contribuição da rede, a linha vermelha representa a EOS sem contribuição da rede. 70
- FIGURA 4.3 – Pressão versus densidade de massa para diferentes composições homogêneas de C e O e uma composição heterogênea de C/O com campo magnético $B = 10^{12}$ G e estrutura cristalina do tipo (bcc). . . 71
- FIGURA 4.4 – Relação da pressão como função de densidade de massa para uma composição heterogênea C/O com campo magnético $B = 10^{12}$ G, e diferentes estruturas cristalinas, rede cúbica simples (sc), estrutura cúbica de face centrada (fcc), estrutura de corpo centrado cúbico (bcc), e hexagonal compacta (hcp). 71
- FIGURA 4.5 – Solução numérica da inequação (4.24) para íons de carbono e oxigênio. O gráfico mostra a densidade de massa limiar para o início das capturas de elétrons como uma função da intensidade do campo magnético em unidades do campo magnético crítico, B_c 72
- FIGURA 4.6 – Na figura acima, As taxas das reações piconucleares em $T = 0$ como função da densidade para o modelo nuclear NL2 em uma rede cristalina do tipo bcc. Na figura abaixo, o tempo para que ocorra as reações piconucleares à temperatura zero para a fusão de C+C em função da densidade, para um alto valor do fator S dado pela equação (4.37) e uma energia de oscilação no ponto zero $E_{pk} \sim 0.034$ MeV. 75
- FIGURA 5.1 – Relação entre a massa e raio de uma anã branca magnética composta de ^{16}O para campos magnéticos de $10^{11} - 4.414 \times 10^{12}$ G. Os valores dos campos para as linhas tracejadas coloridas são indicadas na figura (esquerda), e/R mede a excentricidade sofrida pela estrela devido ao campo magnético (direita). 86

- FIGURA 5.2 – Diagrama de massa raio para $B = 0$, para uma anã branca de carbono sem contribuição da interação elétrons-íons (acima) e com contribuição devido uma rede cristalina do tipo (bcc) (abaixo). A linha preta sólida representa um estrela sem rotação, a linha tracejada vermelho mostra uma anã branca com rotação até a frequência de Kepler. As linhas tracejadas azul, verde, laranja e magenta que ligam as duas curvas representam o ponto onde as diferentes curvas têm o mesmo número bariônico $\log_{10} A$. Os valores indicados pelas setas representam as densidades de massa centrais no ponto de conexão entre as curvas em g/cm^3 87
- FIGURA 5.3 – Diagrama de massa raio para $B = 1.0 \times 10^{12} \text{G}$, para uma anã branca magnética sem contribuição da interação elétrons-íons (acima) e com contribuição devido uma rede cristalina do tipo (bcc) (abaixo). A linha preta sólida representa um estrela sem rotação, a linha tracejada vermelho mostra uma anã branca com rotação até a frequência de Kepler. As linhas tracejadas azul, verde, laranja e magenta que ligam as duas curvas representam o ponto onde as diferentes curvas têm o mesmo número bariônica $\log_{10} A$. Os valores indicados pelas setas representam as densidades de massa no ponto de conexão entre as curvas em g/cm^3 88
- FIGURA 5.4 – Relação massa raio para uma anã branca constituída de carbono, com e sem campo magnético, com e sem contribuição da rede e na presença e ausência de rotação (esquerda) e a massa como função da densidade central para $B = 1.0 \times 10^{12} \text{G}$. As áreas coloridas representam os limites das densidades centrais para as instabilidades das reações piconucleares, β -inverso e para relatividade geral. 89
- FIGURA 5.5 – Relação massa raio (esquerda) para uma anã branca magnética (com rotação/sem rotação) sem a contribuição da rede. A massa como função da densidade central (direita) para anãs brancas constituídas de uma mistura heterogênea de $^{12}\text{C} + ^{16}\text{O}$. As áreas coloridas representam os limites das densidades centrais para as instabilidades das reações piconucleares, β -inverso e para relatividade geral. 91
- FIGURA 5.6 – Relação massa raio (esquerda) para uma anã branca magnética (com rotação/sem rotação) com a contribuição da rede. Massa como função da densidade central (direita) para anãs brancas constituídas de uma mistura heterogênea de $^{12}\text{C} + ^{16}\text{O}$. As áreas coloridas representam os limites das densidades centrais para as instabilidades das reações piconucleares, β -inverso e para relatividade geral. 92

- FIGURA 5.7 – Período de Kepler relativístico dado por $P_K = 2\pi/\Omega_k$ versus a massa de uma anã branca magnética com $B = 10^{12}$ G, com (preto) e sem (vermelho) contribuição da rede. Os valores apontados pelas setas representam os mínimos períodos de rotação das estrelas. 93
- FIGURA 6.1 – Massa estelar como função de densidade de massa central para uma anã branca magnética de carbono assumindo uma função de corrente constante f_0 e diferentes momentos de dipolos magnéticos μ . As áreas coloridas representam as densidades de início das reações piconucleares e decaimento β -inverso. (ver tabela (4.6)) 101
- FIGURA 6.2 – Relação massa-raio para anãs brancas de carbono magnetizadas assumindo diferentes momentos de dipolo magnético, μ . A linha preta representa a relação massa-raio de anãs brancas de carbono não-magnetizadas. A linha horizontal representa o limite da massa de Chandrasekhar para estrelas esféricas. São também mostrados os valores do campo magnético central B_{max} (com o momento de dipolo magnético correspondente μ) atingido no centro das estrelas de massa máxima (ponto final da curva com μ fixo). As anãs brancas localizadas na região marrom estão sujeitas às instabilidades devido às reações piconucleares ou de decaimento β -inverso. 102
- FIGURA 6.3 – Propriedades globais das anãs brancas de carbono magnetizadas para dois diferentes momentos de dipolo magnético, $\mu = 0.5 \times 10^{24} \text{Am}^2$ (linha vermelha) e $\mu = 4.0 \times 10^{24} \text{Am}^2$ (linha laranja). As linhas horizontais representam anãs brancas com massas bariônicas fixas de $M_B = 1.00 M_\odot$ e $M_B = 1.80 M_\odot$, respectivamente. As setas indicam uma possível redução do campo magnético destas estrelas (ver texto para detalhes). 103
- FIGURA 6.4 – Densidade de número bariônico como função do campo magnético e raio equatorial circular para anãs brancas magnetizadas com massas bariônicas fixas de $M_B = 1.00 M_\odot$ e $M_B = 1.80 M_\odot$ 104
- FIGURA 6.5 – Linhas do campo magnético poloidal para anãs brancas de carbono estáticas de massas iguais à $M = 1.0 M_\odot$ e $M = 2.12 M_\odot$, respectivamente, para um μ fixo de $3.0 \times 10^{24} \text{Am}^2$ 105

- FIGURA 7.1 – Relação entre a massa e raio de uma anã branca magnética normal composta de C/O e ^{56}Fe para campos magnéticos de 10^{11} à 4.4×10^{13} G, os valores dos campos para as linhas tracejadas (^{56}Fe) coloridas são idênticos as linhas sólidas (^{16}O), com os dados retirados a partir do Hipparcos em (PROVENCAL *et al.*, 1998; PROVENCAL *et al.*, 2002) 113
- FIGURA 7.2 – Representação da equação de estado da matéria de quarks estranho (núcleo) envolto por uma matéria heterogênea C/O (crosta). A transição do núcleo para a crosta acontece na altura do nêutron drip. A segunda linha inferior, representa a densidade na qual a matéria na crosta sofreria decaimento por β -inverso. 114
- FIGURA 7.3 – Relações massa-raio para anãs estranhas ($B=145$ MeV linha azul) e ($B=160$ MeV linha vermelha) com um núcleo formado por matéria de quarks e uma crosta de C/O, linha preta representa uma anã branca de C/O normal. A linha tracejada laranja representa uma anã estranha com (cold matter) apresentada em (WEBER, 2005), os dados foram retirados de (PROVENCAL *et al.*, 1998; PROVENCAL *et al.*, 2002). 114
- FIGURA 7.4 – Densidade de massa em função do raio de uma anã estranha (formada por matéria estranha no centro envolto de matéria de elétrons) e uma anã branca constituída de matéria heterogênea de C/O para uma estrela de $M = 1.0 M_{\odot}$, com $B = 145$ MeV. 115
- FIGURA 7.5 – Densidade de massa em função do raio para diferentes anãs estranhas (formadas por matéria estranha com $B = 145$ MeV envolto por matéria de elétrons) $M = 0.3 M_{\odot}$, $M = 0.6 M_{\odot}$ e $M = 1.0 M_{\odot}$ com a densidade de transição igual a de nêutron drip ($\rho_{\text{crosta}} = \rho_d$). 116

Lista de Tabelas

TABELA 2.1 – Propriedades de Sírus B	31
TABELA 4.1 – Constantes das redes cristalinas C , η , ζ e parâmetros $(1 - \eta - \zeta)$ e ξ , para diferentes estruturas cristalinas heterogêneas obtido pelo método de Caldwell-Horsfall e Maradudin (CHAMEL <i>et al.</i> , 2014).	60
TABELA 4.2 – Coeficientes C_{exp} , C_{pre} , C_{pl} para taxas de reações piconucleares obtidas para $T = 0$, para um modelo nuclear NL2 (see Ref. (RIBEIRO <i>et al.</i> , 1997; CHAMON <i>et al.</i> , 1997)).	67
TABELA 4.3 – Valores de massas nucleares experimentais $M_N(A, Z)$ definidas pela expressão (4.7), massa atômicas $M_A(A, Z)$, energia de ligação total $B_n(Z)$ e energia de repouso devidos os elétrons do núcleo $Z \times m_e$, em unidades de g/cm^3 (WANG <i>et al.</i> , 2012)	70
TABELA 4.4 – Valores para o campo magnético máximo em unidade de B crítico suportado por uma estrela anã branca magnética, antes de tornar-se instável por β -inverso para diferentes composições e estruturas da rede. O núcleo da estrela é assumido ser constituído de uma estrutura cristalina homogênea.	73
TABELA 4.5 – Densidade de massa para o início da captura de elétron pelo núcleo de uma anã branca massiva para diferentes composições e estruturas da rede. O núcleo da estrela é assumido ser feito de uma estrutura cristalina homogênea.	73
TABELA 4.6 – Valores para densidade de massa para o início da captura de elétron pelo núcleo para diferentes composições em uma rede do tipo bcc. O expoente * indica a equação (4.30) com ($C = 0$), indicando que as contribuições vindas das interações elétrons-íons foram negligenciadas. O expoente 0 indica a ausência de campo magnético e o expoente BOSK os valores obtidos pelo autor do trabalho (BOSHKAYEV <i>et al.</i> , 2013).	73

- TABELA 4.7 – Valores para o campo magnético máximo e densidades de massas suportado por uma estrela anã branca magnética, antes de tornar-se instável por β -inverso para diferentes composições e estrutura da rede. O núcleo da estrela é suposto ser formado de uma estrutura cristalina heterogênea. O índice e expoente (0) indicando que as contribuições vindas das interações elétrons-íons foram negligenciadas. Os B^{β} são medidos em unidades de B crítico ($4.414 \times 10^{13}\text{G}$). 74
- TABELA 4.8 – Valores para o campo magnético máximo e densidades de massas suportado por uma estrela anã branca magnética, antes de tornar-se instável por reações piconucleares para diferentes composições constituída de estrutura cristalina homogênea do tipo (bcc). O expoente * indica ($C = 0$), indicando que as contribuições vindas das interações elétrons-íons foram negligenciadas. O expoente 0 indica a ausência de campo magnético. Os B^{pc} são medidos em unidades de B crítico ($4.414 \times 10^{13}\text{G}$). 75
- TABELA 5.1 – Massa máxima para anãs brancas com e sem rotação (não magnetizada/magnéticas) para diferentes instabilidades, onde M é medida em M_{\odot} e R em km. 90
- TABELA 5.2 – Máxima frequência de Kepler para anãs brancas de carbono com rotação e sem-rotação (não magnetizada/magnéticas) para diferentes instabilidades. Ω_K é medido em Hz. 90
- TABELA 5.3 – Massa máxima para anãs brancas constituída de uma mistura heterogênea de $^{12}\text{C} + ^{16}\text{O}$ com rotação e sem-rotação, e com campo magnético de $B = 10^{12}$ G para diferentes instabilidades. A massa M é medido em M_{\odot} e o raio R em km. 92
- TABELA 7.1 – Número de carga elétrica q , dos quarks (WEBER, 2005). 109
- TABELA 7.2 – Massa e raios observacionais de possíveis candidatas a anãs estranhas a partir de Hipparcos paralaxe retiradas de (PROVENCAL *et al.*, 1998; PROVENCAL *et al.*, 2002). 115

Lista de Abreviaturas e Siglas

K	Kelvin
G	Gauss
cm	centímetro
g	gramas
s	segundos

Lista de Símbolos

M_{\odot}	Massa do Sol
R_{\odot}	Raio do Sol
L_{\odot}	Luminosidade do Sol

Sumário

1	INTRODUÇÃO	22
2	ANÃS BRANCAS	27
2.1	Da nuvem de gás e poeira à anã branca	27
2.2	Anãs Brancas	30
2.3	Anãs brancas magnéticas	33
2.4	Anãs brancas magnéticas isoladas	35
2.5	Anãs brancas magnéticas em sistemas binários	36
3	GÁS DE ELÉTRONS EM FORTES CAMPOS MAGNÉTICOS	38
3.1	Densidade Lagrangiana Eletrônica	38
3.2	Solução de Dirac para elétrons	41
3.3	Segunda quantização para os léptons	44
3.4	Propriedades Termodinâmicas	48
3.5	Equações de Estado	51
3.6	Resultados	54
4	INTERAÇÕES E INSTABILIDADES DA EOS	59
4.1	A rede cristalina em anãs brancas magnéticas	59
4.2	Possíveis instabilidades nas anãs brancas	63
4.2.1	Reação β - inversão	63
4.2.2	Reação pícnocuclear	66
4.2.3	Quebra da simetria esférica	68
4.3	Resultados	69

5	ESTRUTURA ESTELAR	76
5.1	Equação Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV)	76
5.2	Rotação em modelos estelar	78
5.3	Frequência de Kepler auto-consistente	81
5.4	Densidade Bariônica para uma estrela em Rotação	84
5.5	Resultados	85
6	CAMPOS MAGNÉTICOS AXI-SIMÉTRICOS	94
6.1	Anãs brancas com campos magnéticos axi-simétricos	95
6.2	Resultados	100
7	ANÃS BRANCAS ESTRANHAS	106
7.1	Matéria estranha em estrelas compactas	106
7.2	Modelo de sacola - MIT	107
7.3	Anãs brancas estranhas	109
7.3.1	O Modelo	110
7.3.2	A crosta	111
7.3.3	A região crosta-núcleo	111
7.3.4	O núcleo	112
7.4	Resultados	112
8	CONCLUSÕES	117
8.1	Perspectivas	121
	REFERÊNCIAS	122
	APÊNDICE A – SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE DIRAC NA PRESENÇA DE CAMPO MAGNÉTICO	135

1 Introdução

O interior das estrelas compactas oferece um exclusivo ponto de encontro entre astrofísica e física nuclear, uma vez que as propriedades macroscópicas das estrelas compactas, como massa, raio, rotação e evolução térmica dependem da composição microscópica da matéria estelar. Em particular o estudo das anãs brancas permite melhorar a nossa compreensão da matéria nuclear, devido a suas extremas densidades de até $\rho \sim 10^{10}$ g/cm³ e seus fortes campos magnéticos $B = 10^3 - 10^8$ G. A relação entre a massa estelar gravitacional M , e o raio, R , das anãs brancas não-magnetizadas foram determinados pela primeira vez por Chandrasekhar (CHANDRASEKHAR, 1935; CHANDRASEKHAR, 1939) onde a massa crítica para a anã branca formada por um gás de elétrons degenerado passou a ser conhecida como *limite de Chandrasekhar*, e cujo o valor é $M_{Ch} \approx 1.44 M_{\odot}$.

Há um interesse crescente da comunidade astrofísica em anãs brancas altamente magnetizadas do ponto de vista teórico e observacional. Anãs brancas com campos de superfície a partir de 10^6 até 10^8 G foram confirmadas observacionalmente principalmente via efeitos Zeeman que se dá a partir da divisão da linhas espectrais (ver os resultados recentes do Sloan Digital Sky Survey (SDSS)(KLEINMAN *et al.*, 2013)) para anãs brancas massivas e magnetizadas (KULEBI *et al.*, 2009; KULEBI *et al.*, 2010; KEPLER *et al.*, 2010; KEPLER *et al.*, 2013). Além de seus altos campos magnéticos a maior parte delas têm mostrado serem massivas com o pico na distribuição de massa em $\sim 1.0 M_{\odot}$, por exemplo: REJ 0317-853 com $M \approx 1.35 M_{\odot}$ e campo magnético $B = (1.7 - 6.6) \times 10^8$ G (KULEBI *et al.*, 2010), PG 1658 + 441 com $M \sim 1.31 M_{\odot}$ e $B = (2.3) \times 10^8$ G (SCHMIDT *et al.*, 1992) e PG 1031 + 234 com um dos maiores campos magnéticos da ordem de $B \sim 10^9$ G (KULEBI *et al.*, 2009). Vários estudos sobre anãs brancas massivas e muito magnetizadas (superfície com campos magnéticos da ordem $B \sim 10^8 - 10^{11}$ G) tem sido feitos, em especial com pulsares de anãs brancas como uma descrição alternativa para as Soft Gamma Repeaters (SGR) e os Pulsares Anômalos de Raios-X (AXPs) (COELHO; MALHEIRO, 2014; LOBATO *et al.*, 2016). Com base em observações recentes de várias supernovas super-luminosas Tipo Ia (SILVERMAN *et al.*, 2011; SCALZO *et al.*, 2010; BOWELL *et al.*, 2006; HICKEN *et al.*, 2007; YAMANAKA *et al.*, 2009; TAUBENBERGER *et al.*, 2011; KEPLER *et al.*, 2007), foi proposto que as curvas de luminosidade de algumas dessas peculiares supernovas super-luminosas Tipo Ia como (2006gz SN, SN 2007il, SN 2009dc, SN 2003fg) poderiam ser explicadas

por progenitoras como anãs brancas cujas massas excedem significativamente o tradicional limite de Chandrasekhar (anãs brancas super-Chandrasekhar). A energia de ligação mais elevada desses objetos poderia então explicar tanto as energias cinéticas baixas como a alta luminosidade observada nestas supernovas. Progenitoras massivas de supernovas foram estudadas como resultado da fusão de duas anãs brancas massivas (MOLL *et al.*, 2014; Ji *et al.*, 2013; BOSSUM *et al.*, 2016). Como alternativa, também para progenitoras de supernovas os autores em (LIU *et al.*, 2014) obtiveram anãs brancas super-Chandrasekhar a partir de estrelas magneticamente carregadas. Outras possibilidades tais como anãs brancas com rápidas rotações e sujeitas a campos magnéticos extremos em seu interior têm sido investigadas, a fim de observar se a energia magnética seria suficiente para aumentar a massa da estrela e alterar suas propriedades.

Algumas fontes têm sido propostas como candidatas para pulsares de anã branca. Um exemplo específico é AE Aquarii, o primeiro pulsar de anã branca, com rotação bem rápida e período $P = 33.08$ s girando em torno de uma estrela anã vermelha (TERADA *et al.*, 2008a). Mais recentemente, a missão multimirror de raios-X com o satélite XMM-Newton observou uma anã branca mais rápido do que AE Aquarii (MEREGHETTI *et al.*, 2009), o pulsador de raios-X RX J0648.0-4418 que pertence ao sistema binário HD 49798/RX J0648.0-4418 é uma anã branca massiva com massa $M = 1.28 M_{\odot}$ e raio $R = 3000$ km, e com um período de rotação de apenas $P = 13.2$ s. Mais recentemente foi observado o sistema binário AR Scorpii com um pulsar de anã branca muito magnética da ordem $B \sim 10^8 - 10^9$ G e período 1.97 min (MARSH *et al.*, 2016) girando em torno de uma estrela vermelha.

Chandrasekhar e Fermi (CHANDRASEKHAR; FERMI, 1953), observaram que quando a energia magnética W_B da estrela excede a sua energia potencial gravitacional W_G ($|W_B| > |W_G|$), o sistema torna-se instável dinamicamente. Em (ADAM, 1986; OSTRIKER; HARTWICK, 1968), modelos para relação massa-raio das anãs brancas com campos magnéticos foram calculados no formalismo newtoniano. Este estudo mostrou que a massa de uma anã branca aumenta com a presença de campo magnético juntamente com seu raio, porém diminuindo a densidade central devido à força de Lorentz, que atua contra a gravidade. Posteriormente em (SUI; MATHEWS, 2000) a mesma conclusão foi obtida no formalismo da relatividade geral a partir da solução da equação Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV).

De acordo com os trabalhos recentes (DAS; MUKHOPADHYAY, 2012; DAS; MUKHOPADHYAY, 2013; DAS; MUKHOPADHYAY, 2014b), efeitos de um campo magnético uniforme muito alto e constante sobre a equação de estado (EOS) de uma anã branca aumentariam a sua massa crítica até $2.58M_{\odot}$. Este limite de massa é atingido para valores de campos magnéticos extremos da ordem $B \sim 10^{18}$ G. De fato, a composição da matéria fermiônica pode ser alterada sob a presença de fortes campos magnéticos (CHIU *et al.*, 1968; CANUTO;

CHU, 1968), afetando a equação de estado e , como consequência, a estrutura da estrela. Em (COELHO *et al.*, 2014), foram discutidas algumas propriedades básicas no equilíbrio de anãs brancas magnéticas, em particular, as condições para as instabilidades dinâmicas da estrela, na presença de um intenso campo magnético. Esta análise foi feita no contexto do teorema de virial, estendido para incluir um termo magnético. De acordo com (SALPETER, 1961), correções devido a interação de muitos corpos modificam a EOS e portanto, a relação massa-raio de anãs brancas é modificada. Os autores em (CHAMEL *et al.*, 2013; CHAMEL *et al.*, 2014) mostraram que o campo magnético traz novos limites para quebra da simetria esférica, devido aos campos magnéticos altíssimos e os efeitos micro-físicos, tais como reações de captura de elétrons (β -inverso) e reações pícnucleares, podem limitar severamente o campo magnético no interior das anãs brancas, exigindo que estes tenham valores bem abaixo dos campos citados em (DAS; MUKHOPADHYAY, 2012). Outra instabilidade que deve ser levada em consideração para EOS utilizada para modelar uma anã branca com campos magnéticos é a anisotropia nas suas pressões. Segundo (PARET *et al.*, 2015a), o campo magnético máximo suportado por uma anã branca sem quebra de anisotropia é da ordem de $B \sim 10^{12}$ G.

Recentemente, cálculos usando Magneto-hidrodinâmica (MHD) com uma equação de estado politrópica, considerando o caso extremo de um gás de elétrons relativista com apenas um nível de Landau ocupado (DAS; MUKHOPADHYAY, 2015) foram utilizados para estudar a estabilidade das anãs brancas super-Chandrasekhar magnetizadas, considerando configurações poloidais e toroidal do campo magnético. Outro estudo recente para anãs brancas magnetizadas com rotações diferenciais, mostrou que a rotação diferencial pode aumentar a massa das anãs brancas magnetizadas até $3.1 M_{\odot}$ (SUBRAMANIAN; MUKHOPADHYAY, 2015). De acordo com (BERA; BHATTACHARYA, 2016), componentes puramente toroidais do campo magnético podem aumentar a massa de uma anã branca até $5.0 M_{\odot}$, no entanto, utilizar apenas componentes toroidais torna a estrela instável.

Foram calculados os campos magnéticos de um modo auto-consistente, afim de obter relações massa-raio considerando uma forma poloidal para B em (FRANZON; SCHRAMM, 2015), o que resultou em anãs brancas massivas podendo suportar campos magnéticos em seu centro de até $B \sim 10^{13}$ G em configuração estática e com rápidas rotações. No entanto, este trabalho levou em conta uma equação de estado para um gás de elétrons simples sem interação elétrons-íons e sem magnetização.

Nosso interesse nesta tese é explorar as anãs brancas magnetizadas sob fortes campos magnéticos $B \sim 10^{12}$ G e com rápidas rotações considerando uma EOS mais realista. Usamos uma EOS que leva em conta não apenas a contribuição devido à interação dos muitos corpos (elétron-íon) (CHAMEL *et al.*, 2013), como também os dados experimentais mais recentes dos elementos atômicos (WANG *et al.*, 2012; AUDI *et al.*, 2012). Observou-se que o efeito causado devido a interação da rede cristalina causa um amolecimento na equação

de estado do gás de elétrons magnetizado, no entanto, a rede cristalina quando levada em consideração aumenta o valor da densidade central de massa suportada pela estrela antes que aconteça reações de β -inverso e piconucleares. Nós estimamos o limite de densidade de massa para o limiar de instabilidade para processos nucleares sujeito a presença de campo magnético, como a captura de elétrons e as reações piconucleares no núcleo das anãs brancas massivas e magnetizadas. Os processos microfísicos de instabilidades são significativos para a estrutura das anãs brancas, mesmo as reações β -inverso sendo irrelevante em estrelas constituídas de elementos como o carbono C, ou mais leves, dado que a estrela torna-se instável pela relatividade geral em densidades centrais de massa inferiores. As reações piconucleares restringem as densidades das estrelas de carbono em densidade de $\rho \sim 9.25 \times 10^9$ g/cm³, para um tempo de fusão piconuclear de 10 Giga anos. Normalmente esperaríamos campos magnéticos no interior destas estrelas na ordem de $B \sim 10^{12}$ G, no máximo, 3 ordens de magnitude maiores do que as anãs brancas muito magnetizadas recentemente observadas com $B = 10^8 - 10^9$ G. Verificou-se no entanto, que campos magnéticos com ordens maiores a essas ($B = 10^{11} - 10^{13}$) G podem existir, pelo menos teoricamente dentro destas anãs brancas super magnetizadas. Observamos ainda que no formalismo 3+1 da relatividade geral, uma nova fenomenologia surge na relação massa-raio das anãs brancas magnéticas, uma vez que ao aumentar o campo magnético $B \sim 10^{13}$ G da estrela, a densidade central de número bariônico aumenta proporcionalmente, obtendo um raio equatorial menor, tornando as anãs brancas magnetizadas mais compactas. Esta fenomenologia é oposta a trabalhos que descrevem anãs brancas magnéticas com massas inferiores ao limite de Chandrasekhar onde a energia magnética aumenta o raio da estrela, tornando assim estas estrelas menos densas (ADAM, 1986; OSTRIKER; HARTWICK, 1968). Anãs brancas estranhas magnetizadas podem ser uma alternativa às estrelas com núcleo de ferro, uma vez que a matéria estranha tende a ter um maior número de graus de liberdades comparado ao ferro, sendo mais estável. Essas estrelas são mais compactas que anãs brancas tradicionais devido ao seu pequeno caroço (núcleo) de aproximadamente 3.0 km de matéria estranha, descrevendo bem algumas anãs brancas compactas observadas. No entanto, estes objetos ainda são pouco estudados e necessitam de mais investigação, como levar em consideração rotação e outros processos tanto macroscópicos como microscópicos.

O trabalho está organizado da seguinte forma: No capítulo 2 apresentamos uma breve descrição da evolução estelar concentrando-nos no tema desta tese, as anãs brancas magnéticas em sistema binários e isoladas, considerando as recentes observações astronômicas destes objetos estelares. No capítulo 3 revisitamos a física de um gás de elétrons relativístico sujeito a um forte campo magnético. Descrevemos as equações de estado em uma ótica de teoria de campo médio. No capítulo 4 apresentamos o modelo para descrever a estrutura da matéria dentro de uma anã branca magnetizada levando em consideração a contribuição da interação elétrons-íon. Alguns dos aspectos microfísicos como insta-

bilidades devido ao decaimento β -inverso e às reações de fusão púcnucleares, que são relevantes na descrição da estrutura estelar foram também tratadas neste capítulo, onde observamos qual a ação do campo magnético e da contribuição da interação elétron-íons para essas instabilidades. Discutimos no capítulo 5 as equações estruturais de uma estrela em equilíbrio hidrostático estacionário e em rotação rígida sujeita a um campo magnético constante na direção z . Determinamos o limite para frequência de Kepler (quando se inicia a liberação de massa na superfície estelar) para uma estrela altamente magnetizada. No capítulo 6 tratamos campos magnéticos axi-simétrico variáveis calculados de um modo auto-consistente considerando uma corrente elétrica puramente poloidal e constante no formalismo 3+1 da relatividade geral. Utilizamos uma equação de estado de gás de Fermi com interação elétron-íons e levando em conta as possíveis instabilidades. No capítulo 7 discutimos um novo modelo de anã branca formada por um núcleo de matéria de quarks e uma crosta de um gás de elétrons magnetizado, chamada de anãs brancas estranhas. Finalmente, no capítulo 8 apresentamos as principais conclusões e perspectivas desta tese.

2 Anãs Brancas

2.1 Da nuvem de gás e poeira à anã branca

A evolução das estrelas e eventuais explosões das mesmas em eventos de supernovas são sem dúvida objetos essenciais para o entendimento do universo e compreensão da vida. Elementos mais leves que o lítio foram produzidos durante a nucleossíntese primordial no *Big Bang*, enquanto elementos com valores de massa menor ou igual a do ferro são sintetizados em reações termonucleares que ocorrem num longo período de tempo, aproximadamente entre 10^8 à 10^{10} anos de evolução estelar.

A compreensão da estrutura e evolução das estrelas é até hoje um objetivo da astrofísica nuclear. Uma estrela tem seu nascimento em nuvens formadas de gás (hidrogênio) e poeira em contração, nuvens estas que podem atingir dimensões da ordem de centenas de anos-luz e massas de até $10^7 M_{\odot}$, com temperaturas na ordem de 10 K, mas podendo existir regiões cujas temperaturas chegam até 2000 K (SARAIVA, 2004). O movimento desordenado das partículas no interior da nuvem provoca flutuações de densidade, essas flutuações formam áreas mais densas que as demais dando origem a um núcleo que começa acretar matéria da nuvem, fazendo com que a mesma contraia-se sob ação da própria gravidade.

A nuvem então entra em um estágio de colapso de fora para dentro, com a matéria no centro sofrendo queda livre e o material mais externo permanecendo estacionário e com o tempo, o colapso se espalha por toda a extensão da nuvem. A taxa de acreção de matéria pelo núcleo depende da temperatura inicial da nuvem (SHAPIRO; TEUKOLSKY, 2008). Para uma massa equivalente a uma massa solar ser acretada ao núcleo da nuvem é necessário um período de cem mil a um milhão de anos. A energia potencial gravitacional oriunda da queda da matéria para o núcleo da nuvem é convertida em energia térmica no núcleo, formando uma onda de choque na superfície, onde a matéria é freada por forças de viscosidade. O caroço em formação no centro da nuvem constitui a formação de um dos objetos conhecido na astrofísica como *protostrela* (SARAIVA, 2004). A protostrela transforma-se em uma estrela na qual seu tamanho será na maior parte de sua vida determinado pelo equilíbrio entre a pressão térmica no centro gerada pela reações

nucleares, processo que faz a estrela tender a expandir-se e a compressão gravitacional que pressiona a estrela a colapsar sobre si própria. A onda de choque na superfície da protoestrela aquece em aproximadamente um milhão de graus o gás da nuvem, sendo o mesmo resfriado por um processo de radiação que é absorvida pela matéria em torno à protoestrela. A radiação também é responsável pela desaceleração da taxa de acreção de matéria pela protoestrela. O aumento da matéria na protoestrela, gera assim um colapso devido a auto-gravidade e a temperatura no seu interior aumenta. No entanto, como o colapso é um processo lento e quase-estático, o teorema de virial é usado com boa aproximação, prevendo que metade da energia potencial gravitacional se converta uma parte em energia cinética e outra parte em energia a ser irradiada pela protoestrela.

A energia irradiada inicialmente escapa da protoestrela. No entanto, à medida que a densidade e a pressão aumentam devido à compressão da matéria na protoestrela, a mesma torna-se opaca, propiciando assim características necessárias para que o equilíbrio termodinâmico aconteça pela primeira vez, com o campo de radiação sendo descrito por uma temperatura local relacionada com a energia cinética do gás (SHAPIRO; TEUKOLSKY, 2006). Nessa etapa parte da radiação é utilizada no processo de ionização da nuvem circundante. Quando a matéria no interior da nuvem torna-se totalmente ionizada, acontece o equilíbrio hidrostático, onde parte da massa da nuvem em processo de auto-gravidade é balanceada pela pressão da matéria ionizada. Por exemplo, isso ocorreu quando o Sol tinha sessenta vezes o tamanho da sua forma atual.

A diferença entre as temperaturas das camadas internas e externas é aumentada, devido ao contínuo colapso da protoestrela ir elevando sua temperatura interna rapidamente. Nas camadas mais externas da protoestrela, o movimento violento das correntes de convecção (energia cinética) é convertido em radiação. O astrofísico japonês Hayashi determinou que a energia sobressalente da energia potencial gravitacional é transportada à superfície por correntes de convecção, e definiu a chamada *fase de Hayashi* da evolução, uma fase onde subsistem as correntes de convecção no interior da protoestrela. Hayashi determinou a temperatura que a estrela necessita alcançar para que haja o equilíbrio entre a energia mecânica das correntes de convecção e a energia de radiação para determinada composição química e massa da protoestrela, temperatura que se encontra no intervalo de 2000 – 3000 K na superfície da protoestrela (SARAIVA, 2004).

No processo evolutivo da estrela à medida que se aproxima o estágio de luminosidade final, o núcleo radioativo se expande, enquanto há um encolhimento da zona convectiva, devido ao aumento da temperatura no centro da estrela. Quando a massa da protoestrela alcança alguns décimos da massa do Sol, a temperatura da protoestrela aumenta para milhões de Kelvin, dando início à fusão de elementos leves, como lítio, berílio e boro. Esses processos de fusão não são suficientes para interromper o colapso da protoestrela. Assim, com a continuação do colapso a temperatura no centro alcança o valor de 10^7 K,

temperatura suficiente para o início da fusão do hidrogênio. Após o início da fusão do hidrogênio, rapidamente a estrela entra em equilíbrio, com a energia gerada devido a fusão igualando a energia irradiada. Assim, essas estrelas começam fundir hidrogênio em hélio, entrando na chamada *sequência principal* na qual a estrela passa a maior parte de sua vida, gerando grande quantidade de energia termonuclear oriunda da fusão do hidrogênio em hélio (GLENDEENING, 2012).

Com a queima total do hidrogênio no núcleo, esse processo de fusão passa agora para camadas mais externas em torno do núcleo. Cessada a queima do hidrogênio, a estrela sai rapidamente da sequência principal passando para outro estágio conhecido como *gigante vermelha*. Neste estágio, a estrela passa por um período de aumento da temperatura em seu núcleo, até que seja suficiente para que tenha início a fusão do hélio remanescente da sequência principal. A partir desse estágio a estrela passa da queima do hélio para elementos mais pesados, como carbono, neônio, oxigênio, magnésio e silício. Como mencionado anteriormente, a estrela poderá fundir elementos de massa inferior ou igual a massa do Fe. Por isso, um fator fundamental será a massa progenitora da estrela. Apenas estrelas com massas superiores ao valor de $M \geq 8 M_{\odot}$, conseguem sintetizar ferro em seu interior a partir de reações termonucleares. Estrelas com massas inferiores a essas massas tem reações nucleares mais lentas e incompletas.

Gigantes vermelhas que tiveram como progenitora estrelas com massas entre $0.08 - 8.0 M_{\odot}$, tem seu núcleo contraído adiabaticamente aumentando sua temperatura até atingir 10^8 K, condição necessária para dar início à ignição da fusão de 3 átomos de He (hélio) em um átomo de C (carbono) e um átomo de C (carbono) e um de He (hélio) em O (oxigênio) ou até 4 átomos de H (hidrogênio) em He (hélio) nos envelopes do caroço (SARAIVA, 2004). Entretanto, a estrela nesse intervalo de massa não alcança temperatura suficiente para a queima dos novos elementos, (carbono e oxigênio criados no caroço da gigante vermelha). Sendo assim o caroço constituído agora de He, C e O, passa a sofrer contração sob sua própria gravidade, após a ejeção do material do envelope para o meio estelar. Isso acontece até que sua pressão gravitacional seja balanceada pela pressão do gás de elétrons.

Com a estabilidade atingida, nasce o primeiro exemplar da família dos objetos compactos, chamado de *aná branca*. Esse objeto tem como nomenclatura o termo "branca", devido à alta temperatura da superfície da estrela, que pode variar de 3500 K até 17000 K, dando o aspecto de coloração branca ou azul. Sua fonte de luz, vem do calor gerado nos antigos processos nucleares (SARAIVA, 2004; SHAPIRO; TEUKOLSKY, 2008; GLENDEENING, 2012; MACIEL, 1999). A Figura 2.1 mostra uma anã branca no centro da nebulosa planetária NGC 3132.

Uma anã branca tem densidade média em torno de 10^6 vezes a densidade da Terra, porém em um volume comparado ao da Terra, ou seja, poucos milhares de quilômetros.



FIGURA 2.1 – Nebulosa planetária NGC 3132 com uma estrela anã branca em seu centro
Fonte: Hubble Heritage Team, via Wikimedia Commons

Depois da sua formação, uma anã branca passa por um processo de resfriamento, através de irradiação de fótons, ao longo de $10^8 - 10^{10}$ anos, até cristalizar-se e torna-se uma estrela impossível de ser observada visualmente. Nessa nova fase essa estrela passa a ser chamada anã negra (HARTMANN *et al.*, 2002). No entanto, acredita-se que o universo ainda é suficientemente novo, comparado ao tempo de vida que uma anã branca necessitaria para tornar-se uma anã negra no seu estágio final de vida.

O Sol tem atualmente uma idade estimada em 4.5×10^9 anos, tendo como expectativa total de vida 12 bilhões de anos antes de colapsar para uma anã branca, segundo teorias modernas.

2.2 Anãs Brancas

O estudo das anãs brancas teve início em 1850 com a descoberta da estrela secundária de Sírius, chamada Sírius B (HORN, 1984), no entanto, apenas no início do século XX as anãs brancas foram reconhecidas pela primeira vez como uma nova classe de estrelas tendo como características dimensões planetárias, porém massas em valores estelares.

Em 1920, o desvio (*redshift*) gravitacional da luz, previsto na teoria da relatividade geral de Albert Einstein, foi medido para a anã branca Sírius B, confirmando a pequena dimensão da estrela e a alta densidade da matéria. Algumas das propriedades de Sírius B são mostradas na tabela (2.1), e para comparação mostramos os correspondentes valores do Sol. É interessante observar que o raio da Terra é de $6.371 \times 10^6 \text{ cm} = 0.00915 R_{\odot}$, levemente maior que Sírius B.

Quantidades	Sírius B	Sol
Massa	$1.05 M_{\odot}$	$M_{\odot} = 1.989 \times 10^{33} \text{ g}$
Raio	$0.008 R_{\odot}$	$R_{\odot} = 6.95 \times 10^{10} \text{ cm}$
Luminosidade	$0.03 L_{\odot}$	$L_{\odot} = 3.90 \times 10^{33} \text{ erg/s}$
Temperatura efetiva	27000 K	5800 K
Gravitacional redshift	$89 \pm 16 \text{ km/s}$	0.6 km/s
Densidade média	$2.8 \times 10^6 \text{ g/cm}^3$	1.41 g/cm^3
Densidade central	$3.3 \times 10^7 \text{ g/cm}^3$	$1.6 \times 10^2 \text{ g/cm}^3$
Temperatura central	$2.2 \times 10^7 \text{ K}$	$1.6 \times 10^7 \text{ K}$

TABELA 2.1 – Propriedades de Sírius B

A existência de estrelas compactas constitui um dos mais intrigantes enigmas da astrofísica, até a teoria da estatística quântica para o gás de elétrons ser elaborada pelos físicos Enrico Fermi e P. A. M. Dirac em meados do século 20. A teoria de Fermi-Dirac para o gás de elétrons mostrou-se de acordo com o princípio de exclusão de Pauli, no qual os elétrons mais frios não podem acumular-se no estado quântico de menor energia. Sendo assim, a energia total bem como a pressão do gás de elétrons permanece não nula, mesmo que a temperatura do gás seja zero ($T = 0$) (SHAPIRO; TEUKOLSKY, 2008).

Esta explicação de certa forma era o que faltava para explicar o enigma que cercava as anãs brancas. R. H. Fowler mostrou que a pressão de um gás de elétrons degenerado, no qual os estados quânticos são preenchidos sucessivamente do estado de menor energia para o estado de maior energia é suficiente para suportar um objeto de massa estelar contra sua auto-gravidade, como por exemplo uma anã branca. Veremos com mais detalhes como acontece esse equilíbrio hidrostático no capítulo 5.

Por volta dos anos de 1930, um dos jovens graduandos da universidade de Cambridge, Subrahmanyan Chandrasekhar, incluiu os efeitos da relatividade especial na teoria do gás de elétrons degenerado. Como resultado deste trabalho S. Chandrasekhar determinou o limite de massa que a matéria degenerada de uma anã branca pode suportar de maneira estável contra sua própria gravidade sem colapsar (CHANDRASEKHAR, 1935). A existência de uma massa crítica foi uma das maiores descobertas pois trouxe profundas consequências para o estágio final da evolução estelar, o que rendeu à S. Chandrasekhar um Nobel em física no ano de 1983, por estudos teóricos de processos físicos referentes à estrutura e à evolução das estrelas. A massa crítica para a anã branca passou a ser chamada *limite de Chandrasekhar*, onde $M_{\text{Ch}} \approx 1.44 M_{\odot}$.

Estrelas cujo valor de massa excede o limite de Chandrasekhar, tem a atração gravitacional sobre si própria maior do que a pressão dos elétrons degenerados podem suportar, fazendo com que a estrela entre novamente em um estágio de colapso dando origem a uma violenta explosão. Supernovas são manifestações de tais catastrofes. Em alguns casos, es-

tas violentas explosões não destituem completamente a estrela, e a anã branca torna-se progenitora de objetos de maior densidade, podendo ser uma estrela de nêutrons ou um buraco negro (GLENDEENING, 2012).

A partir dos estudos no início da década de 1949 feito por Robert E. Marshak, sobre a condutividade dos elétrons em metais, que anteriormente tinha sido elemento de estudo de Arnold Sommerfeld e Hans Bethe, começou a busca pelo entendimento da estrutura térmica de uma anã branca (HORN, 1984). Quais condições necessárias para o gás de elétrons em uma estrela com matéria degenerada? Então, em meio a questionamentos, R. E. Marshak e H. Bethe em Cornell, encontraram que a condutividade térmica devido aos elétrons degenerados no núcleo é tão intensa que a anã branca se comporta praticamente como isotérmica, no entanto, nas camadas finas em torno ao núcleo, ou seja, na superfície da anã branca a transferência de calor acontece de maneira lenta e ineficiente, devido a não degenerescência do gás. Resultados numéricos mostraram que a típica luminosidade de uma anã branca é em torno de $10^{-2} L_{\odot}$ e a temperatura em seu núcleo isotérmico por volta de 10^7 K. Assim, mesmo com uma alta temperatura, tão quente quanto o centro do Sol, o gás de elétrons ainda é degenerado, devido à alta densidade de matéria em seu núcleo. Por essas características a anã branca veio a ser retratada como uma massiva, quente e condutiva esfera, revestida por uma fina camada, mas eficaz, isolante térmica (SARAIVA, 2004; SHAPIRO; TEUKOLSKY, 2008; GLENDEENING, 2012; MACIEL, 1999).

O Universo visível, segundo observações atuais, é composto de 90% de H e 9% de He, em número de partículas. Todos os elementos químicos remanescentes formados nos núcleos das estrelas constituem aproximadamente 1% da matéria do Universo. As observações astronômicas no início do século XX, já davam conta de que o hidrogênio era o elemento mais abundante no universo e que compunha cerca de 70% da massa das estrelas. Pensando nisto, Hans Albrecht Bethe em 1938 calculou a taxa de reações termonucleares envolvendo hidrogênio sob condições apropriadas no interior estelar e mostrou que essas reações fornecem a fonte de energia da qual a luminosidade das estrelas mais comuns é derivada. Bethe foi agraciado com o prêmio Nobel em física de 1967 por este trabalho.

No entanto, o resultado apresentado por Bethe quando aplicado a anãs brancas, mostrava uma surpreendente contradição entre os resultados teóricos e os observacionais. A energia prevista por Bethe levou a taxas de geração de luminosidades estelares muitas ordens de magnitude maiores que as observadas. Levando a duas inevitáveis conclusões:

- reações termonucleares não são as fontes da luminosidade de uma anã branca;
- hidrogênio deve ser totalmente ausente do interior de uma anã branca;

Esses resultados mostraram claramente que anãs brancas estão entre as estrelas em estágio final da evolução estelar, pois essas estrelas, esgotaram suas fontes de energia

termonucleares. No entanto, qual a fonte da energia irradiada por uma anã branca? Essa pergunta foi respondida em 1952 por Leon Mestel, quando ele explicou que a energia térmica contida no núcleo de uma anã branca, passando lentamente pela fina camada, que funciona como isolante térmico é suficiente para explicação da luminosidade observada nessas estrelas compactas (BORN, 1984). Mestel ainda previu uma distribuição estatística da luminosidade de uma anã branca, que concordava satisfatoriamente com resultados observacionais existentes.

Esta teoria da evolução de uma anã branca, exceto por alguns detalhes se mantém até os dias atuais. Uma anã branca, ainda é estudada como uma estrela formada por gás degenerado em altas densidades, muitas vezes com temperatura $T = 0$ (SHAPIRO, TEUKOLSKY, 2008; GLENDENNING, 2012). No entanto, uma nova classe de anãs brancas tem recebido atenção na última década, as anãs brancas magnéticas. Sabemos agora, por exemplo, que algumas anãs brancas magnéticas possuem campos magnéticos que variam entre $10^6 - 10^8$ G (KLEINMAN *et al.*, 2013), muito maiores do que somos capazes de atingir em laboratórios terrestres.

2.3 Anãs brancas magnéticas

James Kemp e John Sweshund da universidade de Oregon, juntos com John Landstroot e Roger Angel da Columbia University descobriram em 1970 uma contínua radiação óptica de uma anã branca GRW +70° 8247 circularmente polarizada (KEMP *et al.*, 1970). Esta observação foi rapidamente interpretada como a evidência da presença de intensos campos magnéticos nesta estrela. Anos depois mais de uma dúzia de anãs brancas magnéticas foram descobertas por eles e outros pesquisadores, parte dessas a partir do método de polarização e parte por efeito de deslocamento Zeeman em linhas espectrais de H, He, ou C. A intensidade do campo magnético para essas estrelas foi inferido em um intervalo de $10^6 - 10^8$ G (Gauss) (ANGEL, 1977).

Análises quantitativas do espectro de anãs brancas magnéticas requerem a quantificação dos desvios Zeeman dos níveis atômicos de energia. Embora os desvios sejam lineares com a intensidade do campo magnético para campos baixos, o termo da Hamiltoniana referente ao campo é quadrático, o que o torna dominante quando o campo é da ordem dos valores encontrados nas anãs brancas magnéticas. Em complemento, algumas das anãs brancas magnéticas exibem anomalias em suas composições atmosféricas, o que presumidamente acredita-se ser motivado pelos fortes campos magnéticos na magnetosfera destas estrelas (ANGEL, 1977).

Nos últimos anos o estudo das anãs brancas magnéticas tem ganhado evidência na astrofísica devido ao intrigante problema que as rodeia. Cálculos apontam que a escala

de tempo para a dissipação ôhmica do campo magnético é da ordem de alguns bilhões de anos. Este intervalo de tempo é mais que suficiente para que uma anã branca tenha um resfriamento de sua superfície para uma temperatura próxima à $T_{\text{db}} \approx 5000$ K. Isso pode ser significativo já que até início de 1990 nenhuma anã branca magnética tinha sido descoberta com temperaturas muito inferiores a esse valor (VALYAVEN *et al.*, 2014).

O longo tempo de decaimento para os campos magnéticos são consistentes com a ideia que os campos são primordiais, assim, ele poderia ter sido gerado em algum momento, em um processo intrínseco, para resfriar a matéria degenerada da estrela. No entanto, como os campos magnéticos foram produzidos nas estrelas, ainda não é totalmente conhecido. Será que eles são relíquias congeladas que datam das primárias sequências estelares que deram origem às anãs brancas magnéticas? Ou foram produzidos em um dínamo estelar acionado talvez pela fase final da queima das reações termonucleares antecessoras à anã branca? Respostas a essas questões podem nos ensinar muito sobre a relação das anãs brancas magnéticas e os estágios antecessores da evolução estelar.

O número de anãs brancas magnéticas com campos magnéticos entre $2 - 1000 \times 10^6$ G tem aumentado de pouco mais de 70 que eram conhecidas em 2000, para mais de 600 em 2015, no Sloan Digital Sky Survey (SDSS), (KLEINMAN *et al.*, 2013). Amostras de volume sugerem que aproximadamente 10 - 20% das anãs brancas são magnéticas.

Landstreet encontrou a partir de uma pesquisa espectropolarimétrica para uma pequena amostragem de anãs brancas frias, onde a temperatura $T \lesssim 14000$ K, que a probabilidade de determinar um campo magnético de intensidade de 10^2 G em anãs brancas com atmosferas ricas em hidrogênio, que são classificadas como tipo DA, é aproximadamente 10% (LANDSTREET *et al.*, 2012). Contudo, é necessário salientar a impossibilidade de uma medida em alta precisão para definir se há um ponto de corte inferior para a intensidade do campo magnético nas anãs brancas ou se existe um campo acima do qual todas as anãs brancas são magnéticas.

Um outro fator intrigante no estudo de anãs brancas magnéticas é que parece haver uma falta de jovens anãs brancas com campos magnéticos entre os limites $10^2 - 10^3$ G. Uma explicação para a ausência desses objetos não é compreendida, uma vez que essas estrelas podem ser facilmente observadas por estudos de espectropolarimetria como o conduzido por Amar Cuadrado (CUADRADO *et al.*, 2004).

Outra pesquisa, realizada por EOS SNIa Progenitor Survey (SPY), também aponta para um baixo número de anãs brancas na faixa de campos entre $10^2 - 10^3$ G. No entanto, as anãs brancas magnéticas podem ser divididas em duas classes, a primeira com as estrelas que apresentam intensos campos magnéticos $1 - 1000 \times 10^6$ G e a segunda classe com a população de estrelas que apresenta campos de intensidade $< 0.1 \times 10^6$ G.

Pesquisas levando em consideração progenitoras diretas de anãs brancas magnéticas as

nebulosas planetárias, como também antecessoras às anãs brancas quentes, têm mostrado uma lacuna no entendimento da formação dessas estrelas. Anãs brancas magnéticas podem também ser encontradas em variáveis cataclísmicas (VC), que são sistemas binários, com uma anã branca que acreta matéria de uma companheira da sequência principal. Esses sistemas tem períodos orbitais menores que dias e uma órbita de separação da ordem do raio solar, o que torna esses sistemas binários relativamente compactos (FERRARIO *et al.*, 2015). Por serem sistemas abundantes e também devido à sua proximidade, as variáveis cataclísmicas são os objetos-chaves para o entendimento do processo final da evolução de sistemas binários. Estrelas que hospedam campos de intensidades maiores que $B \gtrsim 10^5$ G, são fontes importantes para o estudo do processo de acreção e de emissão em ambientes de fortes campos magnéticos, porque nos ajuda a compreender a influência dos campos magnéticos no processo de evolução final do sistema binário.

O número de variáveis cataclísmicas magnéticas tem aumentado nos últimos anos, de pouco mais de 60, para um número em torno de 170. No entanto, existem valores de campo magnético para apenas metade desses sistemas, onde os campos variam entre $7 - 230 \times 10^5$ G. Um outro fator notável é que anãs brancas magnéticas isoladas apresentam campos magnéticos mais intensos que suas irmãs em sistemas binários, como também, estrelas isoladas frias tem seus campos mais intensos que estrelas quentes (FERRARIO *et al.*, 2015).

2.4 Anãs brancas magnéticas isoladas

A primeira anã branca magnética isolada GRW +70° 8247, foi descoberta em 1934 pelo físico Kuiper, no entanto, só ganhou essa classificação quando Kemp e seus colaboradores em 1970 demonstraram que a luz era fortemente polarizada circularmente. O espectro de GRW +70° 8247 parecia ser quase inexpressivo, no entanto, Minkowski (1938) e Greenstein e Matthews (1957) revelaram a presença de bandas de absorção incomuns, em torno de 3650Å, 4135Å e 4466Å, que veio a ser conhecido como *bandas de Minkowski* (FERRARIO *et al.*, 2015).

Com os cálculos das transições de hidrogênio em fortes campos magnéticos, foi possível identificar as características espectrais de GRW +70° 8247 como deslocamento Zeeman das linhas de hidrogênio em campos magnéticos de $100 - 320 \times 10^5$ G, para mais detalhes veja (ANGEL *et al.*, 1985; GREENSTEIN *et al.*, 1985; WICKHAMASINGHE; FERRARIO, 1988). Esse avanço no entendimento das características espectrais de GRW +70° 8247 levou à comparação de que a banda de Minkowski próximo à 4135 Å é uma componente desviada 700 Å a partir de sua posição de campo nulo.

Angel e Landstreet (ANGEL; LANDSTREET, 1971), detectaram em outros objetos,

G195-19 polarização circular semelhante as de GRW +70° 8247, aumentando assim o número de anãs brancas magnéticas conhecidas. Observações posteriores mostraram que a polarização circular em G195-15 varia no período da rotação da estrela, pressupondo que o eixo de rotação da estrela, tem um inclinação referente ao eixo do campo magnético da anã branca. Ainda Angel e Landstreet observaram tanto para a GRW +70° 8247 como G195-19 uma polarização linear, no entanto, em nível muito inferior a polarização circular. Landi Degl'Innocenti (DEGL'INNOCENTI, 1976), levantou a hipótese de que o campo magnético poderia ser responsável por essa quebra de simetria, visto uma vez que os dados de polarização de G195-19 não seguiam um comportamento sinusoidal. Uma terceira anã branca magnética foi descoberta G99-37 ainda por Angel e Landstreet em 1971 e alguns anos depois, também utilizando polarização circular Swedlund em 1974 descobriu a GD229 (FERRARIO *et al.*, 2015).

O número de anãs brancas magnéticas tem aumentado significativamente desde a descoberta de Kemp em 1970. Muito disso graças a pesquisas como a Hamburg / ESO Quasar Survey, Edinburgo-Cape e principalmente o Sloan Digital Sky Survey (SDSS), possibilitando atualmente mais de 600 anãs brancas magnéticas conhecidas. Se levarmos em consideração ainda estrelas onde não temos nenhuma determinação de campo o número é ainda maior, proporcionando assim uma amostra que permite estudos estatísticos significativos das características destas estrelas. Uma tabela com essas estrelas e suas características como composição, campo magnético, temperatura efetiva, massa e período de rotação pode ser vista na recente revisão de (FERRARIO *et al.*, 2015), como também suas referências de pesquisa.

2.5 Anãs brancas magnéticas em sistemas binários

A maioria das variáveis cataclísmicas, tem uma anã branca como companheira de uma estrela na sequência principal, em condição para formação de um disco de acreção. A polarização do campo magnético nesse sistema binário, com uma anã branca na formação do disco de acreção é demasiadamente forte, de modo que o gás acrecido pela anã branca segue uma linha de dipolo.

AM Herculis binários (AM Her binário) foi o primeiro sistema binário descoberto pelos satélites *UHURU* e *SAS-3* em 1976 (HEARN *et al.*, 1976), que emitem raio X de baixa energia (chamaremos esses objetos de soft X-rays, nome comum na bibliografia). Observações ópticas posteriores deste sistema binário revelaram variáveis lineares até 7% e circulares até 9%, e polarização de 3.09 h no período orbital binário. Sistemas que tem características semelhantes foram nomeados AM Her-tipo variável. O nome polar foi introduzido depois para AM Her e outros objetos, identificados como fontes de raios-X e

também que mostram polarização da luz no óptico (WARNER, 1995).

Em meados do século 20 o sistema binário DQ Her foi descoberto com variabilidade periódica de 71 segundos, no entanto, apenas duas décadas depois foi visto que esse mesmo sistema era fracamente polarizado. Pulsações ópticas com períodos de 33 segundos foram observadas em 1978 na AE Aqr, no entanto, sem polarização da luz. Anos mais tarde em outras VCs foram encontradas rápidas variações periódicas ópticas, sendo essas variações no período menores as que o período orbital ($P_{rot} \ll P_{orb}$). Estes sistemas inicialmente foram chamados de DQ He-tipo variável, e depois renomeados para *polares intermediárias*, com a sigla em inglês (IPs)(WARNER, 1995). Assim, as VC magnéticas passaram a ser divididas em dois grupos, polares e IPs.

Mostrou-se que momentos magnéticos de $\mu \geq 5 \times 10^{30}$ Gcm² na acreção de anãs brancas em polares são suficientemente fortes para bloquear a estrela em sincronia com o período orbital ($P_{orb} \sim 70 - 400$ minutos). Em adição, o momento magnético das anãs brancas em IPs não são intensos o suficientes para ocasionar esses bloqueios, resultando um período de rotação P_{rot} das anãs brancas menor que o período orbital.

Devido às fortes emissões de Soft X-rays, o número de polares conhecidos tem aumentado nos últimos anos. Muito disso, graças às pesquisas em Soft X-rays, e em particular ao satélite ROSAT que conduziu grande parte das observações na década de 90 (FERRARIO *et al.*, 2015). Hoje, aproximadamente 110 desses sistemas são conhecidos, hospedando anãs brancas com campos magnéticos nas superfícies medidos em torno de $B \approx 7 - 230 \times 10^3$ G.

Uma tabela com uma lista completa desses sistemas conhecidos até dezembro de 2014, contendo características como campo magnético, temperatura efetiva, massa e período de rotação pode ser vista no artigo (FERRARIO *et al.*, 2015). As informações de IPs também podem ser vista em (FERRARIO *et al.*, 2015), com um número de 55 sistemas. Contudo, até hoje pouco mais de 60 candidatos esperam por confirmação através da emissão de raios X.

3 Gás de Elétrons em Fortes Campos magnéticos

3.1 Densidade Lagrangiana Eletrônica

O estudo de anãs brancas magnéticas permite melhorarmos o entendimento sobre a matéria nuclear em densidades extremas e fortes campos magnéticos. A composição dessas estrelas pode sofrer alterações sob a presença de fortes campos magnéticos, afetando as equações de estado e conseqüentemente a estrutura da estrela. O sistema composto por matéria fermiônica tem sido intensamente estudado (CHU *et al.*, 1968; CANUTO; CHU, 1968), no entanto, tem ganhado notoriedade nos últimos anos (DAS; MUKHOPADHYAY, 2012; DAS; MUKHOPADHYAY, 2013; DAS *et al.*, 2013; DAS; MUKHOPADHYAY, 2014a; DAS; MUKHOPADHYAY, 2014b; COELHO *et al.*, 2014; DAS; MUKHOPADHYAY, 2015). A densidade lagrangiana de um sistema de elétrons na presença de um campo magnético constante é dado por (CANUTO; CHU, 1968):

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_e + \mathcal{L}_{int} + \mathcal{L}_\gamma \quad (3.1)$$

onde \mathcal{L}_e , \mathcal{L}_{int} , \mathcal{L}_γ são as lagrangianas dos elétrons, interação e fótons respectivamente. Escrevendo cada termo da equação (3.1) explicitamente, temos:

$$\mathcal{L}_e = -\frac{1}{2}\hbar c(\bar{\psi}\gamma_\mu\partial_\mu\psi - \partial_\mu\bar{\psi}\gamma_\mu\psi) - m_e c^2\bar{\psi}\psi, \quad (3.2)$$

$$\mathcal{L}_{int} = ie\bar{\psi}\gamma_\mu A_\mu\psi, \quad (3.3)$$

$$\mathcal{L}_\gamma = -\frac{1}{2}\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}. \quad (3.4)$$

Podemos escrever então (3.1) como:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\hbar c(\bar{\psi}\gamma_\mu\partial_\mu\psi - \partial_\mu\bar{\psi}\gamma_\mu\psi) - m_e c^2\bar{\psi}\psi + ie\bar{\psi}\gamma_\mu A_\mu\psi - \frac{1}{2}\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}, \quad (3.5)$$

onde o quadri-vetor $A_\mu = (i\phi, \mathbf{A})$, sendo \mathbf{A} a componente espacial (potencial vetor) e ϕ o potencial escalar, c é a velocidade da luz, m_e a massa do elétron e \hbar é a constante de Planck h dividida por 2π . ψ é a função de onda do elétron e $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma_0$, onde ψ^\dagger é o conjugado Hermitiano de ψ . Temos ainda a notação:

$$\partial_\mu = \partial/\partial x_\mu \quad (3.6)$$

e γ_μ igual as matrizes que são usualmente definidas na representação de Pauli-Dirac, sendo $\mu = 0, 1, 2, 3$, correndo de 0 à 3 para índices Gregos e correndo de 1 à 3, $i = 1, 2, 3$ para índices Romanos (GLENDEENING, 2012).

Usando as técnicas padrões de teoria de campos, podemos a partir da lagrangiana equação (3.5), obter as equações de movimento usando a relação de Euler-Lagrange e assim obter as equações que são satisfeitas por ψ e $\bar{\psi}$, nomeadas equações de Dirac. As equações de movimento de Euler-Lagrange para $\bar{\psi}$ e ψ são determinadas a partir das seguintes relações, respectivamente:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} \right) = 0, \quad (3.7)$$

e

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \right) = 0. \quad (3.8)$$

Substituindo (3.5) nas equações acima (3.7) e (3.8) temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} \right) &= \frac{\partial}{\partial \bar{\psi}} \left(-\frac{1}{2} \hbar c (\bar{\psi} \gamma_\mu \partial_\mu \psi - \partial_\mu \bar{\psi} \gamma_\mu \psi) - m_e c^2 \bar{\psi} \psi + i c \bar{\psi} \gamma_\mu A_\mu \psi \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} \right) - \partial_\mu \frac{\partial}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} \left(-\frac{1}{2} \hbar c (\bar{\psi} \gamma_\mu \partial_\mu \psi - \partial_\mu \bar{\psi} \gamma_\mu \psi) \right) \\ &= m_e c^2 \bar{\psi} \psi + i c \bar{\psi} \gamma_\mu A_\mu \psi - \frac{1}{2} \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} \\ &= \left(\gamma_\mu \partial_\mu + \frac{m_e c}{\hbar} \right) \psi + \frac{i c}{\hbar} \gamma_\mu A_\mu \psi = 0, \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \right) &= \frac{\partial}{\partial \psi} \left(-\frac{1}{2} \hbar c (\bar{\psi} \gamma_\mu \partial_\mu \psi - \partial_\mu \bar{\psi} \gamma_\mu \psi) - m_e c^2 \bar{\psi} \psi + i c \bar{\psi} \gamma_\mu A_\mu \psi \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} \right) - \partial_\mu \frac{\partial}{\partial (\partial_\mu \psi)} \left(-\frac{1}{2} \hbar c (\bar{\psi} \gamma_\mu \partial_\mu \psi - \partial_\mu \bar{\psi} \gamma_\mu \psi) \right) \\ &= m_e c^2 \bar{\psi} \psi + i c \bar{\psi} \gamma_\mu A_\mu \psi - \frac{1}{2} \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} \\ &= \partial_\mu \bar{\psi} \gamma_\mu - \frac{m_e c}{\hbar} \bar{\psi} - \frac{i c}{\hbar} \bar{\psi} A_\mu \partial_\mu = 0, \end{aligned} \quad (3.10)$$

As equações (3.9) e (3.10) podem ser tratadas independentes uma da outra, visto

que ψ e $\bar{\psi}$ contem partes reais e imaginárias. Assim, se tratarmos o sistema como tipo estacionário a solução tem a forma

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r})e^{-iEt/\hbar}, \quad (3.11)$$

onde $x_\mu = (\mathbf{r}, ict)$ são as coordenadas, com \mathbf{r} sendo o vetor posição e t o tempo, podemos então escrever a equação (3.9) como:

$$\mathcal{H}\psi = E\psi, \quad (3.12)$$

onde \mathcal{H} é a densidade Hamiltoniana do sistema. Podemos obter a densidade Hamiltoniana de campo médio dos léptons a partir da seguinte expressão

$$\mathcal{H}_l = \sum_{\Gamma_n} \frac{\partial \mathcal{L}_l}{\partial (\partial^\mu \Gamma_n)} \partial^\mu \Gamma_n - \mathcal{L}_l.$$

Na equação acima a somatória em Γ_n , corresponde somar todos os campos envolvidos (ψ e $\bar{\psi}$). A densidade Hamiltoniana para um sistema de elétrons é então escrita como:

$$\mathcal{H}_e = \alpha_i \pi_i + m_e c^2 \gamma_0 + ieA_0, \quad (3.13)$$

onde a seguinte definição é usada para π_i :

$$\pi_i = ip_i + eA_i, \quad p_i = -i\hbar\partial_i = -e\hat{p} = -i\hbar\nabla \quad (3.14)$$

Sendo a convenção de Bjorken e Drell (ITZYKSON, ZUBER, 2006) utilizada neste trabalho para as matrizes gama, definimo-las como sendo:

$$\alpha_i = i\gamma^0\gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.15)$$

onde σ_i , são as matrizes de Pauli com $i = 1, 2, 3$:

$$\sigma_1 = \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

$$\sigma_2 = \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

$$\sigma_3 = \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (3.18)$$

sendo

$$\beta = \gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

Uma vez conhecida a densidade Hamiltoniana, temos como objetivo escrever a Hamiltoniana em segunda quantização. Como estamos interessados em um sistema que está sob a ação de um campo magnético $\vec{\mathbf{B}}$ externo constante, onde não há variação no tempo e uniforme no espaço (SUH; MATHEWS, 2000), escolhamos arbitrariamente um calibre para A_μ , tal que $A_0 = 0$, escolhendo z como direção do campo (CANUTO; CHU, 1968; MELROSE; PARLE, 1983).

$$A_\mu(x) = \delta_{\mu 2} x B, \quad (3.20)$$

onde com a escolha acima temos, $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ e $\nabla \times \vec{A} = B\hat{z}$.

Substituindo as definições (3.14) e o gauge de calibre (3.20) na equação (3.13) temos a densidade Hamiltoniana dada por:

$$\mathcal{H}_e = \psi_e^\dagger(x) [\alpha_i \cdot (p_i c + e B x \hat{z}) + \beta m_e c^2] \psi_e(x) = \psi_e^\dagger(x) H_e^D \psi_e(x). \quad (3.21)$$

3.2 Solução de Dirac para elétrons

Precisamos determinar a base de estados das equações de Dirac, equações (3.9) e (3.10) sob a presença do campo magnético externo \mathbf{B} . Iremos discutir nesse capítulo as soluções da equação de Dirac para os elétrons com carga e . No entanto uma abordagem rápida será adotada para as soluções da equação de Dirac dos elétrons, sujeita a um campo magnético externo, a qual pode ser expandida para outros tipos de férmions, como léptons e quarks. Após a determinação da base de estados podemos construir nossa Hamiltoniana na segunda quantização.

A equação de Dirac pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} (i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H_e^D) \psi(x) &= 0, \\ H_e^D &= \alpha_i \cdot (p_i c + e B x \hat{z}) + \beta m_e c^2. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Visto que H_e^D só depende explicitamente da coordenada x devido ao calibre escolhido para o potencial vetor A_μ (3.20) é imediato que as soluções de energia positivas e negativas

tais:

$$\begin{aligned}\psi^+(\mathcal{Z}, t) &= u(x)e^{-iEt + i\varphi_1 + i\varphi_2 + i\varphi_3} \equiv \phi^{(+)}e^{-iEt}, \\ \psi^-(\mathcal{Z}, t) &= v(x)e^{iEt - i\varphi_1 - i\varphi_2 - i\varphi_3} \equiv \phi^{(-)}e^{iEt},\end{aligned}\quad (3.23)$$

sendo

$$\phi^{(\pm)} = f^{(\pm)}(x)e^{i\varphi_1 + i\varphi_2 + i\varphi_3}e^{-iEt},$$

onde (\pm) corresponde ao estado de energia positivo ou negativo e $f^{(\pm)}$ representa o quadri-spinor que é determinado substituindo ψ^{\pm} diretamente na equação de Dirac, equação (3.22). Para obtermos o quadri-spinor usaremos as propriedades das funções de onda de um oscilador harmônico unidimensional. A dedução detalhada pode ser encontrada no apêndice A.

Os quatro spinores $f^{(\pm)}(x)$, sendo f_1 e f_2 para os estados de energias positivas e f_3 e f_4 para os estados de energias negativas são:

$$E > 0$$

$$f_1 = G_1 \begin{bmatrix} (m_0c^2 + E_{1n})\phi_n \\ 0 \\ p_x c \phi_n \\ p_x(n+1)^{1/2}\phi_{n+1} \end{bmatrix}, \quad (3.24)$$

$$f_2 = G_2 \begin{bmatrix} 0 \\ (m_0c^2 + E_{2n})\phi_n \\ p_x n^{1/2}\phi_{n-1} \\ -p_x c \phi_n \end{bmatrix}, \quad (3.25)$$

$$E < 0$$

$$f_3 = G_3 \begin{bmatrix} (m_0c^2 - E_{3n})\phi_n \\ 0 \\ p_x c \phi_n \\ p_x(n+1)^{1/2}\phi_{n+1} \end{bmatrix}, \quad (3.26)$$

$$f_4 = G_4 \begin{bmatrix} 0 \\ (m_0c^2 - E_{4n})\phi_n \\ p_x n^{1/2}\phi_{n-1} \\ -p_x c \phi_n \end{bmatrix}, \quad (3.27)$$

onde

$$G_1^{-2} = 2E_{1a}(m_e c^2 + E_{1a}),$$

$$G_2^{-2} = 2E_{2a}(m_e c^2 + E_{2a}),$$

$$G_3^{-2} = 2E_{1a}(E_{1a} - m_e c^2),$$

$$G_4^{-2} = 2E_{2a}(E_{2a} - m_e c^2).$$

Temos que:

$$p_a^2 = 2 \frac{B}{B_c} m_e^2 c^4, \quad \text{com } B_c = \frac{m_e^2 c^3}{e \hbar} = 4.414 \times 10^{13} \text{ G}, \quad (3.28)$$

e as funções de onda do oscilador harmônico definidas por:

$$\phi_n(\vec{r}) = N_n H_n \frac{x-a}{\lambda} \exp\left(\frac{ip_y z}{\hbar}\right) \exp\left(iy \frac{x-2a}{2\lambda^2}\right) \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\lambda^2}\right), \quad (3.29)$$

com

$$\lambda^2 = \hbar c / e B, \quad N_n = i / (L x^{3/4} [\lambda 2^n n! \pi^{1/2}]), \quad (3.30)$$

sendo $H_n(x)$ os Polinômios de Hermite definidos como:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} (\partial/\partial x)^n e^{-x^2}, \quad (3.31)$$

normalizados tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) H_m(x) e^{-x^2} dx = \delta_{nm} 2^n n! \pi^{1/2}. \quad (3.32)$$

Temos então as energias do elétron sob ação do campo magnético externo dadas por:

$$\begin{aligned} E_{1a} &= E_{1a}(p_y, n) = \sqrt{p_y^2 c^2 + m_e^2 c^4 \left(1 + 2 \frac{B}{B_c} (n+1)\right)}, \\ E_{2a} &= E_{2a}(p_y, n) = \sqrt{p_y^2 c^2 + m_e^2 c^4 \left(1 + 2 \frac{B}{B_c} n\right)}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

onde n são os níveis de Landau e têm valores discretos $n = 0, 1, 2, \dots$ e $B_c = \frac{m_e^2 c^3}{e \hbar} = 4.414 \times 10^{13} \text{ G}$ é conhecido como o campo magnético crítico onde a energia do elétron devida a frequência angular de ciclotron é igual a sua massa de repouso, e o elétron tem energia cinética capaz de criar partículas. Como veremos ao longo da tese B_c é uma importante escala para os efeitos quânticos do campo magnético que quantizam os momentos p_x e p_y em valores discretos conhecidos como níveis de Landau. Se o campo magnético é menor que este valor estes efeitos quânticos com certeza podem ser desprezados. Como podemos observar, os estados de energia positivo ou negativo dependem de duas constantes independentes, G_1 e G_2 para o estado positivo e G_3 e G_4 para o estado negativo e

portanto são duplamente degenerados. No entanto, o estado fundamental ($n = 0$) é um estado não degenerado, pelo fato de termos como resultado um único estado. Ver para mais detalhes o Apêndice A. A degenerescência é associada a um rótulo de spin do elétron, então temos:

$$n = l + (-s + 1) \quad , l = 0, 1, 2, \dots \quad , s = \pm 1, \text{ para } e \text{ positiva}$$

$$n = l + (s + 1) \quad , l = 0, 1, 2, \dots \quad , s = \pm 1, \text{ para } e \text{ negativa}$$

O fator N_n na equação (3.29) é a constante de normalização para uma caixa de comprimento L , de modo que tratamos os elétrons no interior desta caixa de volume $V = L_1 L_2 L_3 = L^3$. A base de estados completa, onde explicitamos todos os números quânticos, será dada pelos estados:

$$\phi^{(s)} = \phi_{n,s,p_x,p_y}^{(s)}(\vec{x}) e^{-iEt}$$

Os spinores foram normalizados na forma usual, de tal maneira que é possível mostrar que:

$$\int d^3x \phi_{\nu}^{(s)}(\vec{x})^\dagger \phi_{\nu}^{(s)}(\vec{x}) = \delta_{\nu_1\nu_2} \delta_{\nu_3\nu_4} \delta_{\nu_5\nu_6} \delta_{\nu_7\nu_8}$$

$$\int d^3x \bar{\phi}_{\nu}^{(s)}(\vec{x}) \phi_{\nu}^{(s)}(\vec{x}) = \frac{m_e c^2}{E} \delta_{\nu_1\nu_2} \delta_{\nu_3\nu_4} \delta_{\nu_5\nu_6} \delta_{\nu_7\nu_8}$$

e também a relação de completudeza

$$\sum_{\nu} \phi_{\nu}^{(s)}(\vec{x})^\dagger \phi_{\nu}^{(s)}(\vec{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=\pm 1} \sum_{p_x} \sum_{p_y} \equiv |\phi_{n,s,p_x,p_y}^{(s)}(\vec{x})|^\dagger \phi_{n,s,p_x,p_y}^{(s)}(\vec{x}) = \delta(\vec{x} - \vec{x}'), \quad (3.34)$$

com $\bar{\phi} = \phi^\dagger \gamma_0$, sendo ϕ^\dagger o conjugado Hermitiano de ϕ .

3.3 Segunda quantização para os léptons

A quantização de campos na sua versão relativística chamada segunda quantização está na base do desenvolvimento da Eletrodinâmica Quântica e em geral, da Teoria Quântica de Campos (ITZYKSON; ZUBER, 2006). O formalismo dessa teoria é capaz de descrever novos processos de criação e aniquilação de partículas o que é ausente na Mecânica Quântica de Schrödinger. A segunda quantização dá uma nova interpretação para o que é o vácuo e descreve a dinâmica das interações entre partículas elementares. No método de segunda quantização, imponho aos campos fermiônicos e seus momentos generalizados as relações

de anti-comutação em tempos iguais do tipo:

$$\begin{aligned} \{\hat{\Psi}_{\eta\alpha}(\mathcal{I}, t), \hat{\Pi}_{\eta\beta}(\mathcal{I}', t)\} &= i\delta(\mathcal{I} - \mathcal{I}')\delta_{\alpha\beta}, \\ \{\hat{\Psi}_{\eta\alpha}(\mathcal{I}, t), \hat{\Psi}_{\eta\beta}(\mathcal{I}', t)\} &= \{\hat{\Pi}_{\eta\alpha}(\mathcal{I}, t), \hat{\Pi}_{\eta\beta}(\mathcal{I}', t)\} = 0. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Na equação acima o índice η rotula os léptons, os spinores e os momentos generalizados são representados pelos índices α e β , e temos ainda o operador momento $\hat{\Pi}$ definido como:

$$\hat{\Pi}(\mathcal{I}, t)_{\eta\alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}_{\eta}}{\partial \dot{\Psi}^{\alpha}} = i\Psi^{\beta}(\mathcal{I}, t)_{\eta\alpha}.$$

Fazendo uso da última relação na equação (3.35) e utilizando o complexo conjugado de $\hat{\Pi}$, obtemos:

$$\{\hat{\Psi}_{\eta\alpha}(\mathcal{I}, t), \hat{\Pi}_{\eta\beta}^{\dagger}(\mathcal{I}', t)\} = \delta(\mathcal{I} - \mathcal{I}')\delta_{\alpha\beta}. \quad (3.36)$$

Com as relações de anticomutação em mãos e com a base de estados de energias, podemos quantizar os campos encontrados nas densidades da Hamiltoniana dos léptons, equação (3.21). Para isso, utilizaremos o método de segunda quantização, onde:

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}_{\eta}(x) &= \sum_r (\hat{a}_{\eta r}^{\dagger} \phi_{\eta r}^{(+)}(x) e^{-iEt} + \hat{b}_{\eta r}^{\dagger} \phi_{\eta r}^{(-)}(x) e^{iEt}), \\ \hat{\Psi}_{\eta}^{\dagger}(x) &= \sum_r (\hat{a}_{\eta r} \phi_{\eta r}^{(+)\dagger}(x) e^{iEt} + \hat{b}_{\eta r} \phi_{\eta r}^{(-)\dagger}(x) e^{-iEt}). \end{aligned} \quad (3.37)$$

Substituindo (3.37) em (3.36), temos

$$\begin{aligned} \{\hat{\Psi}_{\eta}(x), \hat{\Psi}_{\eta}^{\dagger}(x')\} &= \sum_r \sum_{r'} (\phi_{\eta r}^{(+)}(x) \phi_{\eta r'}^{(+)\dagger}(x')^{\dagger} \{\hat{a}_{\eta r}^{\dagger}, \hat{a}_{\eta r'}^{\dagger}\} e^{-i(E_r - E_{r'})t} \\ &+ \phi_{\eta r}^{(+)}(x) \phi_{\eta r'}^{(-)\dagger}(x')^{\dagger} \{\hat{a}_{\eta r}^{\dagger}, \hat{b}_{\eta r'}^{\dagger}\} e^{-i(E_r + E_{r'})t} + \phi_{\eta r}^{(-)}(x) \phi_{\eta r'}^{(+)\dagger}(x')^{\dagger} \{\hat{b}_{\eta r}^{\dagger}, \hat{a}_{\eta r'}^{\dagger}\} e^{i(E_r + E_{r'})t} \\ &+ \phi_{\eta r}^{(-)}(x) \phi_{\eta r'}^{(-)\dagger}(x')^{\dagger} \{\hat{b}_{\eta r}^{\dagger}, \hat{b}_{\eta r'}^{\dagger}\} e^{i(E_r - E_{r'})t}). \end{aligned} \quad (3.38)$$

Com isso, restam-nos apenas duas relações de anti-comutação:

$$\begin{aligned} \{\hat{a}_{\eta r}^{\dagger}, \hat{a}_{\eta r'}^{\dagger}\} &= \{\hat{b}_{\eta r}^{\dagger}, \hat{b}_{\eta r'}^{\dagger}\} = \delta_{rr'}, \\ \{\hat{a}_{\eta r}^{\dagger}, \hat{a}_{\eta r'}^{\dagger}\} &= \{\hat{b}_{\eta r}^{\dagger}, \hat{b}_{\eta r'}^{\dagger}\} = 0. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Identificamos, assim, os operadores $\hat{a}_{\eta r}^{\dagger}$ e $\hat{a}_{\eta r}^{\dagger}$ como os operadores de criação e destruição dos léptons, bem como os operadores $\hat{b}_{\eta r}^{\dagger}$ e $\hat{b}_{\eta r}^{\dagger}$ como os operadores de criação e destruição de antiléptons. Atingimos, então, o formalismo apropriado da segunda quantização e da teoria quântica de campos relativístico. Substituindo as relações dos operadores criação

e aniquilação na equação (3.38), chegamos a:

$$\{\hat{\Psi}_\eta(\mathcal{F}, t), \hat{\Psi}_\eta^\dagger(\mathcal{F}', t)\} = \sum_r (\phi_{\nu r}^{(+)}(\mathcal{F})\phi_{\nu r}^{(+)\dagger}(\mathcal{F}') + \phi_{\nu r}^{(-)}(\mathcal{F})\phi_{\nu r}^{(-)\dagger}(\mathcal{F}')) = \delta(\mathcal{F} - \mathcal{F}'),$$

onde $\eta = l$, onde l representa os léptons.

A soma nos rótulos dos estados, r , é semelhante às realizadas na equação (3.34), com as energias satisfazendo a relação (DAS; MUKHOPADHYAY, 2012; DAS; MUKHOPADHYAY, 2013):

$$H_l^D \phi_{\nu r}^{(\pm)} = \pm E_\nu^l \phi_{\nu r}^{(\pm)} \quad , \quad E_\nu^l = E_\nu^l(p_\nu, n) = \sqrt{p_\nu^2 c^2 + m_\nu^2 c^4 \left(1 + 2 \frac{B}{B_c} n\right)}. \quad (3.40)$$

Podemos obter finalmente a Hamiltoniana dos léptons em segunda quantização, a partir das equações (3.21), (3.37) e (3.40):

$$\begin{aligned} H_l &= \int \mathcal{H} d^3x = \int \psi_l^\dagger(x) [\hat{\alpha} \cdot (\hat{p}c - eBx\hat{z}) + \beta m_\nu c^2] \psi_l(x) d^3x = \int \psi_l^\dagger(x) H_l^D \psi_l(x) d^3x \\ &= \int \sum_r \left(\hat{a}_\nu^{\dagger r} \phi_{\nu r}^{(+)}(\mathcal{F})^\dagger e^{iE_\nu^l t} + \hat{b}_\nu^{\dagger r} \phi_{\nu r}^{(-)}(\mathcal{F})^\dagger e^{-iE_\nu^l t} \right) H_l^D \sum_r \left(\hat{a}_\nu^r \phi_{\nu r}^{(+)}(\mathcal{F}) e^{-iE_\nu^l t} \right. \\ &\quad \left. + \hat{b}_\nu^r \phi_{\nu r}^{(-)}(\mathcal{F}) e^{iE_\nu^l t} \right) d^3x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_l &= \sum_r \left(E_\nu^l \hat{a}_\nu^{\dagger r} \hat{a}_\nu^r \int \phi_{\nu r}^{(+)}(\mathcal{F})^\dagger \phi_{\nu r}^{(+)}(\mathcal{F}) e^{i(E_\nu^l - E_\nu^l)t} d^3x \right. \\ &\quad - E_\nu^l \hat{a}_\nu^{\dagger r} \hat{b}_\nu^{\dagger r} \int \phi_{\nu r}^{(+)}(\mathcal{F})^\dagger \phi_{\nu r}^{(-)}(\mathcal{F}) e^{i(E_\nu^l + E_\nu^l)t} d^3x \\ &\quad + E_\nu^l \hat{b}_\nu^{\dagger r} \hat{a}_\nu^r \int d^3x \phi_{\nu r}^{(-)}(\mathcal{F})^\dagger \phi_{\nu r}^{(+)}(\mathcal{F}) e^{-i(E_\nu^l - E_\nu^l)t} \\ &\quad \left. + E_\nu^l \hat{b}_\nu^{\dagger r} \hat{b}_\nu^{\dagger r} \int d^3x \phi_{\nu r}^{(-)}(\mathcal{F})^\dagger \phi_{\nu r}^{(-)}(\mathcal{F}) e^{-i(E_\nu^l + E_\nu^l)t} \right). \quad (3.41) \end{aligned}$$

Sabemos que a partir da normalização utilizada para o quadri-spinor (CANUTO; CHIU, 1968) e as relações de anti-comutação para os operadores criação e aniquilação (ITZYKSON; ZUBER, 2006) que a equação acima resulta em:

$$H_l = \sum_r E_\nu^l (\hat{a}_\nu^{\dagger r} \hat{a}_\nu^r - \hat{b}_\nu^{\dagger r} \hat{b}_\nu^{\dagger r}) = \sum_r E_\nu^l (\hat{a}_\nu^{\dagger r} \hat{a}_\nu^r + \hat{b}_\nu^{\dagger r} \hat{b}_\nu^{\dagger r} - 1).$$

Podemos ainda utilizar a segunda quantização para determinarmos outro operador. Fazendo um desenvolvimento semelhante ao realizado para a Hamiltoniana, o operador

número de léptons é dado por:

$$\hat{N}_l = \int d^3x \psi_l^\dagger(x) \psi_l(x) = \sum_r (\hat{a}_r^\dagger \hat{a}_r + \hat{b}_r^\dagger \hat{b}_r) = \sum_r (\hat{a}_r^\dagger \hat{a}_r - \hat{b}_r^\dagger \hat{b}_r + 1). \quad (3.42)$$

Determinada a Hamiltoniana dos léptons, podemos escrever a Hamiltoniana para um sistema de elétrons explicitamente como:

$$H_e = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=\pm} \sum_{p_x} \sum_{p_y} \sqrt{p_x^2 c^2 + m_e^2 c^4 \left(1 + 2 \frac{B}{B_c} n\right)} \left(\hat{a}_{nmp_x p_y}^\dagger \hat{a}_{nmp_x p_y} + \hat{b}_{nmp_x p_y}^\dagger \hat{b}_{nmp_x p_y} - 1 \right). \quad (3.43)$$

No entanto, o termo referente ao campo magnético estará presente na Hamiltoniana total do sistema para o sistema composto por elétrons (STRICKLAND *et al.*, 2012), temos então:

$$H = H_e + \frac{B^2}{8\pi}$$

assim,

$$H = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=\pm} \sum_{p_x} \sum_{p_y} \sqrt{p_x^2 c^2 + m_e^2 c^4 \left(1 + 2 \frac{B}{B_c} n\right)} \left(\hat{a}_{nmp_x p_y}^\dagger \hat{a}_{nmp_x p_y} + \hat{b}_{nmp_x p_y}^\dagger \hat{b}_{nmp_x p_y} - 1 \right) + \frac{B^2}{8\pi}, \quad (3.44)$$

onde usamos $\frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial A}{\partial x} = \frac{B^2}{4\pi}$ devido a escolha de calibre (3.20).

A técnica utilizada para quantizar a Hamiltoniana dos léptons na presença de um campo magnético externo poderia ser utilizada sem problema algum para uma Hamiltoniana com ausência de campos magnéticos (ITZYKSON; ZUBER, 2006), bastando apenas conhecer o espectro e a base de estado como foi feito neste trabalho. Neste caso, a solução da partícula livre da equação de Dirac, é descrito pela campo:

$$\hat{\Psi}_s = \sum_{p,s} \left(\hat{a}_{p,s}^\dagger u_s(p,s) e^{-iE^s t + i\vec{p}\cdot\vec{r}} + \hat{b}_{p,s}^\dagger v_s(p,s) e^{iE^s t - i\vec{p}\cdot\vec{r}} \right)$$

onde $u_s(p,s)$ e $v_s(p,s)$ são os quadri-spinores, correspondentes aos estados de energia positiva e negativa e $E^s = \sqrt{p^2 c^2 + m_e^2 c^4}$, sendo s o rótulo de spin. Todas equações vistas nesta seção foram obtidas para um campo magnético $B \neq 0$. Estas, podem ser obtida por correspondência para um sistema onde o campo encontra-se ausente, apenas considerando $B = 0$.

3.4 Propriedades Termodinâmicas

A EOS relaciona matematicamente as grandezas termodinâmicas de estado e as funções de estado de um sistema termodinâmico, ou seja, uma EOS é uma equação termodinâmica descrevendo o estado da matéria sob um dado conjunto de condições físicas de pressão, volume e temperatura. Como o comportamento do modelo é determinado pela EOS, que é determinada a partir da função de partição, estudaremos as grandezas termodinâmicas na aproximação de campo médio como vem sendo feito para os léptons. A aproximação de campo médio tem sua validade aumentada quanto maior for a densidade do sistema, justificando assim sua aplicação para o estudo da matéria no interior das estrelas anãs brancas sob ação de campo magnético que são objetos com altas densidades (SHAPIRO; TEUKOLSKY, 2008). Nessas densidades, as derivadas dos campos apresentam pequenas flutuações em torno do valor médio em comparação com os valores esperados dos campos (ITZYKSON; ZUBER, 2006).

Para isso é necessário a determinação do potencial termodinâmico grande-canônico a partir da função de partição grande-canônica. Temos então que a função de partição e o potencial grande canônico é dada por (CHATTERJEE *et al.*, 2011):

$$Z = \text{Tr} \left[e^{-\beta(H_0 - \sum_i \mu_i N_i)} \right], \quad \Omega = -\frac{1}{\beta} \ln Z, \quad (3.45)$$

onde $\beta = 1/k_B T$, sendo k_B a constante de Boltzmann e T a temperatura. As grandezas termodinâmicas que estão associadas ao potencial grande-canônico Ω , podem ser vistas abaixo (ITZYKSON; ZUBER, 2006):

$$\begin{aligned} \Omega = \Omega(T, V, \mu_i) &= E - TS - \sum_i \mu_i \bar{N}_i, \\ \Omega(T, V, \mu_i) &= -PV, \quad E = \Omega = \Omega(T, V, \mu_i) + \sum_i \mu_i \bar{N}_i + TS, \end{aligned} \quad (3.46)$$

sendo \bar{N}_i o número médio de partículas (léptons) obtido pela expressão:

$$\bar{N}_i = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln Z}{\partial \mu_i} = -\frac{\partial \Omega}{\partial \mu_i}, \quad (3.47)$$

A partir da Hamiltoniana calculada na seção anterior, substituindo a equação (3.44), em (3.45), temos:

$$Z = \text{Tr} \left[e^{-\beta(H_0 - \sum_i \mu_i N_i)} \right] = e^{-\beta B^2/8\pi} \text{Tr} \left[e^{-\beta(H_0 - \sum_i \mu_i N_i)} \right], \quad (3.48)$$

onde a Hamiltoniana H_0 do lado direito da igualdade é determinada pela equação (3.44) a menos do termo $B^2/8\pi$. Usando a representação de números de ocupação, onde a base

de estados de partículas independente da função do número de ocupação de léptons n_{ℓ} e de anti-léptons \bar{n}_{ℓ} , no estado r é (ITZYKSON; ZUBER, 2006):

$$|\bar{\alpha}\rangle = |n_{1r}, n_{2r}, \dots; \bar{n}_{1r}, \bar{n}_{2r}, \dots\rangle,$$

com $n_{\ell r}, \bar{n}_{\ell r} = 0, 1, 2, \dots, \infty$ e $r = 1, 2, 3, \dots, \infty$, o conjunto de estados de partícula independente dos léptons é ordenado, pela regra:

$$\{n_{\ell r}\} = \{n_{1 \rightarrow \infty, r}\} = \{n_{1r}, n_{2r}, n_{3r}, \dots, n_{\infty r}\},$$

onde o rótulo r representa os números quânticos do quadri-spinor de Dirac. Novamente a partir de um conjunto de regras, com o operador número em segunda quantização e a expressão da Hamiltoniana determinada na seção anterior, calculamos o traço que é encontrado na função de partição da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left[e^{-\beta(H_0 - \sum_r n_r S_r)} \right] &= \sum_{\bar{\alpha}} \langle \bar{\alpha} | e^{-\beta(H_0 - \sum_r n_r S_r)} | \bar{\alpha} \rangle \\ &= e^{\beta \sum_{\ell, r} E_{\ell}^r} e^{-\beta \sum_{\ell, r} n_{\ell r} (E_{\ell}^r - \mu_{\ell r})} e^{-\beta \sum_{\ell, r} \bar{n}_{\ell r} (E_{\ell}^r + \mu_{\ell r})}. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Os números de ocupação dos férmions só podem receber valores 0 ou 1. Podemos, então, escrever a função de partição Eq. (3.48), a partir de produtos:

$$Z = e^{\beta \sum_{\ell, r} E_{\ell}^r} \prod_{\ell, r} \left(1 + e^{-\beta(E_{\ell}^r - \mu_{\ell r})} \right) \prod_{\ell, r} \left(1 + e^{-\beta(E_{\ell}^r + \mu_{\ell r})} \right). \quad (3.50)$$

Feito isso, podemos obter o potencial grande-canônico a partir da função de partição, e temos então:

$$\Omega = -\frac{1}{\beta} \ln Z = -\sum_{\ell, r} E_{\ell}^r - \sum_{\ell, r} \ln \left(1 + e^{-\beta(E_{\ell}^r - \mu_{\ell r})} \right) - \sum_{\ell, r} \ln \left(1 + e^{-\beta(E_{\ell}^r + \mu_{\ell r})} \right).$$

O auto-valores de energias dos léptons não dependem diretamente da contribuição do número quântico spin s , e como já mencionado para cada nível de Landau n , temos estados degenerados, ou seja, dois estados com o mesmo valor de energia, exceto para quando $n = 0$. Quando o estado não é degenerado podemos substituir a soma dos rótulos n e s por uma soma em n multiplicada pelo fator:

$$g_n = 2 - \delta_{n0}$$

Se o nível do estado fundamental é ocupado $n = 0$, temos $g_n = 1$, apenas um estado de energia com valor único. No entanto, quando $n \geq 1$ teremos $g_n = 2$, o que implica estados duplamente degenerados.

Para realizar a soma dos momentos, lembrando que o sistema está localizado em uma caixa de comprimento L , e considerando as condições de contorno periódicas, uma vez que os níveis de energia não dependem de p_x , podemos substituir \sum_x por:

$$\sum_x = \sum_{n \rightarrow p_x, p_x} \rightarrow V \sum_n g_n \frac{2eB}{hc} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_x}{(2\pi)^2}$$

Assim, obtemos o potencial grande-canônico para um sistema composto por elétrons, a partir da última relação e da equação (3.51):

$$\begin{aligned} \Omega_e &= \frac{\Omega}{V} = - \sum_n g_n \frac{2eB}{hc} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_x}{(2\pi)^2} \sqrt{p_x^2 c^2 + m_e^2 c^4 \left(1 + 2 \frac{B}{B_c} n\right)} \\ &\quad - \frac{1}{\beta} \sum_n g_n \frac{2eB}{hc} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_x}{(2\pi)^2} \left[\ln(1 + e^{-\beta(E^* - \mu_e)}) + \ln(1 + e^{-\beta(E^* + \mu_e)}) \right]. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Definiremos aqui a seguinte relação:

$$\omega_e(0, B) = \sum_n g_n \frac{2eB}{hc} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_x}{(2\pi)^2} \sqrt{p_x^2 c^2 + m_e^2 c^4 \left(1 + 2 \frac{B}{B_c} n\right)}, \quad (3.52)$$

como sendo a contribuição dos elétrons ao potencial grande-canônico com $\mu_e = 0$ e $B \neq 0$. Essa contribuição é a energia do vácuo, ou seja, o valor esperado da Hamiltoniana dos elétrons no estado do vácuo (PARET *et al.*, 2015a; PARET *et al.*, 2015b):

$$\omega_e(0, B) = \langle 0 | H_e | 0 \rangle.$$

Essas contribuições são divergentes, e não mostraremos aqui como regularizar essa divergência. No entanto, esta regularização pode ser vista em qualquer livro texto de teoria quântica de campos (ITZYKSON; ZUBER, 2006).

A equação de estado densidade de partículas é o único observável nesta seção ainda não obtida. Seguindo a definição do número médio de partículas, podemos determinar a densidade de partículas como:

$$\rho_n = \frac{N_n}{V} = - \frac{1}{V} \frac{\partial \Omega}{\partial \mu_n}. \quad (3.53)$$

Como a contribuição ω_e é para $\mu_e = 0$, temos então que a densidade de léptons (elétrons) é dada por

$$\rho_e = \sum_n g_n \frac{2eB}{hc} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_x}{(2\pi)^2} \left(\frac{1}{1 + e^{\beta(E^* - \mu_e)}} - \frac{1}{1 + e^{\beta(E^* + \mu_e)}} \right).$$

onde $f(x) = \frac{1}{1 + e^{x/\mu}}$ é a função de distribuição de Fermi-Dirac (LAI; SHAPIRO, 1991; BALBERG; SHAPIRO, 2000).

3.5 Equações de Estado

Nós agora analisaremos a EOS para elétrons relativísticos sob um forte campo magnético. Muitos trabalhos tem surgido nos últimos anos tratando anãs brancas em intensos campos magnéticos, ver (CHATTERJEE *et al.*, 2011; DAS; MUKHOPADHYAY, 2012; DAS; MUKHOPADHYAY, 2013; DAS *et al.*, 2013; DAS; MUKHOPADHYAY, 2014a; DAS; MUKHOPADHYAY, 2014b; COELHO *et al.*, 2014; PARET *et al.*, 2015a; DAS; MUKHOPADHYAY, 2015; PARET *et al.*, 2015b), olhando para observáveis como pressão isotrópica e anisotrópica e relação massa raio da estrela. Discutimos na seção anterior as propriedades termodinâmicas de um gás de elétrons na presença de B, usado para descrever a matéria no interior das estrelas anãs brancas. A partir do potencial grande-canônico encontrado, vamos determinar a EOS para um sistema que tem sua temperatura nula, $T = 0$. Anãs brancas magnéticas são altamente degeneradas no limite ($\mu \gg T$), sendo nesse limite os efeitos térmicos negligenciáveis (SALPETER, 1961; LAI; SHAPIRO, 1991; BALBERG; SHAPIRO, 2000).

O potencial grande-canônico para um gás de elétrons conforme (3.51) é dado por:

$$\begin{aligned} \Omega_e &= \frac{\Omega}{V} = - \sum_n g_n \frac{2eB}{hc} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_x}{(2\pi)^2} \sqrt{p_x^2 c^2 + m_e^2 c^4} \left(1 + 2 \frac{B}{B_c} n\right) \\ &\quad - \frac{1}{\beta} \sum_n g_n \frac{2eB}{hc} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_x}{(2\pi)^2} \left[\ln(1 + e^{-\beta(E^* - \mu)}) + \ln(1 + e^{-\beta(E^* + \mu)}) \right]. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Os dois últimos termos do potencial grande-canônico acima dependem da temperatura. Vamos então aplicar o limite de $T = 0$ para ambos, devido querermos tratar o sistema no limite de temperatura nula.

$$\lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{\beta} \ln(1 + e^{-\beta(E^* - \mu)}) = (\mu - E)\theta(\mu - E) \quad , \quad \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{\beta} \ln(1 + e^{-\beta(E^* + \mu)}) = 0,$$

temos então que:

$$\begin{aligned} &\lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{\beta} \sum_n g_n \frac{2eB}{hc} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_x}{(2\pi)^2} \left[\ln(1 + e^{-\beta(E^* - \mu)}) + \ln(1 + e^{-\beta(E^* + \mu)}) \right] \\ &\rightarrow \sum_n g_n \frac{2eB}{hc} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_x}{(2\pi)^2} (\mu - E)\theta(\mu - E) = \sum_n g_n \frac{2eB}{hc} \int_0^{\infty} \frac{dp_x}{(2\pi)^2} (\mu - E)\theta(\mu - E). \end{aligned}$$

A presença da função θ na integral acima, faz com que a integral só tenha valor diferente

de zero, quando a energia satisfizer a seguinte relação (CANUTO, CHU, 1968):

$$0 \leq E \leq \mu_e \Rightarrow 0 \leq \sqrt{p_x^2 c^2 + m_e^2 c^4 \left(1 + 2 \frac{B}{B_c} n\right)} \leq \mu_e.$$

Podemos observar facilmente da relação acima, que a integração no momento p_x é limitada pela desigualdade:

$$0 \leq p_x^2 c^2 \leq \mu_e^2 - m_e^2 c^4 \left(1 + 2 \frac{B}{B_c} n\right),$$

o que nos resulta:

$$\int_0^\infty dp_x (\mu - E) \theta(\mu - E) = \int_0^{\sqrt{\mu_e^2 - m_e^2 c^4 \left(1 + 2 \frac{B}{B_c} n\right)}} \left(\mu_e - \sqrt{p_x^2 c^2 + m_e^2 c^4 \left(1 + 2 \frac{B}{B_c} n\right)} \right) dp_x.$$

Podemos resolver analiticamente a integral acima, fazendo uso da relação:

$$\kappa_e(n) = \sqrt{m_e^2 c^4 \left(1 + 2 \frac{B}{B_c} n\right)},$$

e usando a seguinte integral tabelada:

$$\int \sqrt{y^2 + a^2} dy = \frac{1}{2} [y \sqrt{y^2 + a^2} + a^2 \ln(y + \sqrt{y^2 + a^2})],$$

obtemos o seguinte resultado:

$$\int_0^{\sqrt{\mu_e^2 - \kappa_e(n)^2}} \left(\mu_e - \sqrt{p_x^2 c^2 + \kappa_e(n)^2} \right) dp_x = \frac{1}{2} \left[\mu_e \sqrt{\mu_e^2 - \kappa_e(n)^2} + \kappa_e(n)^2 \ln \frac{\mu_e - \sqrt{\mu_e^2 - \kappa_e(n)^2}}{\kappa_e(n)} \right]. \quad (3.55)$$

Reescrevendo o potencial grande-canônico para um gás de elétrons em $T = 0$, usando as equações (3.52) e (3.55), temos:

$$\begin{aligned} \Omega_e &= \frac{\Omega}{V} = \hat{\omega}_e(0, B) \\ &- \sum_n g_n \frac{eB}{(2\pi)^2 \hbar c} \left[\mu_e \sqrt{\mu_e^2 - \kappa_e(n)^2} + \kappa_e(n)^2 \ln \frac{\mu_e - \sqrt{\mu_e^2 - \kappa_e(n)^2}}{\kappa_e(n)} \right]. \end{aligned} \quad (3.56)$$

O termo $\hat{\omega}_e(0, B)$ é a contribuição do vácuo. A renormalização desse termo, uma vez que ele é divergente, pode ser visto em (BERESTETSKII *et al.*, 1980). Vamos negligenciá-lo na determinação das EOS para nosso sistema, devido ao fato de estarmos interessados apenas na região de campos magnéticos onde $\hbar c B \leq \mu_e^2$, região onde a estrela encontra-se estável e a contribuição estática, terceiro termo do potencial grande-canônico acima é

mais importante que a contribuição do vácuo (PARET *et al.*, 2015a; PARET *et al.*, 2015b). A equação resultante é agora:

$$\Omega_e = - \sum_n g_n \frac{eB}{(2\pi)^2 \hbar c} \left[\mu_e \sqrt{\mu_e^2 - s_n(n)^2} + s_n(n)^2 \ln \frac{\mu_e + \sqrt{\mu_e^2 - s_n(n)^2}}{s_n(n)} \right]. \quad (3.57)$$

A energia de Fermi E_F do elétron para um nível de Landau n , é dada por:

$$E_F = \mu_e = \sqrt{p_F^2 c^2 + m_e^2 c^4} \left(1 + 2 \frac{B}{B_c} n \right). \quad (3.58)$$

Podemos reescrever agora a densidade numérica de partícula (elétrons) como:

$$\rho_e = - \left(\frac{\partial \Omega_e}{\partial \mu_e} \right) = \sum_n g_n \frac{2eB}{\hbar c} \int_0^\infty dp_z \theta(\mu_e - E^n) = \sum_{n=0}^{n_{\max}} g_n \frac{2eB}{\hbar c} p_F(n), \quad (3.59)$$

onde $p_F = \sqrt{\mu_e^2 - s_n(n)^2}$. O valor máximo de n_{\max} na somatória da equação acima é derivada da condição que $p_F(n)^2 \geq 0$, o que implica em $E_F^2 \geq m_e^2 c^4 + 2 \frac{B}{B_c} m_e^2 c^4 n$. Desta forma obtemos:

$$n_{\max} = I \left[\frac{E_F^2 - m_e^2 c^4}{2 \frac{B}{B_c} m_e^2 c^4} \right], \quad (3.60)$$

sendo $I[x]$ correspondente ao maior inteiro menor ou igual a x . Ainda das propriedades termodinâmicas temos que a densidade de energia é dada para $T = 0$ a partir de:

$$\mathcal{E}_e = \Omega_e + \mu_e N_e + \frac{B^2}{8\pi}$$

onde o termo $\frac{B^2}{8\pi}$ é a contribuição do campo magnético na direção z no tensor momento-energia. Resolvendo a relação substituindo as equações (3.46), (3.47) e (3.56) temos:

$$\mathcal{E}_e = \sum_{n=0}^{n_{\max}} \frac{eB}{(2\pi)^2 \hbar c} \left[\mu_e \sqrt{\mu_e^2 - s_n(n)^2} + s_n(n)^2 \ln \frac{\mu_e + \sqrt{\mu_e^2 - s_n(n)^2}}{s_n(n)} \right] + \frac{B^2}{8\pi}. \quad (3.61)$$

A expressão para a pressão paralela ao campo magnético (escolhido na direção z) é então dada por:

$$P_{\parallel} = -\Omega_e - \frac{B^2}{8\pi}$$

assim a pressão paralela é determinada por:

$$P_{\parallel} = \sum_{n=0}^{n_{\max}} g_n \frac{eB}{(2\pi)^2 \hbar c} \left[\mu_e \sqrt{\mu_e^2 - s_n(n)^2} - s_n(n)^2 \ln \frac{\mu_e + \sqrt{\mu_e^2 - s_n(n)^2}}{s_n(n)} \right] - \frac{B^2}{8\pi}. \quad (3.62)$$

Como desejamos mostrar também a anisotropia do sistema, precisamos também determinar a pressão perpendicular P_{\perp} (PARET *et al.*, 2015a; DEXHEIMER *et al.*, 2014; PARET *et al.*, 2015b). Devido ao fato da anisotropia acontecer quando a pressão perpendicular P_{\perp} (anisotrópica) for diferente da pressão paralela P_{\parallel} (isotrópica), precisamos determinar a magnetização do sistema de elétrons sob um campo magnético. A magnetização é expressa por (PARET *et al.*, 2015b), e tem a direção perpendicular ao campo:

$$\mathcal{M}_e = - \left(\frac{\partial \Omega}{\partial B} \right).$$

Derivando o potencial grande-canônico em relação ao campo magnético, temos como resultado:

$$\mathcal{M}_e = \frac{em_e}{4\pi^2} \left(\sum_{n=0}^{n_{max}} g_n \left[\mu_e \sqrt{\mu_e^2 - s_e(n)^2} - [s_e(n)^2 + 2s_e(n)C_e] \ln \frac{\mu_e + \sqrt{\mu_e^2 - s_e(n)^2}}{s_e(n)} \right] \right) \quad (3.63)$$

onde a constante $C_e = \frac{\beta m_e c^2}{\sqrt{2} \xi_{e+1}}$.

Portanto podemos determinar agora a pressão perpendicular, usando a relação:

$$\begin{aligned} P_{\perp} &= -\Omega_e - B\mathcal{M}_e + \frac{B^2}{8\pi} \\ &= P_{\parallel} - B\mathcal{M}_e + \frac{B^2}{8\pi}. \end{aligned} \quad (3.64)$$

Substituindo as equações (3.57) e (3.63) na relação (3.65), obtemos:

$$\begin{aligned} P_{\perp} &= \sum_{n=0}^{n_{max}} g_n \frac{eB}{(2\pi)^2 \hbar c} \left[\mu_e \sqrt{\mu_e^2 - s_e(n)^2} - s_e(n)^2 \ln \frac{\mu_e + \sqrt{\mu_e^2 - s_e(n)^2}}{s_e(n)} \right] \\ &\quad - \frac{em_e}{4\pi^2} \left(\sum_{n=0}^{n_{max}} g_n \left[\mu_e \sqrt{\mu_e^2 - s_e(n)^2} - [s_e(n)^2 + 2s_e(n)C_e] \ln \frac{\mu_e + \sqrt{\mu_e^2 - s_e(n)^2}}{s_e(n)} \right] \right) \\ &\quad + \frac{B^2}{8\pi}. \end{aligned} \quad (3.65)$$

3.6 Resultados

Nesta sessão apresentamos as discussões para um gás de elétrons sob o efeito de um campo magnético \vec{B} com temperatura $T = 0$ para uma matéria constituída com $A/Z = 2$. Nós mostramos o impacto da existência desse campo nas equações de estado, afim de compararmos com um gás não magnetizado.

Na Fig. (3.1) notamos que intensos campos magnéticos tem impacto sobre a EOS

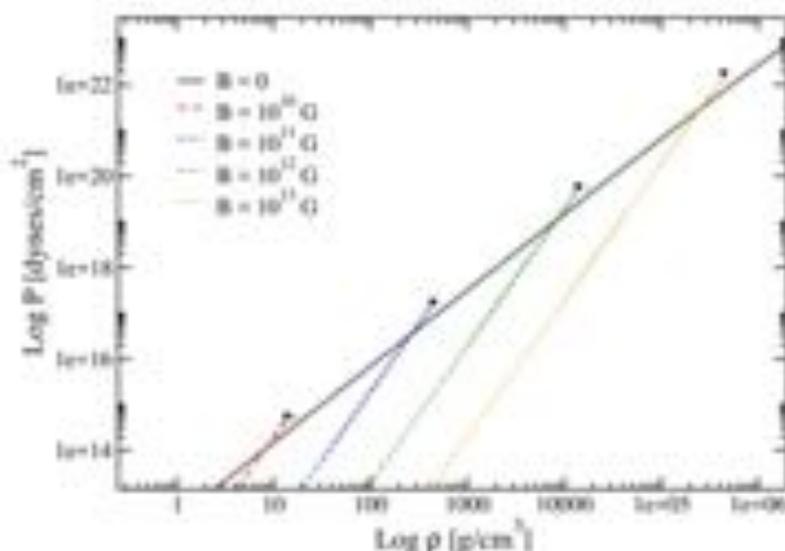


FIGURA 3.1 - Pressão paralela em função da densidade de massa ρ para um gás não magnetizado (linha preta) e para um gás magnetizado com diferentes campos magnéticos: $B = 10^{10}$ G (linha pontilhada vermelha), $B = 10^{11}$ G (linha pontilhada azul), $B = 10^{12}$ G, (linha pontilhada verde), $B = 10^{13}$ G (linha pontilhada laranja). Os quadrados nas pontas do pico de cada curva, indica o ponto no qual o nível mais fundamental $n = 0$ é totalmente preenchido pelos elétrons.

tornando-a mais densa. Em particular quando temos apenas o estado fundamental $n = 0$ totalmente preenchido, a EOS tem como característica um endurecimento em relação ao gás não magnetizado $B = 0$. Podemos observar que para densidade de massa superior à $\rho = 10^5$ g/cm³, os efeitos do campo magnético para valores inferiores à $B = 10^{11}$ G tornam-se cada vez menos importante à medida que os níveis de Landau vão sendo preenchidos, com a EOS correspondendo perfeitamente com o obtido na ausência de campos magnéticos.

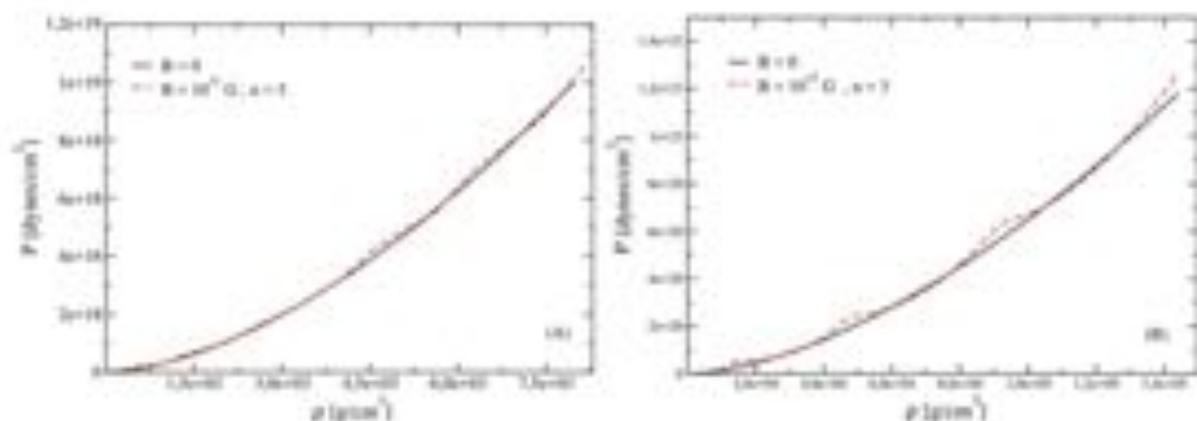


FIGURA 3.2 - Pressão paralela versus densidade de massa para um gás de elétrons com $B = 10^{11}$ G e $B = 0$ (A) e para um gás de elétrons com $B = 10^{12}$ G e $B = 0$ (B), com os elétrons ocupando até o quinto $n = 5$ e terceiro $n = 3$ níveis de Landau respectivamente.

Na Fig. (3.2) (A), apresentamos a pressão paralela como uma função de densidade

de massa. Podemos observar que para um campo magnético de magnitude $B = 10^{13}$ G (linha pontilhada vermelha), a EOS para um gás de elétrons magnetizado comporta-se semelhantemente com a obtida na ausência de campo magnético $B = 0$ (linha preta), sendo neste caso os efeitos causados pelos níveis de Landau não significativos. Na Fig. (3.2) (B), temos a pressão paralela versus a densidade de massa para um campo magnético de $B = 10^{12}$ G (linha pontilhada vermelha), onde apenas os 3 primeiros níveis de Landau são ocupados. A equação de estado para um gás de elétrons comporta-se ainda semelhante a uma não magnética (linha preta), onde os efeitos dos níveis de Landau continuam não sendo tão significativos. No entanto, há um aumento nos picos, pontos que representam onde os elétrons transitam de um nível de Landau para outro.

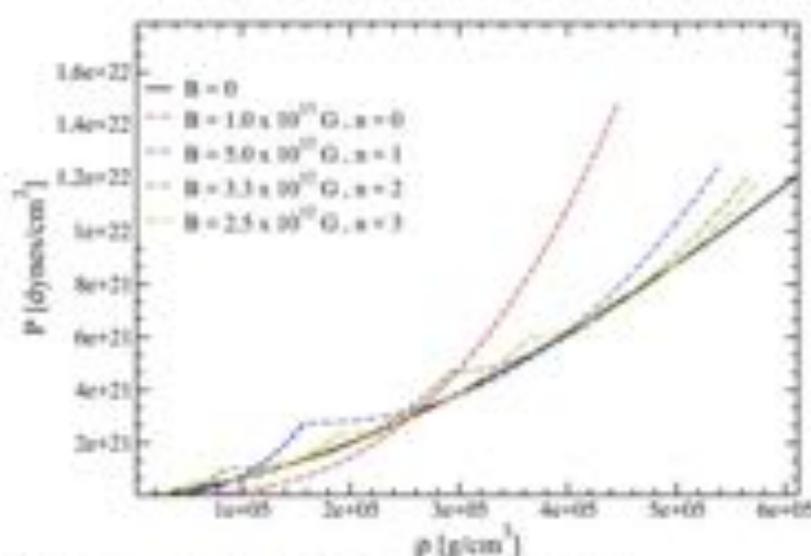


FIGURA 3.3 - Pressão paralela em função da densidade de massa para uma energia de Fermi fixa $E_F = 1,205 m_e c^2$ para valores de campos magnéticos até $B = 1,0 \times 10^{13}$ G. A linha sólida preta representa um gás de elétrons na ausência de campo magnético $B = 0$.

O gráfico (3.3) mostra o efeito causado pelos níveis de Landau na equação de estado com campos magnéticos até $1,0 \times 10^{13}$ G. Como podemos ver para campos desta magnitude a EOS torna-se bastante dura quando temos apenas o estado de menor energia (estado fundamental) ocupado. A medida que aumentamos o número do nível de Landau ocupado a equação de estado aproxima-se do caso não magnético, como podemos ver na figura (3.2). Na Fig. (3.3) temos a pressão paralela versus a densidade de massa até uma energia de Fermi de $E_F = 1,205 m_e c^2$. As linhas pontilhadas correspondem à $B = 1,0 \times 10^{13}$ G (vermelho), $B = 5,0 \times 10^{12}$ G (azul), $B = 3,3 \times 10^{12}$ G (verde) e $B = 2,5 \times 10^{12}$ G (laranja), e cada uma dessas curvas representa uma EOS com um determinado nível de Landau ocupado, por exemplo: $n = 0$ com $B = 1,0 \times 10^{13}$ G, $n = 1$ com $B = 5,0 \times 10^{12}$ G, $n = 2$ com $B = 3,3 \times 10^{12}$ G e $n = 3$ para $B = 2,5 \times 10^{12}$ G. A linha sólida preta é uma EOS para um gás de elétrons sem campo magnético.

A Fig. (3.4) mostra as pressões paralelas e transversas como função da densidade

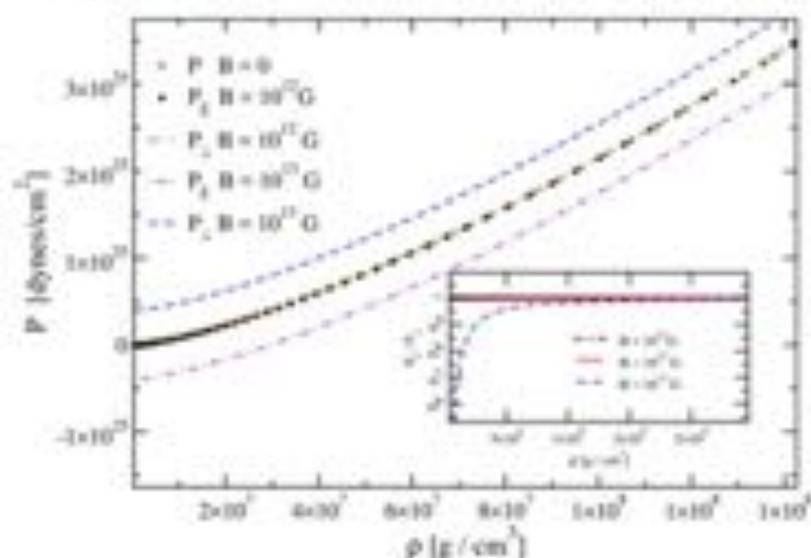


FIGURA 3.4 - Relação da pressão como função de densidade de massa. As círculos preto e as linhas tracejadas verde representam as pressões paralela e perpendicular respectivamente para um campo magnético de $B = 10^{12}$ G, os símbolos em diamantes vermelho representam a EOS com $B = 0$. O sub-gráfico mostra a razão $(P_{||}/P_{\perp})$ para campos magnéticos de $B = (10^{11} - 10^{13})$ G.

da matéria para diferentes valores de campos magnéticos, e o sub-gráfico representa a razão entre estas pressões. Podemos ver que para o valor de campo magnético igual a $B = 10^{12}$ G, tanto a pressão paralela (círculo preto) como pressão longitudinal (linha tracejada verde) da EOS comportam-se como a pressão da equação de estado não magnetizado (diamantes vermelho). No entanto, quando esse o valor do campo magnético é da magnitude de $B = 10^{13}$ G as pressões se tornam anisotrópicas, sendo a razão entre a pressão paralelo (linha tracejada com ponto violeta) e a pressão longitudinal (linha tracejada azul) diferente de 1.0, ver sub-gráfico para razões das pressões. Como podemos ver pela Fig (3.4) e no sub-gráfico a pressão perpendicular P_{\perp} é sempre maior que a pressão paralela $P_{||}$ à direção do campo magnético. Este aumento de P_{\perp} em relação a $P_{||}$ vem essencialmente do termo $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ que é positivo em P_{\perp} e negativo em $P_{||}$. A contribuição do termo devido a magnetização é bem menor que a contribuição devido ao termo $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$. Portanto, para os valores de campos considerados nesta tese $P_{\perp} - P_{||} \sim \frac{\partial^2}{\partial x^2}$, como pode ser comprovado na Fig. (3.4) onde para um campo constante ($B = 10^{13}$ G) esta diferença é aproximadamente constante para qualquer valor de densidade.

No gráfico (3.5) mostramos a pressão de degenerescência dos elétrons $P_e = -\Omega$ como função da densidade de massa. Podemos ver que para densidade de aproximadamente $\rho = 3.0 \times 10^8$ g/cm³ as EOS com campos magnéticos de até $B = 10^{14}$ G se comportam como uma gás de elétrons não magnetizado. Para valores da ordem de $B = 10^{15}$ G os níveis de Landau passam a serem importantes nessas densidades uma vez que acontece um endurecimento da EOS devido à presença do campo magnético.

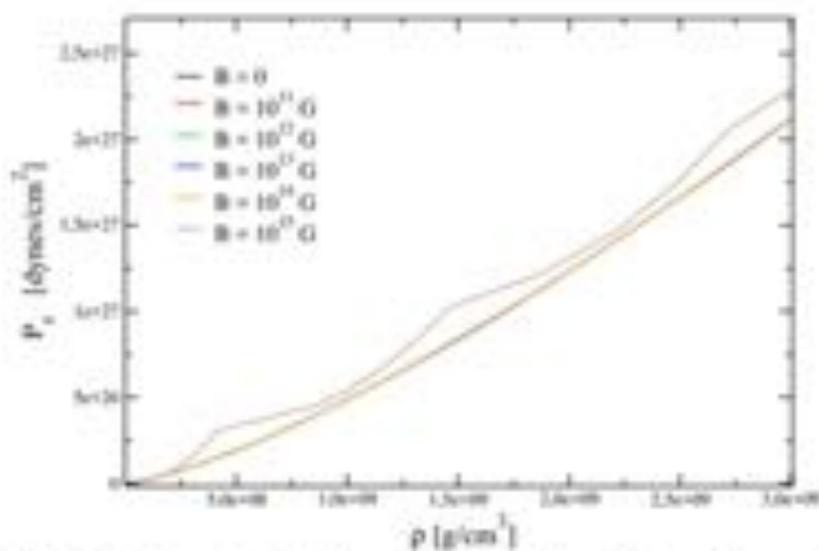


FIGURA 3.5 – Relação da pressão de degenerescência dos elétrons $P_e = -\Omega_e$, como função de densidade de massa. Para diferentes campos magnéticos de $B = 10^{11} - 10^{15}$ G.

4 Interações e Instabilidades da EOS

4.1 A rede cristalina em anãs brancas magnéticas

Ao obtermos as equações de estado no capítulo anterior, consideramos que o gás de elétrons não interage com os íons, no entanto, para uma análise mais realista estas interações elétrons-íons devem ser incluídas (RAYM *et al.*, 1971), tal como, levar em consideração os mais recentes dados experimentais para massa dos elementos atômicos que constituem as anãs brancas.

O modelo utilizado para descrever a interação elétrons-íons é comumente chamada de rede cristalina (lattice). É possível encontrarmos inúmeras abordagens com intuito de modelar a interação coulombiana, resultando cada uma em uma diferente EOS, ver (SHAPIRO; TEUKOLSKY, 2008; LAI; SHAPIRO, 1991). O uso da rede descrita neste trabalho foi inicialmente utilizado para descrever a crosta externa em estrela de nêutrons e utilizada a posteriori por Chamel para descrever o núcleo de anãs brancas super densas (PEARSON *et al.*, 2011; CHAMEL *et al.*, 2013; CHAMEL *et al.*, 2014). As cargas positivas no gás não são distribuídas uniformemente, mas concentradas nos núcleos ionizados. Uma vez que a distância média entre elétrons é superior à distância média entre os elétrons e os íons, as forças de repulsão elétron-elétron tornando-se menos intensa que a interação atrativa elétron-íon, levando a um amolecimento na EOS devido à diminuição do efeito da pressão e energia do gás de elétrons.

Os efeitos coulombianos são mais importantes no regime onde o gás é não degenerado. À medida que a densidade dos elétrons aumenta indo para o regime degenerado $\sim 10^8$ g/cm³ os íons que se encontram em uma rede cristalina, maximizam a distância entre eles íon-íon.

Assumimos que o núcleo de uma anã branca magnética seja constituída de matéria totalmente ionizados, formando uma rede cristalina de partículas (lattice), que pode ser formada homogeneamente por um íon ou heterogeneamente por dois ou mais tipos de íons. Uma representação pictórica da estrutura da rede para os íons $\frac{A}{Z}X$ e $\frac{A'}{Z'}X'$ é mostrada na Fig. (4.1).

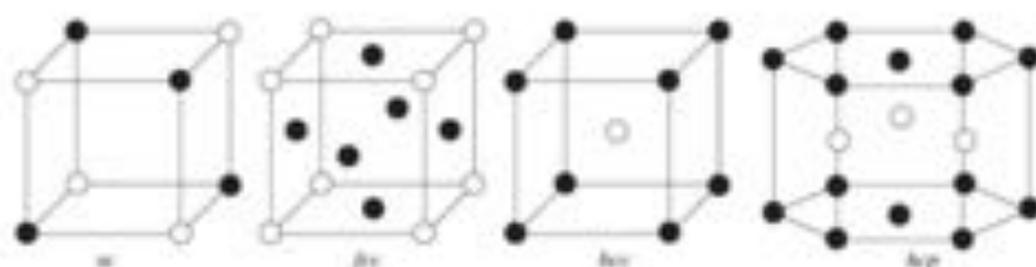


FIGURA 4.1 - Estruturas cristalinas heterogêneas: rede cúbica simples (sc), estrutura cúbica de face centrada (fcc), estrutura cúbica de corpo centrado (bcc), e hexagonal compacta (hcp). Fonte: (CHAMEL *et al.*, 2014)

A pressão no centro de uma estrela anã branca será dada pela somatória das pressões de degenerescência do gás de elétrons e a pressão da rede, devido à contribuição dos íons. A pressão dos íons pode ser expressa pela relação:

$$P_L = \frac{\mathcal{E}_L}{3} \quad (4.1)$$

onde \mathcal{E}_L é a densidade de energia da rede dada por:

$$\mathcal{E}_L = Cx^2 n_c^{4/3} f(Z, Z') \quad (4.2)$$

sendo a função $f(Z, Z')$:

$$f(Z, Z') = \frac{\eta Z^2 + \zeta Z'^2 + (1 - \eta - \zeta)ZZ'}{(\xi Z + (1 - \xi)Z')^{4/3}} \quad (4.3)$$

com Z e Z' sendo o número de prótons de dois íons distintos. As constantes da rede, C , η , ζ e ξ são mostradas na tabela (4.1) e podem ser consultadas na referência (CHAMEL *et al.*, 2014)

	C	η	ζ	$(1 - \eta - \zeta)$	ξ
sc	-1.418649	0.403981	0.403981	0.192037	1/2
fcc	-1.444141	0.654710	0.154710	0.190580	3/4
bcc	-1.444231	0.389821	0.389821	0.220358	1/2
hcp	-1.444083	0.345284	0.345284	0.309433	1/2

TABELA 4.1 - Constantes das redes cristalinas C , η , ζ e parâmetros $(1 - \eta - \zeta)$ e ξ , para diferentes estruturas cristalinas heterogêneas obtido pelo método de Coldwell-Horsfall e Maradudin (CHAMEL *et al.*, 2014).

A partir das equações (3.62) e (4.1), temos que a pressão no interior de uma anã branca

magnética, tem a seguinte forma:

$$P_{\text{total}} = P_z + P_z(Z, Z') \quad (4.4)$$

$$P_{z\text{-total}} = P_z + P_z(Z, Z') \quad (4.5)$$

Similarmente, a densidade de energia total no interior de uma anã branca magnética é dada pela soma das energias dos íons, da energia do gás de elétrons degenerados magnetizado em adição com a energia da rede. Deste modo temos a densidade de energia média na estrela dada por

$$\mathcal{E} = n_p M_N(Z, A)c^2 + n_p M_N(Z', A')c^2 + \mathcal{E}_e + \mathcal{E}_L - n_e m_e c^2 \quad (4.6)$$

onde n_p e n_p' são a densidade numéricas de núcleons, $M_N(Z, A)$ e $M_N(Z', A')$ as massas nucleares experimentais com a massa de repouso dos núcleons e Z prótons, dadas por: (WANG *et al.*, 2012; AUDI *et al.*, 2012).

$$M_N(Z, A) = M_A(Z, A) - Z \cdot m_e + B_e(Z) \quad (4.7)$$

onde $M_A(Z, A)$ é a massa do átomo. A correção $B_e(Z)$ é feita para a energia de ligação total de todos os elétrons removidos. Elas podem ser encontrados na tabela para cálculos da energia de ligação total atômica com todos os elétrons removidos para $2 \leq Z \leq 106$ em (HUANG *et al.*, 1976). Infelizmente, a precisão dos valores calculados para $B_e(Z)$ não é clara, para valores de até 700 keV para ^{238}U pois esta quantidade não pode ser medida facilmente. Uma expressão aproximada para $B_e(Z)$ de acordo com os resultados de (HUANG *et al.*, 1976) é dada em (LUNNEY *et al.*, 2003) e escrita como:

$$B_e(Z) = 14.4381Z^{2.39} + 1.55468 \times 10^{-6}Z^{5.39} \text{ eV} \quad (4.8)$$

A subtração na energia oriunda da energia de repouso do elétron na equação (4.6) vem da equação (4.7) referente ao cálculo das massas nucleares.

A densidade média dos núcleons é dada por

$$n = An_p + A'n_p' \quad (4.9)$$

com as densidades numéricas de núcleons expressas respectivamente como:

$$n_p = \frac{\xi}{\xi A + (1 - \xi)A'} n \quad (4.10)$$

$$n_p' = \frac{1 - \xi}{\xi A + (1 - \xi)A'} n \quad (4.11)$$

Usando a identidade termodinâmica (para $T = 0$) $\mathcal{E}_v + P_e = n_e \mu_e$, junto com a equação (4.1) obtemos a energia livre de Gibbs g por nucleon, $\frac{g}{(n_e + n_p)}$

$$g = mc^2 + \frac{\xi}{\xi A + (1-\xi)A'} \Delta(A, Z) + \frac{(1-\xi)}{\xi A + (1-\xi)A'} \Delta(A', Z') \quad (4.12)$$

$$+ \gamma_e \left[\mu_e + m_e c^2 + \frac{4\mathcal{E}_L}{3n_e} \right]$$

sendo $\Delta(A, Z)$ e $\Delta(A', Z')$ as massa de excesso (energia de ligação) dos núcleos ${}^A_Z X$ e ${}^{A'}_{Z'} X'$ respectivamente, dadas por:

$$\Delta(A, Z) = M_N(Z, A)c^2 - A m c^2 \quad (4.13)$$

$$\Delta(A', Z') = M_N(Z', A')c^2 - A' m c^2 \quad (4.14)$$

que a princípio não dependem do campo magnético, devido seu efeito ser muito pequeno para campos magnéticos inferiores à $10^{17} G$ (CHAMEL *et al.*, 2013), e m é a massa dos núcleons. Onde $\gamma_e = \frac{n_e}{n}$ é definido como sendo o número médio de átomo e de massa dos núcleos, Z e A , respectivamente, $Z = \xi Z + (1-\xi)Z'$ e $A = \xi A + (1-\xi)A'$, e μ_e o potencial químico do elétron.

Quando consideramos o limite onde a rede é homogênea ($Z = Z'$), a equação (4.3) independe das constantes η e ζ , tornando-se a função $f(Z, Z) = Z^{2/3}$ e a equação (4.2) reescrita como

$$\mathcal{E}_L = C e^2 n_e^{4/3} Z^{2/3} \quad (4.15)$$

A partir da condição de neutralidade da carga

$$n_p = Z n_e$$

e considerando que a densidade de energia de repouso de um átomo ${}^A_Z X$ é dada por

$$n_p M(Z, A)c^2 = \frac{A}{Z} m n_e c^2 + n_e m_e c^2 \quad (4.16)$$

podemos reescrever as equações de estado para um gás constituído de um único tipo de íon

$$\mathcal{E} = n_p M_N(Z, A)c^2 + \mathcal{E}_e + \mathcal{E}_L - n_e m_e c^2 \quad (4.17)$$

$$P_{\text{total}} = P_i + P_e(Z, Z') \quad (4.18)$$

$$P_{\text{total}} = P_i + P_L(Z, Z') \quad (4.19)$$

Note que a energia é a soma da energia de repouso dos íons mais a contribuição

da energia da rede e dos elétrons degenerados, onde a energia da rede depende no caso homogêneo apenas do parâmetro C , que varia referente à configuração da rede utilizada.

4.2 Possíveis instabilidades nas anãs brancas

4.2.1 Reação β - inverso

Anãs brancas tem sua matéria resfriada em seu processo evolutivo afim de buscar o estado de menor energia, produzindo para este equilíbrio reações ocasionadas por fótons e neutrinos (GLENDENNING, 2012). É sabido que anãs brancas podem tornar-se instáveis contra o processo de decaimento β - inverso. O aumento na pressão no interior de uma anã branca magnética, pode ocasionar que um núcleo com um número Z de prótons e um número atômico A torne-se instável, devido a reação β - inverso que é a captura de um elétron e a emissão de um neutrino, representado por:



Uma vez que o elétron é capturado por um próton, o mesmo é transformado em um nêutron, dentro do núcleo. Porém à medida que o núcleo recebe mais e mais nêutron a estrela torna-se instável devido ao colapso por matéria no seu centro. Quando o núcleo torna-se instável por captura do elétron, é comum que tenhamos desencadeada uma outra reação de captura em seguida.



A reação β - inverso é proporcional a energia do gás, já que esperamos que reações aconteçam quando a energia de Fermi E_F seja da ordem ou superior à energia de decaimento do núcleo ϵ_β . O amolecimento da equação de estado devido a captura de elétrons limita a estabilidade de uma anã branca, como mencionado primeiro por Gamow (GAMOW, 1939), ver também Refs. (CHAMEL *et al.*, 2013; CHAMEL *et al.*, 2014). A instabilidade estelar contra reações β - inverso ocorre quando a seguinte desigualdade é alcançada.

$$g(Z, Z') \geq g(Z - \Delta, Z' - \Delta) \quad (4.21)$$

onde $g(Z, Z')$ é dado pela equação (4.13) e $g(Z - \Delta, Z' - \Delta)$ tem a mesma forma, mas para um núcleo após a reação mostrada em (4.20), com as três possibilidades: (i) $\Delta = 1, \Delta = 0$,

(ii) $\Delta = 0, \Delta = 1$ e (iii) $\Delta = 1, \Delta = 1$, temos assim:

$$g(Z - \Delta, Z' - \Delta) = mc^2 + \frac{\xi}{\xi A + (1 - \xi)A'} \Delta(A, Z - \Delta) \quad (4.22)$$

$$+ \frac{(1 - \xi)}{\xi A + (1 - \xi)A'} \Delta(A', Z' - \Delta) + \gamma_v(Z - \Delta, Z' - \Delta) \left[\mu_v - m_v c^2 + \frac{4 \mathcal{E}_L(Z - \Delta, Z' - \Delta)}{3 n_v} \right]$$

podemos para futuros usos escrever a média da mudança no número atômico como

$$\Delta Z = \xi \Delta Z + (1 - \xi) \Delta Z'$$

Impondo a desigualdade entre as equações (4.13) e (4.22)

$$mc^2 + \frac{\xi}{\xi A + (1 - \xi)A'} \Delta(A, Z) + \frac{(1 - \xi)}{\xi A + (1 - \xi)A'} \Delta(A', Z')$$

$$+ \gamma_v(Z, Z') \left[\mu_v - m_v c^2 + \frac{4 \mathcal{E}_L(Z, Z')}{3 n_v} \right] \geq mc^2 + \frac{\xi}{\xi A + (1 - \xi)A'} \Delta(A, Z - \Delta)$$

$$+ \frac{(1 - \xi)}{\xi A + (1 - \xi)A'} \Delta(A', Z' - \Delta) + \gamma_v(Z - \Delta, Z' - \Delta) \left[\mu_v - m_v c^2 + \frac{4 \mathcal{E}_L(Z - \Delta, Z' - \Delta)}{3 n_v} \right]$$

após algumas manipulações matemáticas obtemos

$$\frac{1}{\xi A + (1 - \xi)A'} \left(\xi Z + (1 - \xi)Z' - \xi(Z - \Delta) - (1 - \xi)(Z' - \Delta) \right) \quad (4.23)$$

$$\times \left[\mu_v - m_v c^2 + \frac{4}{3} \left(\frac{\mathcal{E}_L(Z, Z') - \mathcal{E}_L(Z - \Delta, Z' - \Delta)}{n_v} \right) \right]$$

$$\geq \frac{1}{\xi A + (1 - \xi)A'} \left[\xi \left(\Delta(A, Z - \Delta) - \Delta(A, Z) \right) + (1 - \xi) \left(\Delta(A, Z' - \Delta) - \Delta(A, Z') \right) \right]$$

Substituindo (4.2) em (4.23) a inequação pode ser aproximada e expressa como

$$\left(\xi + (1 - \xi) \right) \Delta Z \left[\mu_v + \frac{4}{3} C v^2 n_v^{1/3} \Delta(Z f(Z, Z')) \right] \geq \mu_v^0 \quad (4.24)$$

onde

$$\mu_v^0 = \xi \mu_v^0(A, Z) + (1 - \xi) \mu_v^0(A', Z') \quad (4.25)$$

sendo $\mu_v^0(A, Z)$ e $\mu_v^0(A', Z')$ dadas por:

$$\mu_v^0(A, Z) = \Delta(A, Z - \Delta) - \Delta(A, Z) + m_v c^2 \quad (4.26)$$

$$\mu_v^0(A', Z') = \Delta(A', Z' - \Delta) - \Delta(A', Z') + m_v c^2. \quad (4.27)$$

A função $\Delta(\tilde{Z}f(Z, Z'))$ em (4.24) é a diferença da função (4.3) antes e depois da reação β -inverso, dada por

$$\Delta(\tilde{Z}f(Z, Z')) = f(Z, Z') - f(Z - \Delta, Z' - \Delta). \quad (4.28)$$

Podemos observar a partir da inequação (4.24) que o lado esquerdo aumenta proporcionalmente ao número de elétrons n_e , até alcançar μ_e^{β} e uma pressão P_{β} . A pressão no núcleo de uma estrela é dada pela soma da pressão dos elétrons degenerados e da pressão da rede. O núcleo torna-se instável por captura de elétrons quando $P_{\beta} \leq P_{total}$. Isto ocorre, segundo (HAENSEL *et al.*, 2007) na presença de um intenso campo magnético, onde apenas o nível fundamental $n = 0$ é totalmente preenchido pelos elétrons, por exemplo:

$$n_e = n_{e,B} \propto B_*^{2/3}$$

onde $B_* = B/B_c$ sendo $B_c = 4.414 \times 10^{13}$ G o campo magnético crítico, ver capítulo 4 da referência (HAENSEL *et al.*, 2007) para mais detalhes sobre $n_{e,B}$. Temos que o potencial químico do elétron neste caso é dado por

$$\mu_e \approx \frac{2\pi^2 m_e c^2 \lambda_c^3 n_{e,B}}{B_*} \quad (4.29)$$

onde $\lambda_c = h/m_e c$ é o comprimento de onda Compton do elétron. Substituindo (4.29) na inequação (4.24) podemos estimar o limite máximo para o campo magnético dentro de uma estrela anã branca antes que β -inverso aconteça em unidades de 4.414×10^{13} G como:

$$B_*^{\beta} \approx \frac{1}{2} \left(\frac{\mu_e^{\beta}(A, Z)}{m_e c^2 \Delta Z} \right)^2 \left[1 + \left(\frac{4}{\pi} \right)^{2/3} \frac{C\alpha}{3} \Delta(\tilde{Z}f(Z, Z')) \right]^{-2} \quad (4.30)$$

sendo $\alpha = e^2/(\hbar c)$ a constante de estrutura fina. O segundo termo do lado direito da equação (4.30) é a contribuição da estrutura da rede, no limite em que a rede é constituída de apenas um tipo de íon. Desprezando o termo da rede que é bem menor e considerando que no processo de β -inverso $\Delta Z = \Delta Z' = 1$, obtemos:

$$B_*^{\beta} \approx \frac{1}{2} \left(\frac{\mu_e^{\beta}(A, Z)}{m_e c^2} \right)^2 \quad (4.31)$$

A partir da equação (4.24) e (4.29), podemos relacionar μ_e com n_e , de maneira a obedecer sempre que $n_e < n_{e,B}$. Obtemos o limiar para densidade de massa de uma reação β -inverso quando apenas o nível fundamental é ocupado pelos elétrons pela seguinte

relação (CHAMEL *et al.*, 2013):

$$\rho_{\beta} \approx \frac{mB_e \mu_c^2}{2\pi^2 \gamma_e m_e c^2 \lambda^3 \Delta Z} \left[1 - C\alpha \left(\frac{B_e}{2\pi^2 \Delta Z} \right)^{1/3} \left(\frac{m_e c^2}{\mu_c^2} \right)^{2/3} \right. \\ \left. \times \left(\Delta(Zf(Z, Z')) - \frac{\Delta Z}{3} f(Z, Z') \right) \right]. \quad (4.32)$$

Para um gás de elétrons constituído de apenas um íon, obtemos

$$\rho_{\beta} \approx \frac{mB_e \mu_c^2}{2\pi^2 \gamma_e m_e c^2 \lambda^3 \Delta Z} \left[1 - C\alpha \left(\frac{B_e}{2\pi^2 \Delta Z} \right)^{1/3} \left(\frac{m_e c^2}{\mu_c^2} \right)^{2/3} \right. \\ \left. \times \left(Z^{5/3} - (Z-1)^{5/3} - \frac{2}{3} Z^{2/3} \right) \right]. \quad (4.33)$$

Na ausência da contribuição de campos magnéticos o limiar para densidade onde ocorre o início das reações β -inverso é dado por

$$\rho_{\beta}^0 = \frac{A}{Z} \frac{m}{3\pi^2 (\hbar c)^3} \mu_c^2(A, Z)^3 \quad (4.34)$$

4.2.2 Reação picnomuclear

Nesta seção nos voltaremos para aspectos da física de plasma (gás de elétrons), em química nuclear devido às altas densidades. Nos concentraremos em reações de fusão (reações picnomucleares) entre núcleos homogêneos $(A, Z) + (A, Z)$, por exemplo $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$ reações típicas em um vasto número de ambientes estelares (GASQUES *et al.*, 2005). Sob altas densidades o interior de uma anã branca pode ter pressões suficiente para o desencadeamento das reações de fusão picnomucleares (CHAMEL *et al.*, 2013; CHAMEL *et al.*, 2014). No entanto, a determinação exata das taxas para essas reações picnomucleares ainda são bastante incertas, com vários parâmetros em suas medições, ver referências (GASQUES *et al.*, 2005; YAKOVLEV *et al.*, 2006). Consideraremos aqui um processo de fusão de dois núcleos idênticos em um e calcularemos qual a densidade aproximada para essa fusão. Esse processo é representado pela seguinte relação:



onde podemos ter a fusão de ^{12}C para ^{24}Mg , ^{32}S da fusão de ^{16}O ou ^{40}Ca da fusão de ^{20}Ne . Em mistura heterogênea o esquema (4.35) é semelhante com um dos núcleos sendo $\frac{A}{Z}X$.

As taxas das reações picnomucleares foram calculadas para diferentes aproximações.

As taxas para reações pícnucleares foram definidas em (GASQUES *et al.*, 2005) como:

$$R_{pnc} = \frac{n_c}{2} S(E_{pk}) \frac{\hbar}{mZ^2c^2} P_{pnc} F_{pnc} \quad (4.36)$$

onde $S(E_{pk})$ é o fator astrofísico S usado por Gasques (ver (GASQUES *et al.*, 2005) para mais detalhes), parametrizado a partir de um modelo nuclear do tipo NL2. Segundo (GASQUES *et al.*, 2005), uma equação analítica para o fator astrofísico S é dada por:

$$S(E_{pk}) = 5.15 \times 10^{18} \exp \left[-0.428 E_{pk} - \frac{3E_{pk}^{0.398}}{1 + e^{0.413(8-E_{pk})}} \right],$$

onde $S(E_{pk})$ tem a unidade de MeV barn. O fator P_{pnc} e F_{pnc} dependem da densidade de massa e são escritos como:

$$P_{pnc} = \exp \left(-C_{exp}/\sqrt{\lambda} \right) \quad (4.37)$$

$$F_{pnc} = 8C_{pnc} 11.515/\lambda^{C_{pd}} \quad (4.38)$$

com C_{exp} , C_{pnc} e C_{pd} sendo parâmetros adimensionais para taxas de reações pícnucleares obtidas para $T = 0$ para uma rede cristalina do tipo bcc (ver tabela 4.2 para mais detalhes).

Model	C_{exp}	C_{pnc}	C_{pd}
bcc; lattice estática	2.638	3.90	1.25

TABELA 4.2 – Coeficientes C_{exp} , C_{pnc} , C_{pd} para taxas de reações pícnucleares obtidas para $T = 0$, para um modelo nuclear NL2 (see Ref. (RIBEIRO *et al.*, 1997; CHAMON *et al.*, 1997)).

O parâmetro de comprimento inverso é expresso em Ref. (GASQUES *et al.*, 2005; YAKOVLEV *et al.*, 2006) na seguinte forma

$$\lambda = \frac{\hbar^2}{mZ^2c^2} \left(\frac{n_c}{2} \right)^{1/3} = \frac{1}{AZ^2} \left(\frac{1}{A 1.3574 \times 10^{11} \text{ g cm}^{-3}} \right)^{1/3} \quad (4.39)$$

Para densidades ρ menores que a densidade de gotejamento de nêutrons (neutron drip), $X_i = 1$ (GASQUES *et al.*, 2005), a taxa de reações pícnucleares é:

$$R_{pnc} = \rho X_i AZ^4 S(E_{pk}) C_{pnc} 10^{48} \lambda^{3-C_{pd}} \exp \left(-C_{exp}/\sqrt{\lambda} \right) \text{ cm}^{-3} \text{ s}^{-1}. \quad (4.40)$$

As taxas de reações pícnucleares são calculadas para a energia de oscilação do ponto-zero E_{pk} do núcleo ^{12}C na densidade de $\rho = 10^{10} \text{ g/cm}^3$, que é expressa por (SHAPIRO;

TEUKOLSKY, 2008) e lê-se:

$$E_{\text{pot}} = \hbar\omega = \hbar \left(\frac{4\pi e^2 Z^2 \rho}{A^2 M^2} \right)^{1/2} \quad (4.41)$$

O tempo para a fusão total dos núcleos em função da densidade de massa é expresso por (BOSHIKAYEV *et al.*, 2013; GASQUES *et al.*, 2005):

$$\tau_{\text{pot}} = \frac{n_x}{R_{\text{pot}}} = \frac{\rho}{AmR_{\text{pot}}} \quad (4.42)$$

Como já mencionado, essas taxas são incertas, o fator S astrofísico analítico tem uma incerteza dentro de um fator ~ 3.5 , afetando assim o limiar da densidade e o tempo para a reação piconucleares. Note também que a densidade de massa para o início das capturas de elétrons em um núcleo ${}_{Z}^{A}Y$ é menor que no núcleo progenitor ${}_{Z}^{A}X$. Por essa razão, reações piconucleares tem um limiar para as densidade que proporciona instabilidades no interior de uma anã branca inferior as das reações β - inversa, ou seja, $\rho_{\text{pot}}(A, Z) < \rho_{\beta}(A, Z)$.

4.2.3 Quebra da simetria esférica

Um fluido esférico e incompressível com um campo magnético interno constante tem um campo de dipolo externo não representado por uma esfera (CHANDRASEKHAR; FERMI, 1953). Devido a presença do campo magnético a estrela torna-se oblata ao longo da direção do campo magnético. Assim, considerando um fluido esférico, a superfície é limitada segundo (CHANDRASEKHAR; FERMI, 1953) por:

$$r(\mu) = R + \epsilon P_l(\mu), \quad (4.43)$$

onde $\mu = \cos\theta$, sendo θ o ângulo polar e $P_l(\mu)$ os polinômios de Legendre do ordem l . Segundo (CHANDRASEKHAR; FERMI, 1953) os termos de até segunda ordem $l = 2$ contribuem para mudanças na densidade de energia magnética interna (para todos os outros valores de l , a mudança na energia magnética é de segunda ordem em ϵ).

O valor de ϵ que satisfaz $\epsilon \ll R$ mede o desvio a partir de uma configuração esférica é encontrado a partir da equação (4.43), para o raio polar e equatorial, onde são determinado por (COELHO *et al.*, 2014):

$$R_p = R + \epsilon P_l(1) \quad (4.44)$$

$$R_{\text{eq}} = R + \epsilon P_l(0) \quad (4.45)$$

encontrando a partir da diferença das equações (4.44) e (4.45) a igualdade:

$$\frac{\epsilon}{R} = \frac{R_{\text{eq}} - R_p}{R} \quad (4.46)$$

para uma deformação assimétrica com $l = 2$. Uma estrela magnética torna-se instável, devido a um campo magnético interno constante torna-la em uma forma oblata quando $\epsilon < 0$ (CHANDRASEKHAR; FERMI, 1953). Usando este limite podemos determinar qual campo máximo suportado por uma estrela até a mesma tornar-se instável devido a quebra de sua simetria, utilizando o teorema de virial:

$$\frac{\epsilon}{R} = -\frac{15}{8} \frac{B^2 R^4}{GM^2} \quad (4.47)$$

fazendo $B_* = B/B_c$ e substituindo o valor numérico da energia potencial gravitacional ($-3GM^2/5R$), temos que

$$\frac{1}{4} B^2 R^3 = -\frac{3GM^2}{5R} \quad (4.48)$$

podemos reescrever (4.47) na seguinte forma:

$$\frac{\epsilon}{R} = -4.5 B_*^2 \quad (4.49)$$

Note que quando o campo magnético interno constante está próximo do limite estabelecido pelo teorema virial, a estrela tende para uma forma altamente oblata, tornando-se assim instável (CHANDRASEKHAR; FERMI, 1953; COELHO *et al.*, 2014).

4.3 Resultados

O núcleo de densas anãs brancas é esperado conter principalmente carbono C e oxigênio O, no entanto, outros elementos podem existir no interior dessas estrelas, como hélio He, neônio Ne e magnésio Mg. Trabalhos citam até mesmo anãs brancas compostas por ferro Fe, estrelas que seriam formadas a partir da ignição de uma explosão de elétrons degenerado em um núcleo de oxigênio-neônio-magnésio. Uma possível candidata a anã branca de ferro é a WD0433 + 270 (CATALÁN *et al.*, 2008). Apresentamos nessa seção, equações de estado de composições do tipo carbono, oxigênio e carbono/oxigênio para diferentes estruturas cristalinas (lattice). No entanto, com o objetivo de um estudo mais sistematizado da influência da estrutura no interior de uma anã branca, calculamos os valores de campo magnético máximo e densidade de massa para reações β -inverso e as reações piconucleares para diferentes elementos. Os valores dos dados experimentais mais recentes retirados de (WANG *et al.*, 2012; AUDI *et al.*, 2012) usados para calcular as EOS são mostrado na tabela (4.3).

A_ZX	$M_N(A, Z)$	$M_A(A, Z)$	$\Delta(A, Z)$	$B_n(Z)$	$Z \times m_e$
${}^4_2\text{He}$	6.645×10^{-24}	6.646×10^{-24}	4.323×10^{-27}	1.348×10^{-31}	1.822×10^{-27}
${}^{12}_6\text{C}$	1.992×10^{-23}	1.997×10^{-23}	–	1.862×10^{-30}	5.466×10^{-27}
${}^{16}_8\text{O}$	2.655×10^{-23}	2.656×10^{-23}	-8.445×10^{-27}	3.704×10^{-30}	7.288×10^{-27}
${}^{56}_{26}\text{Fe}$	9.286×10^{-23}	9.288×10^{-23}	-1.080×10^{-25}	6.206×10^{-29}	2.368×10^{-26}

TABELA 4.3 – Valores de massas nucleares experimentais $M_N(A, Z)$ definidas pela expressão (4.7), massa atômicas $M_A(A, Z)$, energia de ligação total $B_n(Z)$ e energia de repouso devidos os elétrons do núcleo $Z \times m_e$, em unidades de g/cm^3 (WANG *et al.*, 2012)

A figura (4.2) mostra a relação entre a pressão longitudinal e a densidade de massa, para uma equação com campo magnético constante de $B = 10^{12}$ G. A linha preta representa uma EOS com campo magnético sem qualquer contribuição extra e a linha vermelha representa a EOS com a contribuição da rede cristalina do tipo bcc. Podemos observar que a contribuição da rede deixa a EOS ligeiramente mais mole. Na Fig. (4.3) mostramos

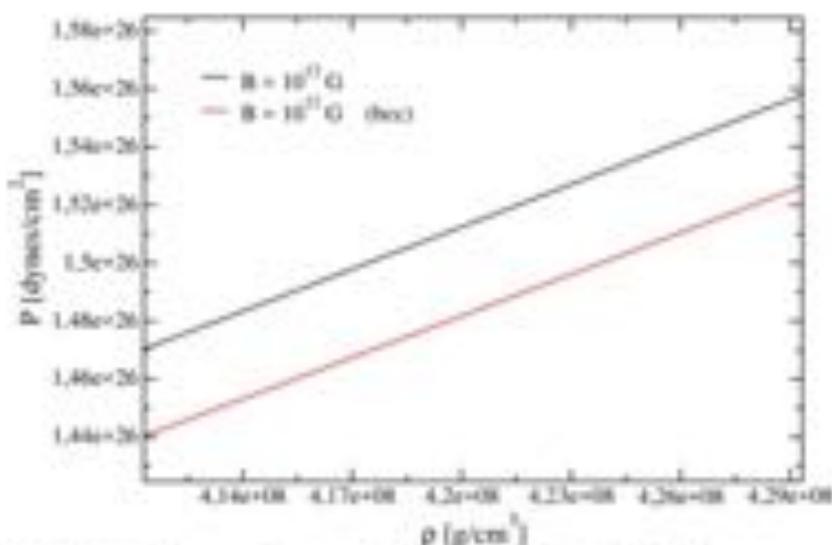


FIGURA 4.2 – Relação da pressão como função de densidade de massa para um gás de elétrons magnetizado com campo magnético de $B = 10^{12}$ G, em uma estrutura de rede do tipo (bcc). A linha preta representa a EOS com a contribuição da rede, a linha vermelha representa a EOS sem contribuição da rede.

a relação da pressão de degenerescência dos elétrons em função da densidade de massa para uma rede do tipo bcc e um campo magnético de $B = 10^{12}$ G. A linha preta representa uma EOS composta homogeneamente por carbono, a linha vermelha uma EOS de oxigênio e a linha verde uma mistura heterogênea C/O. Podemos observar que o elemento mais pesado (oxigênio) torna a equação de estado ligeiramente mais mole. Na mistura heterogênea o valor da pressão para uma mesma densidade de massa é intermediário as EOS homogêneas.

A Fig. (4.4) mostra a pressão longitudinal versus a densidade de matéria para um

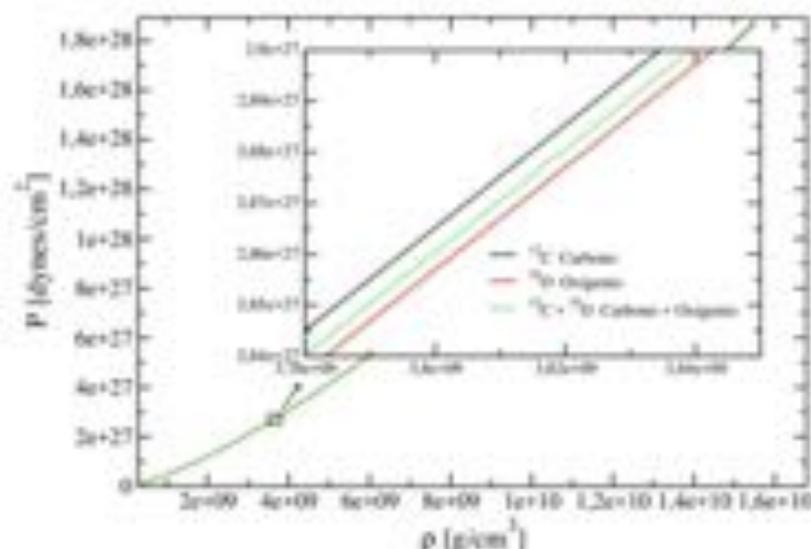


FIGURA 4.3 – Pressão versus densidade de massa para diferentes composições homogêneas de C e O e uma composição heterogênea de C/O com campo magnético $B = 10^{12}$ G e estrutura cristalina do tipo (bcc).

gás magnetizado com $B = 10^{12}$ G, composto por uma mistura heterogênea C/O para diferentes estruturas da rede. Podemos observar que para uma estrutura do tipo (fcc) constituída com 75% de oxigênio temos o menor valor de pressão para mesma densidade de matéria, caracterizando um maior amolecimento da EOS.

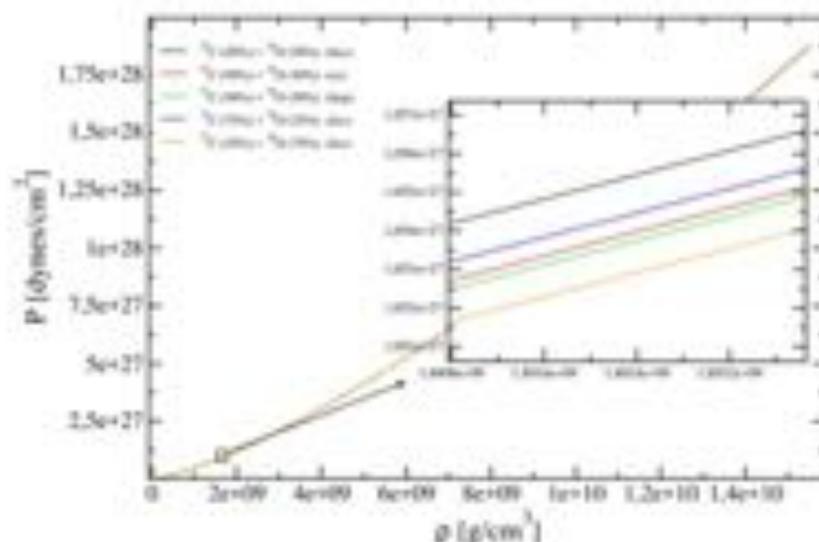


FIGURA 4.4 – Relação da pressão como função de densidade de massa para uma composição heterogênea C/O com campo magnético $B = 10^{12}$ G e diferentes estruturas cristalinas, rede cúbica simples (sc), estrutura cúbica de face centrada (fcc), estrutura de corpo centrado cúbico (bcc), e hexagonal compacta (hcp).

Na Fig. (4.5) descrevemos a solução numérica da inequação (4.24) para um gás de elétrons magnetizado composto de íons de carbono e de oxigênio. Como resultado, obtemos a dependência da densidade de massa para o decaimento β – inverso como função

do campo magnético levando em consideração a contribuição da rede. O comportamento oscilatório do gráfico é oriundo da contribuição dos níveis de Landau na densidade de número dos elétrons. O menor valor do limiar (quadrados preto e vermelho) para que as reações β -inverso aconteça é atingido quando $n_{\text{max}} = 0$, resultando em uma densidade de massa de aproximadamente 25% abaixo do valor para $B = 0$. No regime de forte quantização para $B \gg B_c$ como pode ser visto na Fig. (4.5), o limiar de densidade de massa aumenta quase linearmente com B de acordo com a equação (4.33), no entanto, campos com essas magnitudes não são esperados existirem no interior de uma anã branca devido ao teorema de virial.

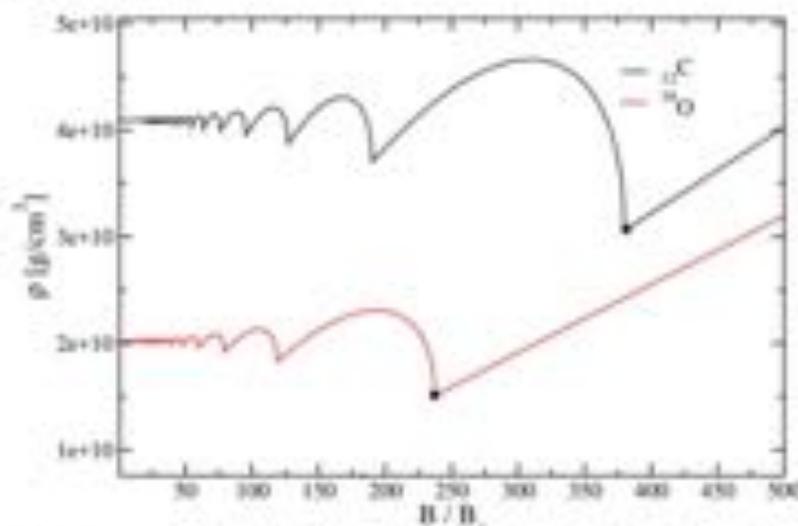


FIGURA 4.5 - Solução numérica da inequação (4.24) para íons de carbono e oxigênio. O gráfico mostra a densidade de massa limiar para o início das capturas de elétrons como uma função da intensidade do campo magnético em unidades do campo magnético crítico, B_c .

Os limites máximo do campo magnético que uma estrela pode suportar sem tornar-se instável por reações β -inverso são apresentados na tabela (4.4) junto com as densidade de massa para as reações na tabela (4.5), considerando um gás de elétrons degenerado homogêneo de diferentes composições e estruturas da rede. Para a determinação dos valores de densidade de massas foi resolvido numericamente a equação (4.24). Podemos observar que os valores máximos para o campo magnético não são alterados devido a mudança na estrutura da rede tabela (4.4) como também o valor limiar da densidade de matéria tabela (4.5) para as reações de β -inverso.

A tabela (4.6) mostra as densidade de matéria para uma estrutura dos íons tipo bcc, para ${}^4\text{He}$, ${}^{12}\text{C}$, ${}^{16}\text{O}$ e ${}^{28}\text{Fe}$ para um gás de elétrons magnetizado. A densidade ρ_0^j também representa um gás de elétrons magnético, porém sem contribuição da rede, as densidade representadas por ρ_0^j e ρ_0^{non} são ambas para um gás de elétrons na ausência de campos magnéticos. A inclusão da interação elétron-íons aumenta o valor máximo da densidades

${}^Z\text{X}$	$B_c^* (4.414 \times 10^{13}\text{G})$			
	bcc	sc	fcc	bcp
${}^4\text{He}$	1005.27	1004.90	1005.27	1005.27
${}^{12}\text{C}$	385.27	384.97	385.27	385.27
${}^{16}\text{O}$	241.40	241.17	241.40	241.40
${}^{56}\text{Fe}$	38.31	38.23	38.31	38.31

TABELA 4.4 – Valores para o campo magnético máximo em unidade de B crítico suportado por uma estrela anã branca magnética, antes de tornar-se instável por β -inverso para diferentes composições e estruturas da rede. O núcleo da estrela é assumido ser constituído de uma estrutura cristalina homogênea.

${}^Z\text{X}$	$\rho \text{ (g/cm}^3\text{)}$			
	bcc	sc	fcc	bcp
${}^4\text{He}$	1.32×10^{11}	1.32×10^{11}	1.32×10^{11}	1.32×10^{11}
${}^{12}\text{C}$	3.12×10^{10}	3.12×10^{10}	3.12×10^{10}	3.12×10^{10}
${}^{16}\text{O}$	1.55×10^{10}	1.55×10^{10}	1.55×10^{10}	1.55×10^{10}
${}^{56}\text{Fe}$	1.05×10^9	1.05×10^9	1.05×10^9	1.05×10^9

TABELA 4.5 – Densidade de massa para o início da captura de elétron pelo núcleo de uma anã branca massiva para diferentes composições e estruturas da rede. O núcleo da estrela é assumido ser feito de uma estrutura cristalina homogênea.

de matéria para a reação β -inverso. O aumento no limiar da densidade é em torno de 3% para o hélio, 6% para o carbono, 8% para o oxigênio e 17% para o ferro. Devido ao endurecimento do limiar e a rede causar o amolecimento na equação de estado como visto na Fig. 4.4 a massa de uma anã branca magnética com contribuições da rede é ligeiramente maior do que sem considerar a sua contribuição na densidade central ponto de instabilidade para reações β -inverso.

${}^Z\text{X}$	$\rho_c^*(\text{g/cm}^3)$	$\rho_c^0(\text{g/cm}^3)$	$\rho_c^{\text{BOSK}}(\text{g/cm}^3)$	$\rho_c^{\text{BOSK}}(\text{g/cm}^3)$
${}^4\text{He}$	1.32×10^{11}	1.28×10^{11}	1.72×10^{11}	1.39×10^{11}
${}^{12}\text{C}$	3.12×10^{10}	2.93×10^{10}	3.94×10^{10}	3.97×10^{10}
${}^{16}\text{O}$	1.55×10^{10}	1.43×10^{10}	1.92×10^{10}	1.94×10^{10}
${}^{56}\text{Fe}$	1.05×10^9	8.76×10^8	1.18×10^9	1.18×10^9

TABELA 4.6 – Valores para densidade de massa para o início da captura de elétron pelo núcleo para diferentes composições em uma rede do tipo bcc. O expoente * indica a equação (4.30) com ($C = 0$), indicando que as contribuições vindas das interações elétrons-íons foram negligenciadas. O expoente 0 indica a ausência de campo magnético e o expoente BOSK os valores obtidos pelo autor do trabalho (BOSHKAYEV *et al.*, 2013).

Apesar de podermos ter três possíveis opções de reações β -inverso, quando o gás é composto por componentes heterogêneos, calculamos na tabela (4.7), apenas a opção

$\frac{1}{2}X$	$\frac{1}{2}X'$	rede	B_0^2	$\rho(\text{g/cm}^3)$	B_0^2	$\rho_0^2(\text{g/cm}^3)$
${}^{12}\text{C}$ (50%)	${}^{16}\text{O}$ (50%)	sc	241.26	1.55×10^{10}	228.84	1.43×10^{10}
${}^{12}\text{C}$ (50%)	${}^{16}\text{O}$ (50%)	bcc	241.40	1.55×10^{10}	228.84	1.43×10^{10}
${}^{12}\text{C}$ (50%)	${}^{16}\text{O}$ (50%)	hcp	241.12	1.55×10^{10}	228.84	1.43×10^{10}
${}^{12}\text{C}$ (75%)	${}^{16}\text{O}$ (25%)	fcc	241.40	1.55×10^{10}	228.84	1.43×10^{10}
${}^{12}\text{C}$ (25%)	${}^{16}\text{O}$ (75%)	fcc	241.34	1.55×10^{10}	228.84	1.43×10^{10}

TABELA 4.7 – Valores para o campo magnético máximo e densidades de massas suportado por uma estrela anã branca magnética, antes de tornar-se instável por β -inverso para diferentes composições e estrutura da rede. O núcleo da estrela é suposto ser formado de uma estrutura cristalina heterogênea. O índice e expoente (0) indicando que as contribuições vindas das interações elétrons-íons foram negligenciadas. Os B^2 são medidos em unidades de B crítico ($4.414 \times 10^{13}\text{G}$).

para $\Delta Z = 1.0$ e $\Delta Z' = 0$. O valor da densidade para o início da captura de elétrons e para o campo magnético máximo de uma anã branca constituída de C/O é sempre dado pelo elemento mais pesado, neste caso o oxigênio. Isso acontece devido o oxigênio se tornar instável por β -inverso em densidade inferior a do carbono $\rho_{\beta}^{16\text{O}} = 1.55 \times 10^{10} < \rho_{\beta}^{12\text{C}} = 3.12 \times 10^{10}$. Os valores da tabela (4.7) são semelhantes aos valores encontrado nas tabelas (4.4) e (4.5) para um gás homogêneo de oxigênio.

A tabela (4.8) mostra as densidade de matéria para as possíveis reações piconucleares para os elementos criados a partir destas reações com os íons em uma rede bcc, para as possíveis reações ${}^4_2\text{He} + {}^4_2\text{He} \rightarrow {}^8_4\text{Be}$, ${}^{12}_6\text{C} + {}^{12}_6\text{C} \rightarrow {}^{24}_{12}\text{Mg}$ e ${}^{16}_8\text{O} + {}^{16}_8\text{O} \rightarrow {}^{32}_{16}\text{S}$. A densidade ρ_{pic}^0 representa um gás de elétrons magnético, porém sem contribuição da rede, as densidades representadas por ρ_{pic}^B são os valores para um gás de elétrons na ausência de campos magnéticos. A inclusão da interação elétrons-íons aumenta o valor máximo de limiar para densidades piconuclear para elementos mais pesados. As taxas com que esses processos ocorrem ainda tem bastante incertezas, por isto consideramos aqui um processo simples, que acontece a partir da fusão de dois elementos. Na Fig (4.6) apresentamos as taxas para o carbono de como é esperado que essa reações piconucleares aconteçam em função da densidade e consequentemente o tempo para que a mesma aconteça totalmente. Como pode ser visto na Fig. (4.6) a densidade crítica para as reações de fusão piconucleares limita a densidade central de uma anã branca em $9.25 \times 10^9 \text{ g/cm}^3$ para um tempo de 10 Giga anos. Este valor de densidade passa a ser $1.59 \times 10^{10} \text{ g/cm}^3$ para um tempo de 0.1 Mega anos. Note que o limite na densidade para instabilidade por β -inverso de um elemento nascido a partir da fusão de dois elementos é menor do que as de seus progenitores e também do que sua própria densidade piconuclear $\rho_{\beta}(2A, 2Z, B) < \rho_{\text{pic}}(A, Z, B) < \rho_{\beta}(A, Z, B)$ sendo a estrela totalmente instável no regime destas densidades.

Z_X	B^{p*}	$\rho_{pm}(\text{g/cm}^3)$	$B_C^{(0)}$	$\rho_{pm}^c(\text{g/cm}^3)$	$\rho_{pm}^0(\text{g/cm}^3)$
${}^4_2\text{He} + {}^4_2\text{He} \rightarrow {}^8_4\text{Be}$	539.24	5.17×10^9	522.29	4.93×10^9	6.63×10^{10}
${}^{12}_6\text{C} + {}^{12}_6\text{C} \rightarrow {}^{24}_{12}\text{Mg}$	74.69	2.67×10^9	69.55	2.40×10^9	3.22×10^9
${}^{16}_8\text{O} + {}^{16}_8\text{O} \rightarrow {}^{32}_{16}\text{S}$	10.31	1.37×10^9	9.45	1.20×10^9	1.61×10^9

TABELA 4.8 - Valores para o campo magnético máximo e densidades de massas suportado por uma estrela anã branca magnética, antes de tornar-se instável por reações pínucleares para diferentes composições constituída de estrutura cristalina homogênea do tipo (bcc). O expoente * indica ($C = 0$), indicando que as contribuições vindas das interações elétrons-íons foram negligenciadas. O expoente 0 indica a ausência de campo magnético. Os B^{p*} são medidos em unidades de B crítico ($4.414 \times 10^{13}\text{G}$).

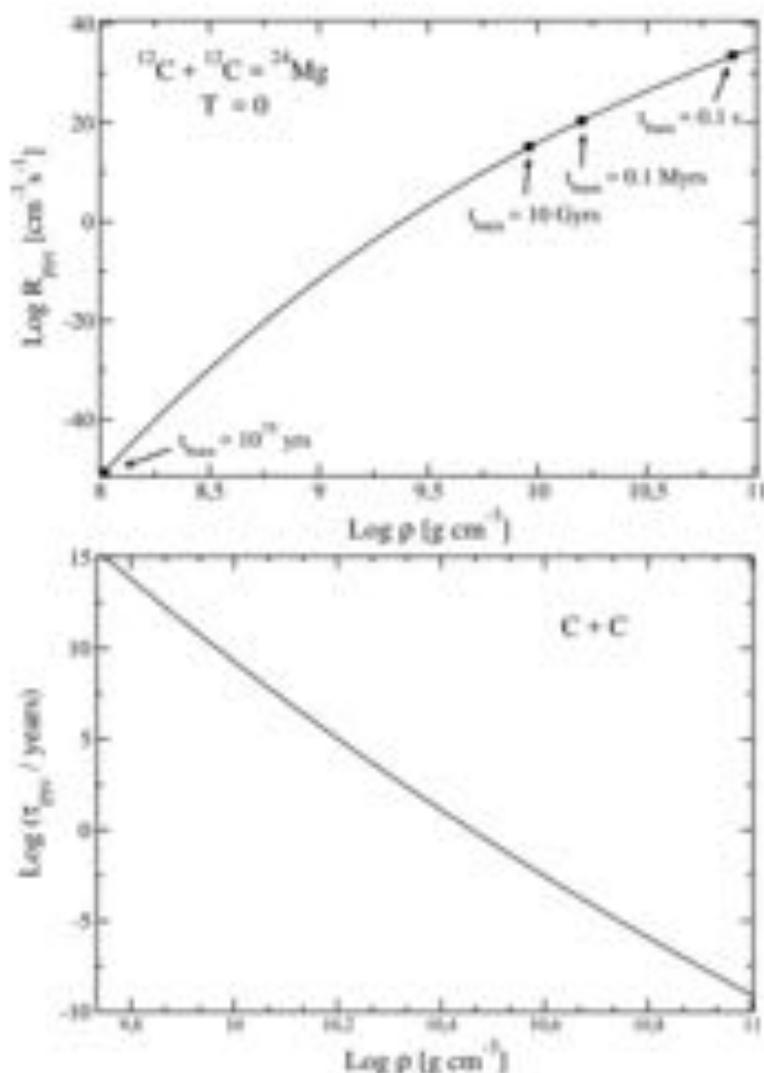


FIGURA 4.6 - Na figura acima, As taxas das reações pínucleares em $T = 0$ como função da densidade para o modelo nuclear NL2 em uma rede cristalina do tipo bcc. Na figura abaixo, o tempo para que ocorra as reações pínucleares à temperatura zero para a fusão de C+C em função da densidade, para um alto valor do fator S dado pela equação (4.37) e uma energia de oscilação no ponto zero $E_{pk} \sim 0.034 \text{ MeV}$.

5 Estrutura Estelar

5.1 Equação Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV)

Uma anã branca em equilíbrio hidrostático tem a força gravitacional sob o seu centro, balanceada pela força gerada a partir da pressão de degenerescência dos elétrons. A equação de equilíbrio hidrostático newtoniano foi por muitos anos suficiente para modelar a estrutura de uma configuração estática para anãs brancas com alta densidade, pois acreditava-se que o tratamento de correção relativística podia ser desprezado (JACKSON *et al.*, 2004; SAGERT *et al.*, 2006). A relação de equilíbrio hidrostático newtoniano que descreve como a pressão de uma estrela muda com o raio é dada por:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{G\rho(r)m(r)}{r^2}, \quad (5.1)$$

onde G é a constante gravitacional, $\rho(r)$ é a densidade de massa, $m(r)$ é a massa da estrela dentro de um raio r .

Recentemente (CARVALHO, 2015) observou que a contribuição da relatividade geral (RG), deve ser levada em conta no estudo da estrutura de estrelas anãs brancas sem campo magnético. Tratamos neste trabalho de estrelas anãs brancas, formadas por um gás de elétrons degenerado e magnetizado sob extremas densidades, considerando a correção da relatividade geral proposta por Oppenheimer e Volkoff (TOLMAN, 1939; OPPENHEIMER, VOLKOFF, 1939) no estudo da estrutura destas estrelas. Oppenheimer e Volkoff descreveram como o gradiente da pressão de uma estrela que tem simetria esférica depende de suas propriedades termodinâmicas, tais como densidade de energia \mathcal{E} , pressão P e da massa m . Para um fluido relativístico, isotrópico, esférico e em equilíbrio hidrostático, temos a relação de como a pressão muda com o raio dada pela equação Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) (ver (TOLMAN, 1939; OPPENHEIMER, VOLKOFF, 1939) para uma derivação detalhada)

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{G\mathcal{E}(r)m(r)}{c^2r^2} \left[1 + \frac{P(r)}{\mathcal{E}(r)} \right] \left[1 + \frac{4\pi r^2 P(r)}{m(r)c^2} \right] \left[1 - \frac{2Gm(r)}{c^2r} \right]^{-1}. \quad (5.2)$$

Esta equação tem o primeiro termo semelhante à equação diferencial (5.1), no entanto, tem três termos extras que são os fatores de correção devido à relatividade geral. Todos estes termos extras são maiores que 1, aumentando assim o termo da gravidade newtoniana, o primeiro termo da TOV.

A massa total da estrela $m(r)$ também muda com o raio r e é determinada a partir da solução da equação diferencial, onde é dada por:

$$\frac{dm}{dr} = \frac{4\pi r^2 \mathcal{E}(r)}{c^2} \quad (5.3)$$

A equação TOV foi derivada, a partir das equações de campo de Einstein

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^2} T_{\mu\nu}, \quad (5.4)$$

onde foi usada uma métrica para uma estrela estática com simetria esférica e sem rotação do tipo:

$$ds^2 = -e^{2\phi(r)} dt^2 + e^{2\lambda(r)} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (5.5)$$

onde ϕ e λ são funções apenas da coordenada radial. A equação (5.4) é resolvida tomando no lado direito um tensor momento-energia de um fluido perfeito e isotrópico (WEIBER, 1999):

$$T_{\mu\nu} = (\mathcal{E} + P)u_\mu u_\nu + P g_{\mu\nu}, \quad (5.6)$$

onde u_μ e u_ν são quadri-velocidades e $g_{\mu\nu}$ o tensor métrico.

Carvalho (CAIVALHO, 2015) observou para anãs brancas na ausência de rotação e Boshkayev (BOSHKAYEV *et al.*, 2011; BOSHKAYEV *et al.*, 2013) para anãs brancas sob rotação, a importância da correção da RG para a equação de equilíbrio, demonstrando que o limite newtoniano é uma boa aproximação para esses objetos compactos, desde que suas massas sejam inferiores à $1.0M_\odot$. No entanto, as correções não devem ser negligenciadas para valores superiores, uma vez que a TOV modifica significativamente o raio dessas estrelas. A solução da TOV, nos descreve o perfil da pressão da matéria de uma anã branca estática e esférica em função de r no seu interior. Os cálculos dessas estrelas estáticas nos fornecem uma referência conveniente para as quantidades físicas, eles nos dão uma comparação entre os resultados a partir de observáveis e modelos teóricos (MATHEW; NANDY, 2014). Neste trabalho utilizaremos a equação TOV para calcularmos a relação massa-raio de uma anã branca magnética sem e com rotação. Uma apresentação do modelo para estas estrelas com rotação será descrito na próxima seção.

5.2 Rotação em modelos estelar

Com a descoberta de fontes de raio-X e de rádio o interesse pela estrutura dos objetos compactos foi retomado (BOCQUET *et al.*, 1995a; LIVIO; PRINGLE, 1998; KONNO *et al.*, 1999; KONNO *et al.*, 2000; KAWALER, 2003). Grande número dos cálculos realizados para anãs brancas na literatura foram realizados para sistemas sem rotação e simetricamente esféricos, onde as propriedades são unicamente determinadas por uma equação de equilíbrio hidrostático do tipo TOV (ver equação 5.2). No entanto, com o aumento no número de anãs brancas com alta rotação observadas, tem havido um renovado interesse na influência e nas aplicações da rotação nas propriedades destes objetos.

Muitas das anãs brancas magnéticas observadas são massivas, como REJ 0317 – 853 com $M \sim 1.35M_{\odot}$ e campo magnético $B = (1.7 - 6.6) \times 10^6$ G (KULEBI *et al.*, 2010), PG 1658 + 441 com $M \sim 1.31M_{\odot}$ e $B = (2.3) \times 10^6$ G (SCHMIDT *et al.*, 1992) e PG 1031 + 234 com um dos maiores campos magnéticos da ordem de $B \sim 10^9$ G (KULEBI *et al.*, 2009). No entanto, essas estrelas em princípio são lentas devido ao freamento pelo campo magnético (WICKRAMASINGHE; FERRARIO, 2000). Trabalhos recentes (GARCÍA-BERRO *et al.*, 2012) propõem que essas anãs brancas magnéticas podem ser formadas da fusão de binárias degeneradas. A importância da rotação na determinação da massa máxima de uma anã branca, foi abordada há alguns anos no caso de rotação uniforme (LIVIO; PRINGLE, 1998; LIVIO, 1999) e recentemente considerando rotação diferencial como pode ser visto nos recentes trabalhos (DAS; MUKHOPADHYAY, 2015).

Hartle e Thorne investigaram as equações de estrutura estelar para objetos compactos em rotação, no contexto das equações de Einstein da relatividade geral (HARTLE, 1967). Tomando um perfil para equação de estado, eles integraram a equação de Hartle da estrutura estelar numericamente e determinaram o momento de inércia, a massa e raio para esses objetos. É esperado que uma estrela compacta em rotação, tenha um achatamento ao longo do seu plano polar, devido a ação da força centrípeta sobre a sua distribuição de massa. Hartle e Sharp encontraram um elemento de linha com simetria axial para uma estrela rotacionando lentamente (HARTLE; SHARP, 1967):

$$ds^2 = -e^{2\nu(r,\theta,\phi,\Omega)} dt^2 + e^{2\lambda(r,\theta,\phi,\Omega)} dr^2 + e^{2\mu(r,\theta,\phi,\Omega)} d\theta^2 + e^{2\psi(r,\theta,\phi,\Omega)} (d\phi - \omega(r, \theta, \phi, \Omega) dt)^2, \quad (5.7)$$

onde as funções métricas na equação (5.7) ν , λ , μ e ψ tem dependência nas coordenadas radiais, como também na frequência da estrela. Aqui Ω é a frequência rotacional da estrela e ω é o frame-dragging da frequência local.

A variável ω na equação (5.7) é a velocidade angular do referencial inercial local, que é proporcional a frequência de rotação da estrela Ω , e inversamente proporcional ao eixo

da distância radial. Como sabemos efeitos do tipo *frame dragging* ocorrem no interior da estrela. O efeito *frame dragging* também chamado *Lense-Thirring* é devido a inércia da rotação local em torno do eixo da estrela. Existe na rotação de estrelas compactas uma diminuição gradual da rotação de uma estrela isolada, semelhante ao efeito de colocar uma esfera de metal em óleo viscoso, desviando uma partícula de teste em queda livre em seu referencial inercial local em torno do eixo da estrela. Sendo esses efeitos importantes eles devem ser considerados no programa numérico de rotação para modelos estelares. Esse efeito é definido pela diferença entre a frequência de rotação da estrela Ω e a frequência do referencial inercial local ω (HARTLE, 1967).

$$\hat{\omega} = \Omega - \omega.$$

Esta diferença de frequência da qual depende a estrutura de uma estrela com rotação, são medidas no referencial rotacional. Hartle e Thorne, encontraram uma métrica perturbada para um sistema com esses efeitos, equação (5.7), expandindo em segunda ordem na frequência rotacional da estrela. As funções métricas são obtidas em termos das componentes de monopolo e quadrupolo, e são soluções de um conjunto de equações diferenciais ordinárias acopladas das equações de campo de Einstein. As funções métricas são dadas por:

$$e^{2\psi(r,\theta,\phi,t)} = e^{2\Phi} \left\{ 1 + 2 \left[h_0(r) + h_2(r) P_2(\cos\theta) \right] \right\} \quad (5.8)$$

$$e^{2\lambda(r,\theta,\phi,t)} = r^2 \sin^2\theta \left[1 + 2 \left(v_2(r) - h_2(r) \right) P_2(\cos\theta) \right] \quad (5.9)$$

$$e^{2\mu(r,\theta,\phi,t)} = r^2 \left[1 + 2 \left(v_2(r) - h_2(r) \right) P_2(\cos\theta) \right] \quad (5.10)$$

$$e^{2\nu(r,\theta,\phi,t)} = \left[1 + \frac{2}{r} \frac{m_0(r) + m_2(r) P_2(\cos\theta)}{1 - (2m(r)/r)} \right] \left(1 - \frac{2m(r)}{r} \right)^{-1} \quad (5.11)$$

onde $\Phi(r)$ na equação (5.8) é a função métrica de um objeto compacto sem rotação e com simetria esférica e P_2 é o polinômio de Legendre de segunda ordem. As funções perturbativas m_0 , m_2 , h_0 , h_2 e v_2 , são expansões da métrica de ordem quadrupolar e funções perturbativas de r e Ω e serão resolvidas a partir das equações de campo de Einstein. Na ausência das perturbações as quatro funções métricas acima (5.8), (5.9), (5.10) e (5.11), reduzem-se à função métrica de Schwarzschild (ROXBURGH; DURNAY, 1966). Hartle resolveu as equações de Einstein para a métrica de rotação lenta dada por (5.7),

$$G^{\alpha}_{\alpha} = \frac{8\pi G}{c^2} T^{\alpha}_{\alpha}. \quad (5.12)$$

O método perturbativo de Hartle-Thorne (HT), foi desenvolvido inicialmente para ser utilizado apenas em estrelas de nêutrons, devido às equações de Hartle serem de primeira

ordem na expansão de Ω . Outro fato relevante é que a métrica é uma expansão perturbativa sobre a métrica esférica e o modelo HT possuindo uma métrica de simetria radial exclui os efeitos secundários de radiação produzidas por ondas gravitacionais que é outro modo que pode causar a instabilidade da estrela (WEBER, 1999).

Se uma estrela compacta girar muito rapidamente, ela pode ter sua estrutura desintegrada devido à força centrífuga arremessar a matéria para fora da estrela. Supondo que um objeto tenha rotação abaixo desse limite, no tratamento newtoniano temos que no equador a condição para satisfazer o equilíbrio exige que a força centrípeta seja igual ou menor que a força gravitacional (LIVIO, 1999). Podemos então escrever que:

$$\frac{GMm}{R^2} = m\Omega^2 R, \quad (5.13)$$

onde a frequência orbital Ω de uma partícula da superfície R da estrela é dada por:

$$\Omega = \sqrt{\frac{GM}{R^3}}. \quad (5.14)$$

Essa relação é válida para estrelas relativísticas rotacionais, mas com um fator $\xi' = 0.72 \times 10^4 \text{ s}^{-1}$ multiplicando o lado direito da equação (5.14) (GLENDEENING, 2012). Esta frequência angular crítica suportada no seu interior por uma estrela em rotação antes de colapsar, é conhecida como *frequência de Kepler* (GLENDEENING, 2012). Temos então que a frequência de Kepler é dada por:

$$\Omega_K = \sqrt{\frac{GM}{R_{eq}^3}}. \quad (5.15)$$

sendo R_{eq} o raio equatorial.

No entanto, essa não é a expressão exata para objetos compactos relativísticos. Trabalhos recentes propuseram fórmulas aproximadas para a determinação da frequência de Kepler no contexto relativístico para anãs brancas, ver (DOSH-KAYEV *et al.*, 2011; DOSH-KAYEV *et al.*, 2013). Para determinar a frequência de Kepler, a métrica na superfície equatorial deve ser conhecida, mas ela depende da massa e raio da estrela que são encontrados da integração das equações de estrutura estelar. Porém, esses observáveis mudam devido ao achatamento da estrela, causado por uma alteração na frequência, exigindo portanto um tratamento auto-consistente.

Weber e Glendenning (WEBER, GLENDEENING, 1992) resolveram este dilema, mostrando que uma condição auto-consistente pode ser numericamente resolvida relacionando a frequência da estrela e suas funções métricas. Nesta tese, utilizamos o método proposto por (WEBER, GLENDEENING, 1992) de auto-consistência ao resolvermos a estrutura das anãs brancas com rotação e sob efeito de campos magnéticos.

5.3 Frequência de Kepler auto-consistente

Como mencionado na seção anterior, a frequência máxima de rotação que uma estrela em situação estável pode suportar é denominada frequência de Kepler, Ω_K . Usando uma aproximação iterativa Weber and Glendenning calcularam de forma auto consistente a frequência de Kepler para várias estrelas de nêutrons (WEBER, GLENDENNING, 1992), que está de acordo com as fórmulas empíricas de Haensel e Zdunik (HAENSEL, ZDUNIK, 1989) e de Friedman (FRIEDMAN *et al.*, 1986). Além disso a derivação para a condição de auto-consistência e sua implementação numérica será apresentado a seguir.

Dividindo a métrica (5.7) por dt^2 (considerando que $dt^2 = -ds^2$), os termos identificados envolvem as componentes da quadri-velocidade, obtemos:

$$1 = e^{2\nu} \frac{dt^2}{dt^2} - e^{2\lambda} \frac{dr^2}{dt^2} - e^{2\psi} \left[r^2 \frac{d\theta^2}{dt^2} - r^2 \sin^2 \theta \left(\frac{d\phi}{dt} - \omega \frac{dt}{dt} \right)^2 \right] \quad (5.16)$$

onde as quadri-velocidades são as derivadas parciais das coordenadas espaço-tempo para um tempo determinado. Assim, reescrevemos as quadri-velocidades como

$$(u^t, u^r, u^\theta, u^\phi) = \left(\frac{\partial t}{\partial \tau}, \frac{\partial r}{\partial \tau}, \frac{\partial \theta}{\partial \tau}, \frac{\partial \phi}{\partial \tau} \right), \quad (5.17)$$

e substituindo as definições (5.17) em (5.16) temos:

$$1 = e^{2\nu} (u^t)^2 - e^{2\lambda} (u^r)^2 - e^{2\psi} \left[r^2 (u^\theta)^2 - r^2 \sin^2 \theta (u^\phi - \omega u^t)^2 \right]. \quad (5.18)$$

Para rotações rígidas, as quadri-velocidades u^r e u^θ desaparecem e conseqüentemente as suas derivadas parciais também. Assim, a equação (5.18) para esta situação pode ser expressa como

$$1 = e^{2\nu} (u^t)^2 - e^{2\psi} r^2 \sin^2 \theta (u^\phi - \omega u^t)^2 \quad (5.19)$$

Usando a definição da regra da cadeia, temos que $u^\phi = \frac{d\phi}{dt} \frac{dt}{d\tau}$, e como definição a frequência estelar Ω é:

$$\Omega = \frac{d\phi}{dt}. \quad (5.20)$$

temos

$$u^\phi = \Omega u^t.$$

Substituindo esta relação na equação da métrica (5.7) com o requisito equatorial que $r = R$ e $\theta = \pi/2$ e $e^{2\psi} = e^{2\nu} r^2 \sin^2 \theta$, obtemos:

$$ds^2 = -e^{2\nu} dt^2 + e^{2\nu} (d\phi - \omega dt)^2 = \left[-e^{2\nu} + e^{2\nu} (\Omega - \omega)^2 \right] dt^2. \quad (5.21)$$

Realizando esta mesma substituição na equação (5.19), temos:

$$1 = \left[e^{2\nu} - e^{2\nu} R^2 (\Omega - \omega)^2 \right] (u^t)^2. \quad (5.22)$$

Assim, a quadri-velocidade u^t , pode ser escrita como:

$$(u^t)^2 = \frac{1}{e^{2\nu} - e^{2\nu} R^2 (\Omega - \omega)^2}. \quad (5.23)$$

Multiplicando ambos os lados da expressão (5.23) pela função $e^{-2\nu}$

$$(u^t)^2 e^{-2\nu} = \frac{1}{e^{2\nu} - e^{2\nu} R^2 (\Omega - \omega)^2} e^{-2\nu} \quad (5.24)$$

obtemos depois de triviais manipulações algébricas

$$u^t = \sqrt{\frac{e^{-2\nu}}{1 - e^{2(\nu-\epsilon)} R^2 (\Omega - \omega)^2}} \quad (5.25)$$

Esta expressão para u^t pode ser reescrita na forma

$$u^t = \frac{e^{-\nu}}{\sqrt{1 - V^2}} \quad (5.26)$$

onde

$$V^2 = e^{2(\nu-\epsilon)} R^2 (\Omega - \omega)^2 \quad (5.27)$$

é o quadrado da velocidade tangencial da massa de teste no equador, por nós desconhecida. Podemos então, a partir da equação (5.27) determinar a frequência estelar Ω , na condição de equilíbrio para a partícula de teste, onde neste caso a frequência é a frequência de Kepler Ω_K (GLENDEENING, 2012). Resolvendo (5.27) para a frequência temos:

$$\Omega_K = \frac{V}{e^{(\nu-\epsilon)} R} + \omega(R) = \frac{V e^{(\nu-\epsilon)}}{R} + \omega(R). \quad (5.28)$$

O caminho percorrido por uma partícula é determinado a partir da utilização do princípio variacional entre os extremos de uma métrica de dois pontos fixos na relatividade geral (WEBER, 1999). O caminho da partícula no equador é determinado por (GLENDEENING, 2012):

$$\delta \int_{s_1}^{s_2} \left(-e^{2\nu} + e^{2\nu} (\Omega - \omega)^2 \right) dt = 0 \quad (5.29)$$

onde s_1 e s_2 representam os pontos extremos da métrica. O extremo é determinado pela exigência que a derivada radial do integrando se anule, da equação de Euler. Desta

maneira obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(-e^{2\nu} + e^{2\nu}(\Omega - \omega)^2 \right) dr = 0. \quad (5.30)$$

Derivando a equação (5.30), chegamos à equação:

$$\psi' e^{2\nu} (\Omega - \omega)^2 - \omega' e^{2\nu} (\Omega - \omega) - \nu' e^{2\nu} = 0 \quad (5.31)$$

onde ψ' , ω' e ν' representam derivadas parciais radiais. Podemos reescrever esta equação a fim de obtermos a velocidade tangencial V da partícula no equador, da seguinte forma:

$$\psi' e^{2\nu} \left[(\Omega - \omega) e^{e-\nu} \right]^2 - \omega' e^{e+\nu} \left[(\Omega - \omega) e^{e-\nu} \right] - \nu' e^{2\nu} = 0 \quad (5.32)$$

onde os termos entre colchetes são a velocidade angular tangencial V (vide em (5.27)). Obtemos assim uma equação de segunda grau em V , mais detalhes do cálculo podem ser acompanhado em (GLENDEENING, 2012).

$$\psi' e^{2\nu} V^2 - \omega' e^{e+\nu} V - \nu' e^{2\nu} = 0 \quad (5.33)$$

A equação (5.33) tem como solução as seguintes raízes

$$V_{\pm}(\Omega) = \frac{\omega'}{2\psi'} e^{e-\nu} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega'}{2\psi'} \right)^2 e^{2(e-\nu)} + \frac{\nu'}{\psi'}} \quad (5.34)$$

A solução positiva da equação (5.34) é a velocidade tangencial de co-rotação com Ω e a solução negativa a contra-rotação (GLENDEENING, 2012). A dependência de V em Ω advém da velocidade tangencial depender das funções métricas e suas derivadas (WEBER; GLENDEENING, 1992). Estas, por sua vez dependem da frequência estelar Ω . Da frequência de Kepler

$$\Omega_K = \frac{V e^{(e-\nu)}}{R} + \omega(R) \quad (5.35)$$

e tomando em conjunto a equação (5.34) obtemo uma condição de auto-consistência (WEBER, 2005; GLENDEENING, 2012):

$$\Omega_K = \omega(R) + \frac{\omega'}{2\psi'} + e^{e-\nu} \sqrt{\frac{\nu'}{\psi'} + \left(\frac{\omega'}{2\psi'} e^{e-\nu} \right)^2}. \quad (5.36)$$

Para iniciar o processo de auto-consistência numérica, um ansatz é fornecido para a frequência de Kepler Ω_K , que será usado para resolver funções métricas (5.8), (5.9), (5.10) e (5.11). As derivadas das funções métricas são encontradas numericamente. Assim obtemos um valor da velocidade V de co-rotação, o qual é então testado na equação (5.35). Haverá alguma discordância entre o valor de Ω_K , encontrado com o ansatz original.

Ao continuar o processo, após algumas iterações, a convergência é obtida dentro de um erro prescrito. Uma vez que as equações de Einstein são equações acopladas diferenciais parciais não-lineares, prever em que regimes de frequências acontecerá a convergência não é trivial.

O período de Kepler P_K é dado a partir da equação (5.36) como:

$$P_K \equiv \frac{2\pi}{\Omega_K}. \quad (5.37)$$

5.4 Densidade Bariônica para uma estrela em Rotação

Uma estrela com simetria esférica estática tem o número bariônico derivado por uma integração dada por (HARTLE, 1967):

$$A = \int_0^R N(r) \left[1 - \frac{2m(r)}{r} \right]^{1/2} 4\pi r^2 dr, \quad (5.38)$$

onde A é o número bariônico e $N(r)$ é a densidade de número bariônico. Devido à rotação sofrida pela estrela, a equação (5.38), tem uma correção perturbativa devido à mudança no número de bárions total da estrela em rotação (WEBER, 1969)

$$m\Delta A = m_0(R) + 4\pi \int_0^R r^2 B(r) dr, \quad (5.39)$$

sendo m a massa do núcleo e m_0 a função de perturbação do monopolo de massa. Com a função de integração $B(r)$ definida como:

$$\begin{aligned} B(r) = & (\mathcal{E} + P)p_0 \left\{ \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial P} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - 2m(r)/r}} - 1 \right) - \frac{\partial \mathcal{E}^{int}}{\partial P} \frac{1}{\sqrt{1 - 2m(r)/r}} \right\} \\ & + \frac{(\mathcal{E} - \mathcal{E}^{int})}{(\sqrt{1 - 2m(r)/r})^3} \left(\frac{m_0}{r} + \frac{1}{3}(jr\omega)^2 \right) \\ & - \frac{1}{4\pi r^2} \left(\frac{1}{12} \left(jr^2 \frac{d\omega}{dr} \right)^2 - \frac{1}{3} \frac{dj^2}{dr} r^3 \omega^2 \right), \end{aligned} \quad (5.40)$$

onde P é a pressão e \mathcal{E} e \mathcal{E}^{int} são as densidades de energia e energia interna, respectivamente, a função p_0 é semelhante a m_0 , uma função de perturbação do monopolo de

pressão. A função j na equação, (5.40), é dada por:

$$j(r) = e^{-\phi(r)} \sqrt{1 - 2m(r)/r}, \quad (5.41)$$

e a função $\phi(r)$ é a função métrica usada na seção anterior. A energia interna é obtida a partir da contribuição dos bárions, por:

$$\mathcal{E}^{\text{int}} = \mathcal{E} + m_b N \quad (5.42)$$

Utilizaremos o conceito de número bariônico, pois compararemos duas estrelas uma sem rotação e outra com rotação, ambas com campos magnéticos e como apenas estrelas com o mesmo número bariônico são as mesmas estrelas. Assim conseguiremos identificar qual a contribuição da rotação na estrutura de uma anã branca magnética (WEBER, 1999). Faremos uso também do método de auto-consistência desenvolvido por Weber e Glendenning, para mais detalhes ver (WEBER, GLENDENNING, 1992).

5.5 Resultados

Discutimos os resultados de altos campos magnéticos na estrutura global das anãs brancas com e sem rotação para diferentes composições. Utilizamos as equações de estado levando em conta as interações elétrons-íons devido a uma rede do tipo (bcc) com temperatura ($T = 0$).

Na figura (5.1) a relação massa raio é apresentada para diferentes campos magnéticos que variam de 4.414×10^{11} – 4.414×10^{13} G. Nossos resultados são coerentes com os resultados mostrados por (OSTRIKER; HARTWICK, 1968; SUH; MATHEWS, 2000), em que para o aumento do campo magnético tanto a massa como o raio da estrela aumentam quando comparados com uma estrela sem a presença de campo magnético. Outro resultado condizente com os já observados na literatura é que para o aumento de campo magnético, o raio da estrela também aumenta, quando considerado fixa a massa da estrela: por exemplo para $B = 5.5 \times 10^{12}$ G o raio é de 5657 km tendo um aumento de 1%, para valores de $B = 1.32 \times 10^{13}$ G e $B = 2.21 \times 10^{13}$ G os raios são 5864 e 6306 km respectivamente, tendo um aumento de 4.3% e 12.1% respectivamente. Porém campos dessas magnitudes quando levados em consideração uma configuração de campos simétricos, não seriam uma boa representação da realidade, uma vez que segundo (CHANDRASEKHAR; FERMI, 1953) esses campos gerariam uma diferença nos raios equatoriais e polares de maneira a estrela ter uma forma extremamente oblata. Podemos ver também na figura (3.4) que para campos acima de $B = 1.0 \times 10^{12}$ G as pressões dentro da estrela já se comportam anisotropicamente. Além disso, quando levado em consideração fortes campos magnéticos constantes

da direção z acima de $B = 4.414 \times 10^{13}$ G, as estrelas não podem suportar valores de raio acima de 6200 km. Isso acontece devido ao limite de virial, devido à pressão magnética torna-se maior que a pressão gravitacional que diminui com o aumento do raio estelar.

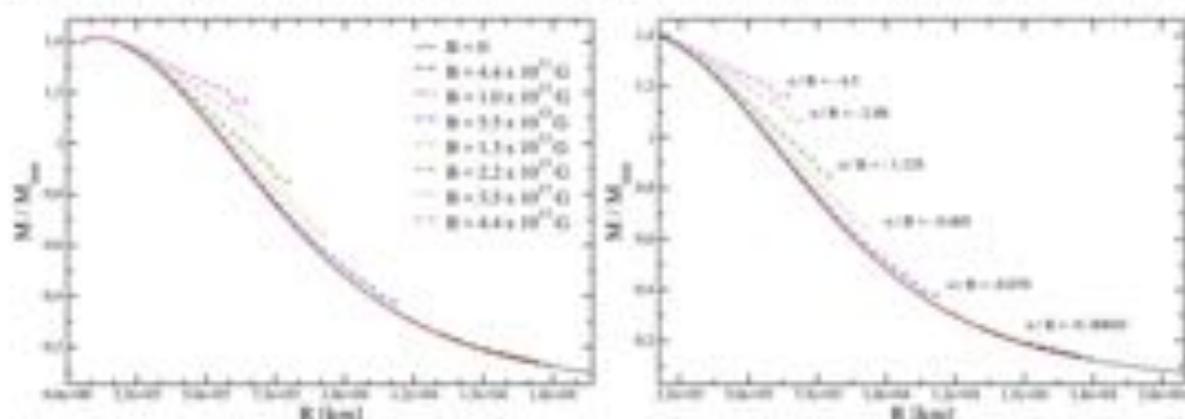


FIGURA 5.1 – Relação entre a massa e raio de uma anã branca magnética composta de ^{16}O para campos magnéticos de $10^{13} - 4.414 \times 10^{13}$ G. Os valores dos campos para as linhas tracejadas coloridas são indicadas na figura (esquerda), ϵ/R mede a excentricidade sofrida pela estrela devido ao campo magnético (direita).

A Fig. (5.2) mostra o diagrama de massa-raio para uma anã branca de carbono na ausência de campo magnético com e sem rotação sem qualquer contribuição da estrutura da rede (acima) e com a contribuição da rede cristalina (abaixo). A linha preta representa uma anã branca sem rotação e a linha pontilhada vermelha uma anã branca com rotação até à frequência de Kepler, dada pela equação (5.36). As linhas tracejadas horizontais azul, verde, laranja e magenta que ligam as duas curvas, representam o ponto em que as diferentes curvas têm o mesmo valor para a densidade de número bariônico $\log_{10} A$. Podemos ver que estrelas com rotação suportam uma maior massa, no entanto, em um maior volume. Observamos em ambos os gráficos (acima e abaixo) que à medida que a velocidade de rotação aumenta a diferença entre os raios das curvas aumentam. Afim de observarmos a evolução de uma determinada estrela com relação à sua rotação fixamos a densidade de número bariônico (linhas horizontais tracejadas) e a rotacionamos até o limite máximo dado pela frequência de Kepler. Observamos que para o mesmo número bariônico a diferença entre a densidade central das duas estrelas também aumenta com a rotação, fazendo com que as estrelas com rotação tornem-se menos densas que suas progenitoras (estrelas sem rotação). Quando o número bariônico tem o valor de $\log_{10} A = 57.22$ a estrela com rotação é cerca de dez vezes menos densa no seu centro que a anã branca sem rotação. Isto acontece devido à força centrífuga da rotação expelir a matéria para superfície tornando a estrela menos densa no seu centro. Essa diferença nas densidades centrais é ligeiramente maior nas estrelas onde a EOS tem ação da rede, devido à contribuição da rede suavizar a EOS a partir da interação elétrons-íons amolecendo a matéria no interior da estrela. Outra observação é que mesmo pequeno há um decréscimo no valor

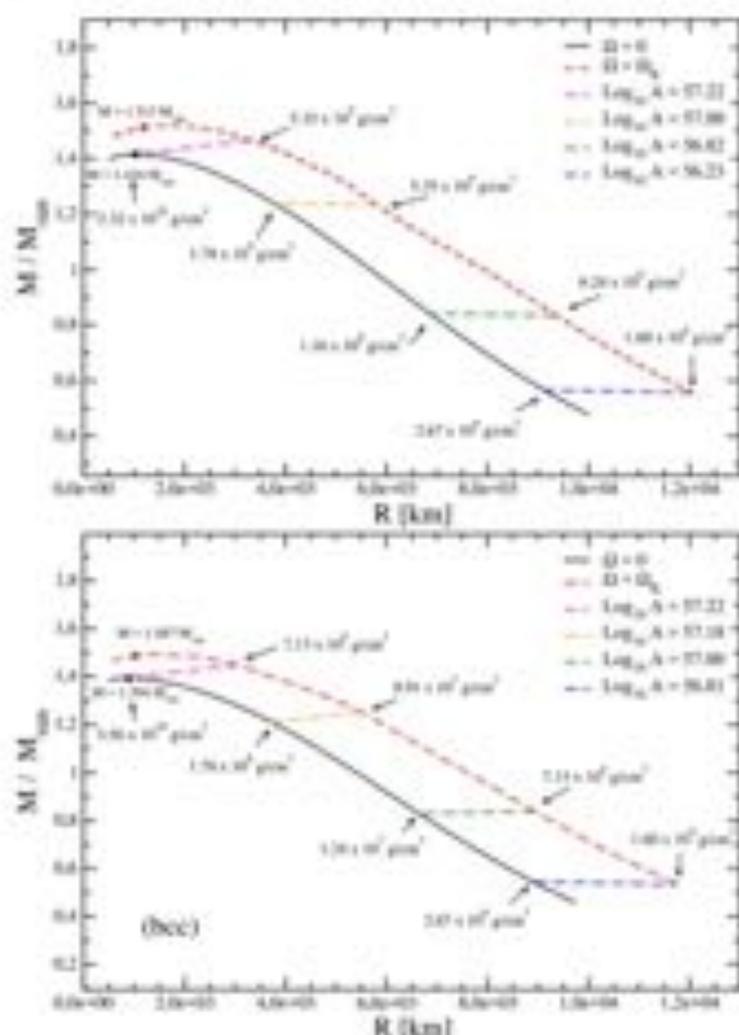


FIGURA 5.2 – Diagrama de massa raio para $B = 0$, para uma anã branca de carbono sem contribuição da interação elétrons-íons (acima) e com contribuição devido uma rede cristalina do tipo (bcc) (abaixo). A linha preta sólida representa uma estrela sem rotação, a linha tracejada vermelho mostra uma anã branca com rotação até a frequência de Kepler. As linhas tracejadas azul, verde, laranja e magenta que ligam as duas curvas representam o ponto onde as diferentes curvas têm o mesmo número bariónico $\log_{10} A$. Os valores indicados pelas setas representam as densidades de massa centrais no ponto de conexão entre as curvas em g/cm^3 .

da massa máxima na anã branca com contribuição da rede.

Como mostramos na Fig (5.1) ao calcular a excentricidade da anã branca magnetizada, para campos magnéticos com $B \sim 1 - 2 \times 10^{13}$ G a razão entre a excentricidade por R ($\frac{e}{R}$) torna-se maior que 1, mostrando que a diferença entre o raio no equador e polar torna-se já da ordem do raio médio da estrela. Isto mostra que a simetria esférica e o conceito de pressão isotrópica não é mais válido para esses valores de B . Assim, vamos agora analisar o efeito do campo magnético na estrutura da anã branca nas condições onde a simetria esférica que estamos considerando nos nossos cálculos seja válida, ou seja, $B \lesssim 10^{13}$ G. Como pela Fig. (5.1), a diferença da curva massa-raio é essencialmente a mesma para

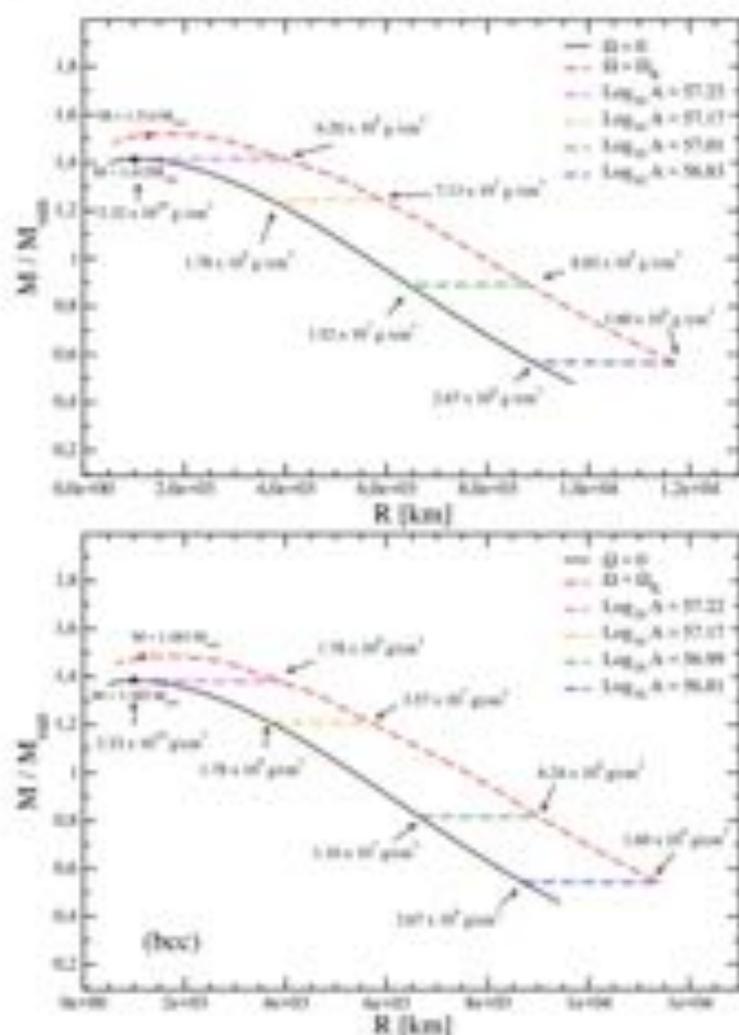


FIGURA 5.3 – Diagrama de massa raio para $B = 1.0 \times 10^{12} \text{G}$, para uma anã branca magnética sem contribuição da interação elétrons-íons (acima) e com contribuição devido uma rede cristalina do tipo (bcc) (abaixo). A linha preta sólida representa um estrela sem rotação, a linha tracejada vermelho mostra uma anã branca com rotação até a frequência de Kepler. As linhas tracejadas azul, verde, laranja e magenta que ligam as duas curvas representam o ponto onde as diferentes curvas têm o mesmo número bariônica $\log_{10} A$. Os valores indicados pelas setas representam as densidades de massa no ponto de conexão entre as curvas em g/cm^3 .

anãs brancas com massa maior que uma massa solar, as anãs brancas magnéticas são mais massivas. Como já discutimos utilizaremos o valor de $B = 10^{12} \text{G}$, para estudar o efeito combinado do campo magnético e da rotação.

Na Fig. (5.3) mostramos então a relação massa-raio para uma anã branca magnetizada com $B = 1.0 \times 10^{12} \text{G}$ na ausência da contribuição devido à rede (acima) e com contribuição da rede (abaixo). Também mostramos uma anã branca magnetizada com rotação até a frequência de Kepler. Como visto na Fig. (5.1) anãs brancas com campos $B \lesssim 10^{12} \text{G}$ comportam-se como uma estrela não-magnetizada. Isto foi observado nos valores obtidos por nós na Fig. (5.3), uma vez que para o valor de massa máxima não tivemos alterações

significativas ao levar em consideração campos magnéticos da ordem de 10^{12} G. Na realidade temos uma leve diminuição da massa máxima devido ao campo magnético, sendo o seu valor muito semelhante ao limite de Chandrasekhar. Semelhante ao caso sem campo magnético, temos que anãs brancas magnéticas com rotação aumentam a massa máxima entre 10% a 15% e também o seu raio. Devido à contribuição da rede obtemos para a massa máxima um valor menor do que no caso sem contribuição das interações eletrônicas devido ao caráter coulombiano atrativo desta interação. Anãs brancas magnéticas também tornam-se menos densas à medida que a rotação aumenta para mesma densidade bariônica por causa da ação da força centrífuga na sua matéria magnetizada.

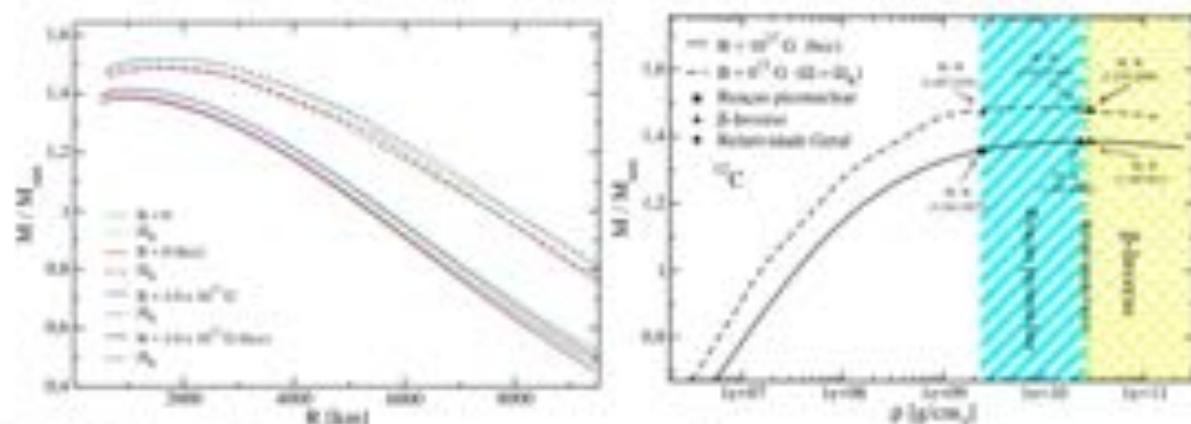


FIGURA 5.4 - Relação massa raio para uma anã branca constituída de carbono, com e sem campo magnético, com e sem contribuição da rede e na presença e ausência de rotação (esquerda) e a massa como função da densidade central para $B = 1.0 \times 10^{12}$ G. As áreas coloridas representam os limites das densidades centrais para as instabilidades das reações piconucleares, β -inverso e para relatividade geral.

Fig. (5.4) mostra do lado esquerdo as curvas para uma anã branca constituída de carbono, com e sem campo magnético, com e sem contribuição da rede e na presença e ausência de rotação e do lado direito a massa de uma anã branca como função da densidade de matéria central com campo magnético de $B = 1.0 \times 10^{12}$ G com contribuição da rede. Podemos ver que o campo magnético pouco influencia no valor da massa máxima, no entanto a contribuição da rede, só produzir um amolecimento na EOS, causa consequentemente uma pequena diminuição do valor máximo da massa, tanto para uma anã branca livre de rotação, como com rotação. Na Fig. (5.4) (direita) a curva sólida preta representa uma anã branca com rede cristalina bcc sem rotação e a linha tracejada preta para essa estrela sob a ação de rotação máxima (frequência de Kepler). Mostramos os limites para as três instabilidades possíveis, a área ciano representa a densidade para o aparecimento de reações piconucleares onde o quadrado (preto, preto listrado) mostra o valor da massa de uma estrela nessa densidade central. A área verde mostra o limiar para a instabilidade devido a relatividade geral ($\frac{\partial M}{\partial \rho} = 0$) com os círculos elucidando os valores para a massa estelar. Para uma estrela constituída de carbono é possível ver que

a instabilidade devido à RG acontece antes que o núcleo da estrela comece o processo de captura de elétrons. O limite para a reação β -inverso é representado pela área amarela.

Na tabela (5.1) listamos os dados quantitativos de massa máxima e raio mínimo das estrelas apresentadas nas Figs. (5.2) e (5.3) para diferentes regiões de instabilidades, causadas pela relatividade geral e processos de reações β -inverso e reações pícnonucleares, enquanto na tabela (5.2) as suas frequências de Kepler calculadas levando em consideração a relatividade geral (WEHR, 1999) e no limite clássico.

^{12}C	$B = 0$ (bcc)	$B = 0$	$B = 10^{12}$ G (bcc)	$B = 10^{12}$ G
$M^{\beta}(\Omega = 0)$	1.394	1.415	1.385	1.412
R_{eq}	869.670	878.404	920.733	948.865
$M^{\beta}(\Omega_K)$	1.484	1.501	1.479	1.486
R_{eq}	1010.111	1039.497	1069.151	1220.946
$M^{\text{PG}}(\Omega = 0)$	1.394	1.416	1.385	1.412
R_{eq}	894.310	1027.385	1004.845	1015.734
$M^{\text{PG}}(\Omega_K)$	1.487	1.513	1.483	1.514
R_{eq}	1030.131	1186.503	1163.572	1277.795
$M^{\text{PN}}(\Omega = 0)$	1.370	1.396	1.361	1.389
R_{eq}	1782.523	1801.357	1836.84	1907.881
$M^{\text{PN}}(\Omega_K)$	1.489	1.516	1.487	1.519
R_{eq}	2048.822	2070.691	2108.868	2190.988

TABELA 5.1 – Massa máxima para anãs brancas com e sem rotação (não magnetizada/magnéticas) para diferentes instabilidades, onde M é medida em M_{\odot} e R em km.

^{12}C	$B = 0$ (bcc)	$B = 0$	$B = 10^{12}$ G (bcc)	$B = 10^{12}$ G
Ω_K^{β} (Hartle)	2.133	2.058	1.952	1.617
Ω_K^{β} (Newton)	2.197	2.116	2.014	1.654
Ω_K^{PG} (Hartle)	2.070	1.689	1.720	1.707
Ω_K^{PG} (Newton)	2.135	1.742	1.776	1.762
Ω_K^{PN} (Hartle)	0.732	0.727	0.698	0.667
Ω_K^{PN} (Newton)	0.762	0.757	0.729	0.696

TABELA 5.2 – Máxima frequência de Kepler para anãs brancas de carbono com rotação e sem-rotação (não magnetizada/magnéticas) para diferentes instabilidades. Ω_K é medido em Hz.

As frequências de Kepler relativísticas são sempre menores que as newtonianas. Além disto, devido ao caráter atrativo da interação da rede, estrelas com rede cristalina eletrônica podem rodar mais rápido. A inclusão do campo magnético, que introduz uma interação repulsiva (pressão magnética positiva) tem o efeito oposto, diminuindo a frequência de Kepler, como pode ser visto na tabela (5.2). Vale a pena salientar que para campos $B = 10^{12}$ G mesmo que seu efeito na massa e no raio da estrela seja pequeno eles tem um

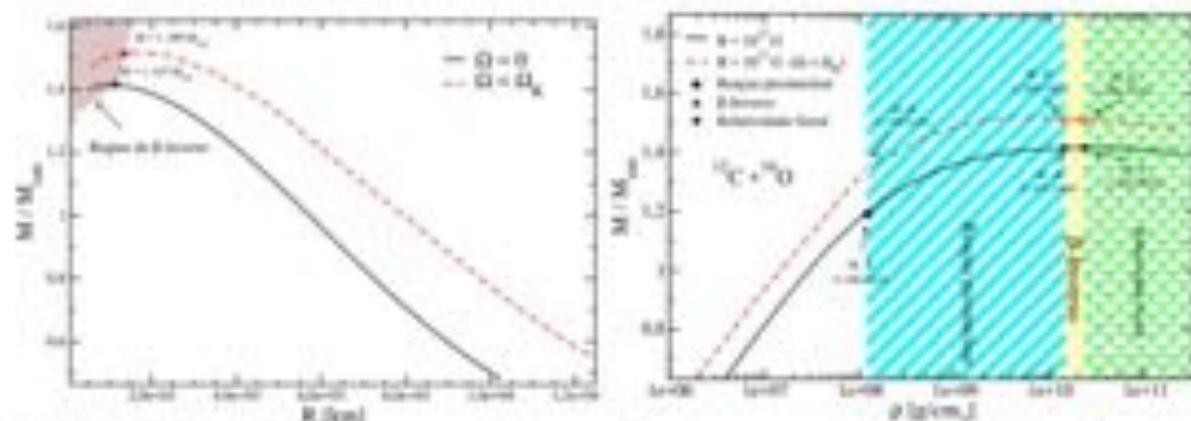


FIGURA 5.5 – Relação massa raio (esquerda) para uma anã branca magnética (com rotação/sem rotação) sem a contribuição da rede. A massa como função da densidade central (direita) para anãs brancas constituídas de uma mistura heterogênea de $^{12}\text{C} + ^{16}\text{O}$. As áreas coloridas representam os limites das densidades centrais para as instabilidades das reações piconucleares, β -inverso e para relatividade geral.

efeito na frequência de Kepler ao diminuí-la e portanto tornando a estrela mais instável para rotações rápidas. Como podemos ver pela tabela (5.2), considerando a rede e o campo magnético $B = 10^{12}$ G, a máxima frequência $\Omega = 0.7$ Hz e o período mínimo de 1.4 s.

As Figs. (5.5) e (5.6) mostram os diagramas massa-raio e a relação da massa em função da densidade de matéria central para uma anã branca magnetizada com $B = 10^{12}$ G para uma composição heterogênea do tipo $^{12}\text{C} + ^{16}\text{O}$. Na Fig. (5.5) a estrela é livre de interações elétrons-íons, enquanto na Fig. (5.6) as interações elétrons-íons são levadas em consideração. Podemos observar que as características que permearam os casos anteriores estão presentes para essas estrelas também, como o aumento de massa em torno de 10%, a diminuição da densidade central para estrelas com rotação e uma leve diminuição da massa máxima quando levada em consideração a contribuição da rede. Apresentamos valores para estas grandezas levando em conta diferentes instabilidades na tabela (5.3). No entanto, como vimos no capítulo anterior, devido à presença do oxigênio e reações de β -inverso aconteceram mais rapidamente na presença de elementos mais pesados, observamos que as reações devido a captura de elétrons acontecem antes da instabilidade pela relatividade geral para estrelas constituídas de C/O, conforme mostramos nas Figs. (5.5) e (5.6) lado direito representadas pelas áreas coloridas. Um outro resultado importante é referente às reações piconucleares: como o enxofre S oriundo da fusão de O+O tem sua instabilidade por reações β -inverso a densidades significativamente baixas comparadas as do oxigênio, a massa permitida é bem menor, na ordem de $1.2M_{\odot}$, valor coerente quando comparados a trabalhos que propõe anãs brancas constituídas de matéria fria (cold matter) do tipo BPS (GLENDENNING *et al.*, 1995b). No entanto, neste caso o valor do raio estelar é da ordem de ~ 3783 km para anãs brancas com contribuição da rede e ~ 4323 km

para anãs brancas sem contribuição da interação elétrons-íons que são raios muito grandes quando comparados ao menor raio que uma estrela pode ter na sua massa máxima comparado à literatura atual (SUN; MATHEWS, 2000). Isso deve-se ao fato que os limites de densidades para que as reações piconucleares aconteçam é de $\rho = 1.37 \times 10^8 \text{ g/cm}^3$ para essas estrelas, no entanto, essas reações ainda são pouco incertas devido ocorrerem a baixíssimas energia e também ao tempo que seria necessário para que a estrela queimasse todo seu oxigênio (RIBEIRO *et al.*, 1997; CHAMON *et al.*, 1997).

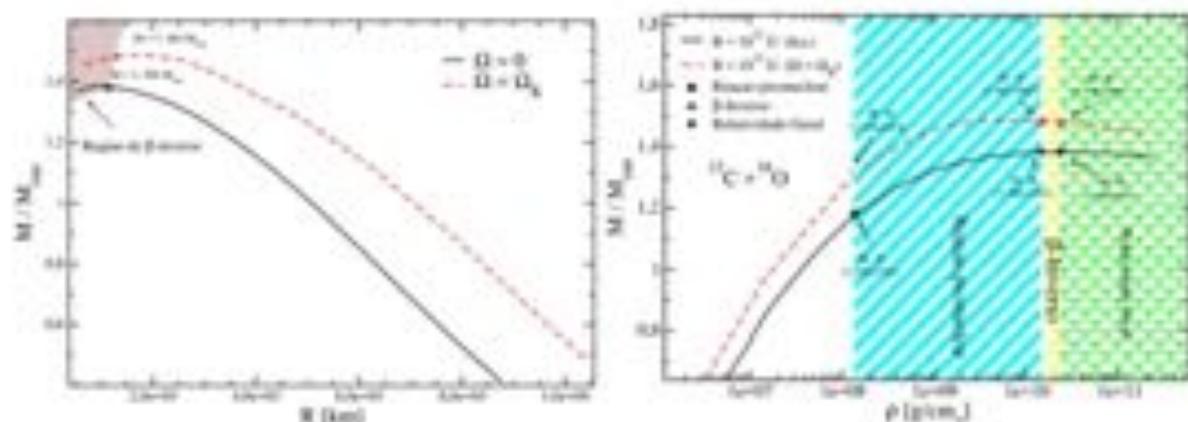


FIGURA 5.6 – Relação massa raio (esquerda) para uma anã branca magnética (com rotação/sem rotação) com a contribuição da rede. Massa como função da densidade central (direita) para anãs brancas constituídas de uma mistura heterogênea de $^{12}\text{C} + ^{16}\text{O}$. As áreas coloridas representam os limites das densidades centrais para as instabilidades das reações piconucleares, β -inverso e para relatividade geral.

$^{12}\text{C} + ^{16}\text{O}$	$B = 10^{12} \text{ G (bcc)}$	$B = 10^{12} \text{ G}$	$\Delta M_{\%}$
$M^{\text{I}}(\Omega = 0)$	1.384	1.415	2.2
R_{eq}	1131.792	1194.157	
$M^{\text{I}}(\Omega_K)$	1.482	1.509	1.8
R_{eq}	1306.720	1401.261	
$M^{\text{II}}(\Omega = 0)$	1.384	1.416	2.2
R_{eq}	900.473	1034.863	
$M^{\text{II}}(\Omega_K)$	1.478	1.495	1.1
R_{eq}	1080.723	1270.691	
$M^{\text{III}}(\Omega = 0)$	1.186	1.198	1.0
R_{eq}	3782.966	4323.396	
$M^{\text{III}}(\Omega_K)$	1.338	1.320	1.3
R_{eq}	4413.811	5319.416	

TABELA 5.3 – Massa máxima para anãs brancas constituída de uma mistura heterogênea de $^{12}\text{C} + ^{16}\text{O}$ com rotação e sem-rotação, e com campo magnético de $B = 10^{12} \text{ G}$ para diferentes instabilidades. A massa M é medido em M_{\odot} e o raio R em km.

A Fig. (5.7) mostra o período de Kepler versus a massa de rotação de uma anã branca magnética representada nas Figs. (5.5) e (5.6) com e sem contribuição da rede.

Observamos que a contribuição da rede em uma mistura heterogênea faz com que a estrela possa ter uma frequência de rotação maior. Neste caso encontramos para uma estrela constituída com oxigênio períodos de rotação da ordem de uma estrela homogênea constituída de carbono. A Fig. (5.7) mostra que considerando a interação elétron-íon (curva preta), anãs brancas magnéticas de C/O podem rodar com períodos mínimos da ordem 0.5 s e máxima frequência 2.0 Hz, para instabilidades do tipo β - *inverso* e com períodos mínimos da ordem 4.6 s e máxima frequência 0.2 Hz para instabilidades do tipo picnonuclear. Observamos que a rede faz com que as anãs brancas possam ter uma frequência de rotação máxima maior que as que não consideram a interação dos elétrons-íons, (curva vermelha).

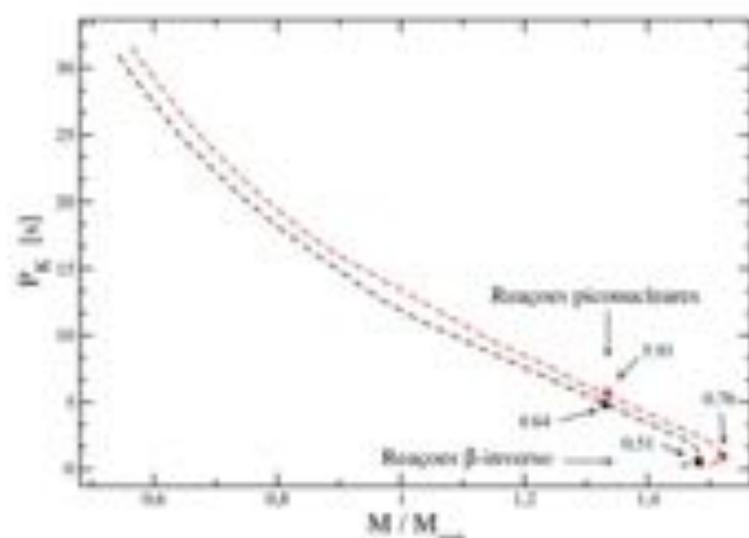


FIGURA 5.7 - Período de Kepler relativístico dado por $P_K = 2\pi/\Omega_d$ versus a massa de uma anã branca magnética com $B = 10^{12}$ G, com (preto) e sem (vermelho) contribuição da rede. Os valores apontados pelas setas representam os mínimos períodos de rotação das estrelas.

6 Campos Magnéticos Axi-simétricos

Estrelas cujo nascimento é oriundo de massas de estrelas progenitoras abaixo de 10 massas solares acabam sua evolução como anãs brancas (WEBER, 1999; GLENDENNING, 2012). Com uma composição típica composta principalmente de carbono, oxigênio ou hélio, as anãs brancas possuem densidades centrais até $\sim 10^{11}$ g/cm³. Elas podem ser muito quentes (ALTHAUS *et al.*, 2009), terem rotações rápidas (ARUTYUNYAN *et al.*, 1971; BOSHKAYEV *et al.*, 2013; HAITLE, 1967) e serem fortemente magnetizadas (COELHO *et al.*, 2014; LOBATO *et al.*, 2016). Os campos magnéticos na superfície observados nessas anãs brancas magnéticas podem cobrir um intervalo de 10^5 G à 10^9 G (TERADA *et al.*, 2008b; REEMERS *et al.*, 1996; SCHMIDT; SMITH, 1995; KEMP *et al.*, 1970; PUTNEY, 1995; ANGEL, 1978). Os campos magnéticos internos das anãs brancas não são conhecidos, mas espera-se que sejam maiores do que os seus campos magnéticos na superfície. Isto é devido ao fato de que na magnetohidrodinâmica (MHD) o campo magnético B é “congelado” no fluido e $B \propto \rho$ sendo ρ a densidade de massa local, ver por exemplo, Refs. (MESTEL, 2012; LANDAU *et al.*, 1958).

Uma estimativa decorrente do teorema de virial igualando a energia do campo magnético com a energia de ligação gravitacional, nos indica um valor limite aproximado para o campo magnético dentro de uma estrela anã branca na ordem de $B \sim 10^{13}$ G. Por outro lado, cálculos analíticos e numéricos, ambos numa teoria newtoniana, bem como na teoria da relatividade geral, mostram que anãs brancas podem ter campos magnéticos internos tão grandes quanto $B = 10^{12-16}$ G (ANGEL, 1978; BERA; BHATTACHARYA, 2014; BERA; BHATTACHARYA, 2016; FRANZON; SCHRAMM, 2015). Recentemente, as relações massa-raio de anãs brancas magnéticas têm sido intensamente discutidas na literatura (SUI; MATHEWS, 2000; BERA; BHATTACHARYA, 2014; FRANZON; SCHRAMM, 2015)

Trabalhos anteriores para anãs brancas magnetizadas mostraram que a rotação diferencial pode aumentar a massa das anãs brancas sob ação do campo magnético até $3.1 M_{\odot}$. De acordo com (BERA; BHATTACHARYA, 2016), componentes do campo magnético puramente toroidal podem elevar as massas das anãs brancas até $5.0 M_{\odot}$. Neste tra-

balho computamos a estrutura das anãs brancas magnéticas resolvendo as equações de Einstein-Maxwell com um campo magnético poloidal.

6.1 Anãs brancas com campos magnéticos axi-simétricos

A técnica numérica utilizada neste trabalho foi aplicada pela primeira vez para as estrelas de nêutrons magnéticas com e sem rotação nos artigos (BONAZZOLA *et al.*, 1993; BOCQUET *et al.*, 1995b) e mais recentemente nas referências (FRANZON *et al.*, 2016b; CHATTERJEE *et al.*, 2015; FRANZON *et al.*, 2016a). O mesmo formalismo foi usado para o estudo de anãs brancas magnetizadas e com rotação em (FRANZON; SCHRAMM, 2015). Nós construímos configurações de equilíbrio estelares resolvendo a equações de campo de Einstein-Maxwell em uma abordagem da relatividade geral. Para mais detalhes sobre as equações gravitacionais e procedimento numérico, ver (GOURGOULHON, 2012)

Aqui, mostramos as equações eletromagnéticas que juntas com as equações gravitacionais, são resolvidas numericamente por meio do método pseudo-espectral. Neste contexto, o tensor momento-energia $T_{\alpha\beta}$ é composto por termos de matéria (sem efeitos de campos magnéticos) e termos de origem eletromagnética: O tensor momento-energia é então escrito como (GOURGOULHON, 2012) :

$$T_{\alpha\beta} = (\epsilon + p)u_\alpha u_\beta + pg_{\alpha\beta} + \frac{1}{\mu_0} \left(F_{\alpha\gamma} F_\beta^\gamma - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} g_{\alpha\beta} \right), \quad (6.1)$$

sendo $F_{\alpha\beta}$ o tensor de Faraday anti-simétrico definido como $F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$, onde A_μ é o quadri-potencial do eletromagnetismo $A_\mu = (A_t, 0, 0, A_\phi)$, considerando um campo magnético poloidal com apenas componentes r e θ . A energia total do sistema é dada por ϵ , a pressão é p , u_α é a quadri-velocidade do fluido e $g_{\alpha\beta}$ é o tensor métrico. O primeiro termo na equação (6.1) representa a contribuição da matéria isotrópica para o tensor momento-energia de um fluido perfeito, enquanto o segundo termo é a contribuição do campo eletromagnético anisotrópico. Não incluímos o termo anisotrópico na equação (6.1) devido à magnetização, como foi feito na referência (FRANZON *et al.*, 2016b) devido ao fato de que neste trabalho para o estudo de campos magnéticos axi-simétricos não estamos levando em conta os efeitos microscópicos devido ao campo magnético na EOS, especificamente os níveis de Landau e magnetização que foram discutidos no capítulo 3. Um vez que para campos com valores inferior a $B = 10^{15}$ G os níveis de Landau podem ser desprezados para altas densidades como pode ser visto na Fig. (3.5) e também o termo devido à magnetização. Contudo, estamos levando em consideração os efeitos macroscópicos do campo magnético na determinação a estrutura global da estrela da estrela, ao considerar a contribuição da energia magnética na massa da estrela e as pressões paralela e perpendicular ao campo magnético que são diferentes e surgem do termo $B^2/8\pi$

que é calculado auto-consistentemente resolvendo as equações de Einstein-Maxwell. Este termo varia dentro da estrela, sendo mais intenso no centro e menor perto da superfície, mas mantendo a simetria axial em torno do eixo z (campo magnético poloidal).

A escolha das coordenadas na relatividade geral é de suma importância não só para escrever as equações gravitacionais de forma vantajosa, mas também para torná-las simplificáveis para obter a solução numérica. No presente caso, devido à simetria do sistema as coordenadas escolhidas são as do formalismo 3+1 ou também conhecido como Maximal-Cortesso-quasi-isotrópicos (MSQI) (FRANZON *et al.*, 2016b). O formalismo 3+1 (GOURGOULHON, 2012) consiste em escrever as equações de Einstein, que a priori é um sistema de equações diferenciais parciais de segunda ordem para a métrica $g_{\alpha\beta}$ em um sistema de primeira ordem no tempo. É uma aproximação da relatividade geral de Einstein que se traduz no fatiamento do espaço-tempo em hiper-superfícies. Esta escolha evita problemas de singularidade que podem aparecer no centro do objeto e das fatias assintoticamente planas. Na década de 70 este formalismo se tornou a ferramenta básica para a então nascente relatividade numérica, e hoje em dia a maioria dos códigos para resolver as equações de Einstein são baseados no formalismo 3+1. O tensor métrico no formalismo 3+1 para coordenadas de um sistema axi-simétrico com coordenadas (t, r, θ, ϕ) pode ser expresso como (GOURGOULHON, 2012):

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + \Psi^2 r^2 \sin^2 \theta (d\phi - N^\phi dt)^2 + \lambda^2 (dr^2 + r^2 d\theta^2), \quad (6.2)$$

com N , N^ϕ , Ψ e λ sendo funções das coordenadas (r, θ) . As componentes do campo elétrico podem ser escritas como (LICHNEROWICZ, 1967):

$$E_\alpha = F_{\alpha\beta} n^\beta = \left(0, \frac{1}{N} \left[\frac{\partial A_t}{\partial r} + N^\phi \frac{\partial A_\phi}{\partial r} \right], \frac{1}{N} \left[\frac{\partial A_t}{\partial \theta} + N^\phi \frac{\partial A_\phi}{\partial \theta} \right], 0 \right) \quad (6.3)$$

e as do campo magnético como

$$B_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} n^\beta F^{\gamma\delta} = \left(0, \frac{1}{A^2 B r^2 \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \theta}, -\frac{1}{A^2 B r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial r}, 0 \right) \quad (6.4)$$

onde A e B são funções das coordenadas (r, θ) e são correlacionadas com as funções Ψ e λ da métrica.

O tensor de Faraday $F_{\alpha\beta}$ pode ser derivado a partir do quadri-potencial eletromagné-

tico $F_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}$, de modo que as equações homogêneas de Maxwell

$$F_{\alpha\beta;\gamma} + F_{\beta\gamma;\alpha} + F_{\gamma\alpha;\beta} = 0 \quad (6.5)$$

são automaticamente satisfeitas, aqui utilizamos a notação simplificada para as derivadas parciais de um campo vetorial ou tensorial $A_{\nu,\mu} = \partial_\mu A_\nu$ e $F_{\alpha\beta;\gamma} = \partial_\gamma F_{\alpha\beta}$. As equações inhomogêneas de Maxwell

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu \quad (6.6)$$

podem ser descritas em termo das duas componentes não nulas do potencial eletromagnético A_μ através da equação de Maxwell-Gauss (FRANZON *et al.*, 2016b). Temos então:

$$\begin{aligned} \Delta_1 A_\nu &= -\mu_0 \lambda^2 (j_\nu + j_\nu) - \frac{\Psi^2}{N^2} N^\theta r^2 \sin^2 \theta \partial A_\nu \partial N^\theta \\ &- \left(1 + \frac{\Psi^2}{N^2} r^2 \sin^2 \theta (N^\theta)^2 \right) \partial A_\nu \partial N^\theta \\ &- \left(\partial A_\nu + 2N^\theta \partial A_\nu \right) \partial(\beta - \nu) \\ &- 2 \frac{N^\theta}{r} \left(\frac{\partial A_\nu}{\partial r} + \frac{1}{\tan \theta} \frac{\partial A_\nu}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (6.7)$$

e através da equação Maxwell-Ampère como

$$\begin{aligned} \hat{\Delta}_2 \hat{A}_\nu &= -\mu_0 \lambda^2 \Psi^2 (j^\nu - N^\theta j^\nu) r \sin \theta \\ &+ \frac{\Psi}{N^2} r \sin \theta \partial N^\theta (\partial A_\nu + N^\theta \partial A_\nu) \\ &+ \frac{1}{r \sin \theta} \partial A_\nu \partial(\beta - \nu) \end{aligned} \quad (6.8)$$

sendo

$$\hat{A}_\nu = \frac{A_\nu}{r \sin \theta} \quad (6.9)$$

onde Δ_1 , $\hat{\Delta}_2$, Δ_2 e $\partial_\alpha \partial_\beta$ tem as seguintes notações

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \tan \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \hat{\Delta}_2 &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \tan \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \\ &= \Delta_1 - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \\ \Delta_2 &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \\ \partial_\alpha \partial_\beta &= \frac{\partial_\alpha \partial_\beta}{\partial r \partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial_\alpha \partial_\beta}{\partial \theta \partial \theta} \end{aligned}$$

e

$$\nu = \ln A, \quad \beta = \ln \Psi, \quad \alpha = \ln \lambda.$$

No formalismo 3 + 1 sob os pressupostos do espaço-tempo estático e axi-simétrico, as equações de Einstein para as potências métricas da equação (6.1) são dados por (LICHNEROWICZ, 1967; DONAZZOLA *et al.*, 1993; GOURGOULHON, 2012):

$$\Delta_3 \nu = 4\pi G \lambda^2 (E + S_r^r) + \frac{\Psi^2 r^2 \sin^2 \theta}{2N^2} (\partial N^\theta)^2 - \partial_\theta \partial (\nu + \beta) \quad (6.10)$$

$$\Delta_3 (N^\theta r \sin \theta) = -16\pi G \frac{N \lambda^2}{\Psi} \frac{J_\theta}{r \sin \theta} - r \sin \theta \partial N^\theta \partial (3\beta - \nu) \quad (6.11)$$

$$\Delta_r [(N\Psi - 1)r \sin \theta] = 8\pi G N \lambda^2 \Psi r \sin \theta (S_r^r + S_\theta^\theta) \quad (6.12)$$

$$\Delta_3 (\nu_\theta) = 8\pi G \lambda^2 S_\theta^\theta + \frac{3\Psi^2 r^2 \sin^2 \theta}{4N^2} (\partial N^\theta) - (\partial r)^2 \quad (6.13)$$

onde E é a densidade de energia total do fluido, dada pela seguinte expressão:

$$E = \gamma^2 (\epsilon + p) - p \quad (6.14)$$

J_θ é o fluxo da densidade de momento

$$J_\theta = \gamma^2 (\epsilon + p) U \quad (6.15)$$

e S_r^r , S_θ^θ e S_ϕ^ϕ são as componentes do tri-tensor expresso por (FRANZON *et al.*, 2016b)

$$S_r^r = S_\theta^\theta = p \quad (6.16)$$

e

$$S_\phi^\phi = p + (E + p)U^2 \quad (6.17)$$

onde o fator de Lorentz γ é escrito como

$$\gamma = (1 - U^2)^{-1/2} \quad (6.18)$$

sendo U a velocidade do fluido definida como:

$$U = \frac{\Psi r \sin \theta}{N} (\Omega - N^\theta) \quad (6.19)$$

com a função N^θ e a velocidade angular Ω , as quais são medidas por um observador no infinito (GOURGOULHON, 2012). Seguindo a referência (DONAZZOLA *et al.*, 1993), a

equação de movimento para uma estrela dotada de campos magnéticos ($\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$) pode ser escrita como:

$$H(r, \theta) + \nu(r, \theta) + M(r, \theta) = \text{const}, \quad (6.20)$$

onde $H(r, \theta)$ é a função entalpia definida em termos da densidade de número bariônico n :

$$H = \int_a^n \frac{1}{\varepsilon(n_1) + p(n_1)} \frac{dP}{dn_1} (n_1) dn_1. \quad (6.21)$$

O termo $\nu(r, \theta)$ na equação (6.20) corresponde ao potencial gravitacional e tem como definição $\nu = \ln N$ e o potencial magnético $M(r, \theta)$ pode ser expresso como

$$M(r, \theta) = M(A_\phi(r, \theta)) := - \int_{A_\phi(r, \theta)}^a f(x) dx, \quad (6.22)$$

com $H(r, \theta)$, $\nu(r, \theta)$ e $M(r, \theta)$ tendo dimensão de energia e $f(x)$ sendo uma função regular arbitrária relacionando as componentes da corrente elétrica ao potencial eletromagnético A_ϕ como uma condição de integrabilidade da equação do fluido estacionário (BONAZZOLA *et al.*, 1993) (ver equação (5.29)). Os modelos estelares magnéticos são obtidos supondo um valor constante para uma função de corrente adimensional f_0 . A função f_0 está relacionada com a corrente elétrica macroscópica pela relação $J^\theta = \Omega A_\phi + (e + p)f_0$. Segundo (BOCQUET *et al.*, 1995b), outras escolhas para $f(x)$ são possíveis, mas as conclusões gerais permanecem as mesmas.

Note que todas as grandezas dependem do potencial magnético A_ϕ . Definimos outras quantidades importantes no estudo de estrelas medidas por um observador Euleriano, são elas: o raio circunferencial R_{circ} da estrela

$$R_{\text{circ}} = A^2\left(r_{\text{eq}}, \frac{\pi}{2}\right) B\left(r_{\text{eq}}, \frac{\pi}{2}\right) r_{\text{eq}} \quad (6.23)$$

onde r_{eq} é a coordenada do raio equatorial. A massa da estrela é dada por:

$$M = \int \frac{N A^4}{B} \left(E + S_t + \frac{2}{N} N^\theta J^\phi \right) r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \quad (6.24)$$

e por fim a elipticidade, que mede o quão obata é a estrela, é dada por:

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{r_p}{r_e}\right)^2}. \quad (6.25)$$

6.2 Resultados

Nesta seção, discutimos os efeitos de campos magnéticos fortes nas propriedades globais das anãs brancas estacionárias tendo em conta as instabilidades devido ao decaimento β -inverso e às reações pícnucleares. Além disso, fazemos uso de uma equação de estado para a matéria que inclui tanto as interações elétron-íon com os últimos dados para as massas atômicas experimentais. As instabilidades relacionadas com a microfísica são fundamentais, uma vez que restringem as configurações de equilíbrio, limitando o campo magnético máximo que essas estrelas podem ter (CHAMEL *et al.*, 2013). Além de perfis magnéticos obtidos supondo funções de corrente constante, f_0 , como já feito por (FRANZON; SCHRAMM, 2015), nós resolvemos os modelos estelares para momentos de dipolo magnéticos constantes. Em (FRANZON; SCHRAMM, 2015) um simples gás de Fermi foi utilizado onde os processos microfísicos não eram abordados. Nesta tese levando em conta esta EOS mais realista, a massa máxima de uma anã branca não magnetizada é menor do que a considerada em (FRANZON; SCHRAMM, 2015), uma vez que a rede cristalina suaviza a EOS.

Na Fig. 6.1, nós mostramos a relação entre a massa gravitacional e a densidade central para uma sequência de estrelas com diferentes momentos de dipolos magnéticos μ e funções corrente f_0 . O momento de dipolo é definido como (ver (BONAZZOLA *et al.*, 1993)):

$$\frac{2\mu \cos \theta}{r^3} = B(r) \Big|_{r \rightarrow \infty}, \quad (6.26)$$

por considerarmos que para um observador no infinito a componente radial do campo pode ser a componente radial do campo de dipolo magnético. Como pode ser visto a partir da Fig. (6.1), um maior momento magnético μ conduz primeiro a um aumento na massa máxima da anã branca. No entanto, se aumentarmos μ acima de um determinado valor a massa máxima diminui. Isso é devido ao fato de que o raio estelar torna-se maior (ver também a Fig. (6.2)) e, portanto, o campo magnético na superfície da estrela (ver equação (6.26)) é reduzido. Como resultado, a força de Lorentz é proporcionalmente menor, fazendo as configurações de massa máximas estelares tornarem-se mais compactas.

Na Fig. 6.1, mostramos a massa com função da densidade de massa central de uma anã branca de carbono magnética para diferentes valores de f_0 e μ . A massa é uma função monotônica crescente para um valor de μ fixo, mas possui multi-valores e tem um comportamento decrescente se a corrente f_0 é mantida fixa. A área em cinza na Fig. (6.1) representa o regime de densidade onde as reações pícnucleares devem acontecer com o quadrado preto representando a massa gravitacional de uma estrela sem campo magnético no começo deste regime. A área verde mostra a instabilidade da relatividade geral, com o círculo preto marcando a massa gravitacional da estrela associada com esta instabilidade.

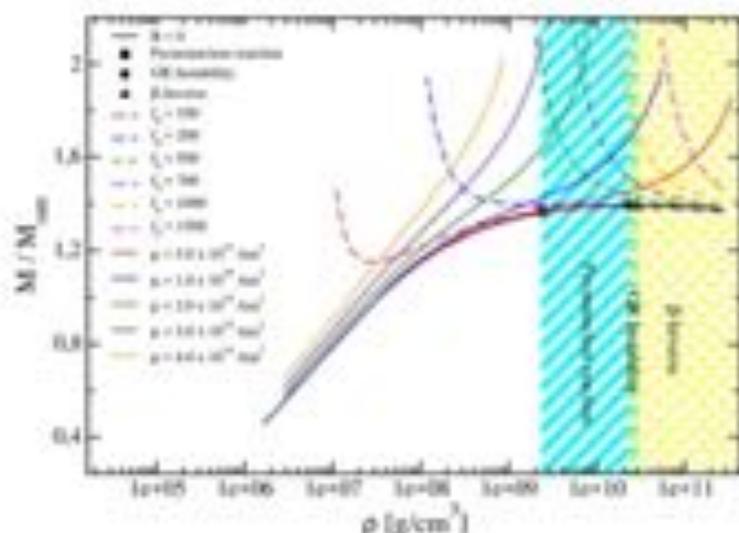


FIGURA 6.1 – Massa estelar como função de densidade de massa central para uma anã branca magnética de carbono assumindo uma função de corrente constante f_3 e diferentes momentos de dipolos magnéticos μ . As áreas coloridas representam as densidades de início das reações piconucleares e decaimento β -inverso. (ver tabela (4.6))

Em adição a partir da Fig. (6.1) nós vemos que a condição $\frac{dM}{d\rho} > 0$ é satisfeita ao longo da curvas para um momento de dipolo magnético μ fixo. Esta é a condição que indica a região de estabilidade de uma estrela esférica e não magnética sujeita a oscilações radiais.

De acordo com nossos cálculos, as instabilidades por relatividade geral acontecem antes que as reações β -inverso. Vale mencionar que nós fizemos uso do carbono ($A/Z=2$) para a composição interna da anã branca. O limiar para as reações β -inverso é representado pela área amarela. Nós podemos observar na Fig. (6.1) que a densidade crítica para as reações de fusão piconucleares limita a densidade central da anã branca em $2.39 \times 10^9 \text{ g/cm}^3$, o que limita o raio equatorial da estrela em $R \sim 1600 \text{ km}$ (ver Fig. (6.2)). A massa máxima de uma anã branca magnética (ponto final da curva $\mu = 3 \times 10^{24} \text{ Am}^2$) no qual ela está livre das regiões de instabilidades microfísicas é $\sim 2.12 M_\odot$ e o seu raio equatorial é $\sim 1596 \text{ km}$.

De acordo com a equação (6.26), o campo magnético gerado por um estrela é de um dipolo magnético no infinito. Contudo, dentro da estrela a forma dipolar é modificada, sendo suas linhas de campo diferentes das determinadas pelo momento de dipolo magnético μ e o raio estelar. Na Fig. (6.2), mostramos a relação massa-raio para anãs brancas magnetizadas para diferentes momentos de dipolo magnético μ . A partir da Fig. (6.2), nós vemos que as estrelas se tornam maiores para maiores valores de μ . A intensidade do campo magnético, no entanto, não pode ser extraído a partir da Fig. (6.2). A fim de fazer isso, nós retratamos na Fig. (6.3) a massa gravitacional como uma função do campos magnéticos da superfície (B_s) e central (B_c), do raio equatorial circunferencial (R_{circ}) e do número de densidade bariônica (n_b) para dois diferentes momentos de dipolos magnéticos

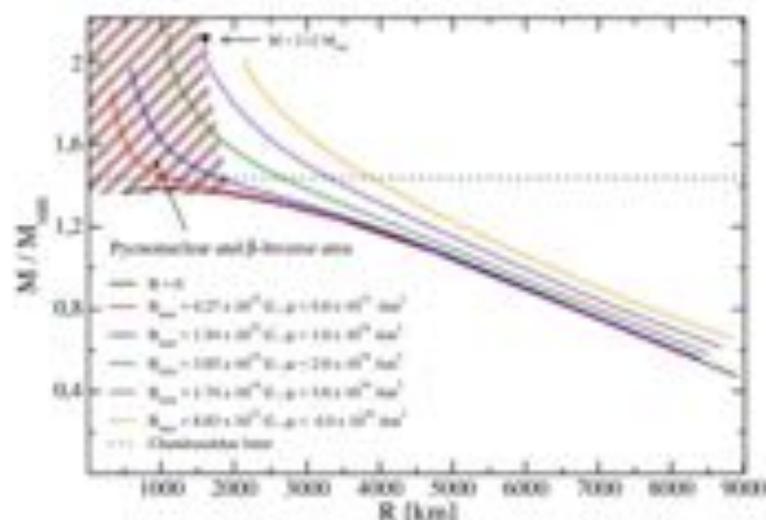


FIGURA 6.2 – Relação massa-raio para anãs brancas de carbono magnetizadas assumindo diferentes momentos de dipolo magnético, μ . A linha preta representa a relação massa-raio de anãs brancas de carbono não-magnetizadas. A linha horizontal representa o limite da massa de Chandrasekhar para estrelas esféricas. São também mostrados os valores do campo magnético central B_{max} (com o momento de dipolo magnético correspondente μ) atingido no centro das estrelas de massa máxima (ponto final da curva com μ fixo). As anãs brancas localizadas na região marrom estão sujeitas às instabilidades devido às reações piconucleares ou de decaimento β -inverso.

$\mu = 0.5 \times 10^{34} \text{Am}^2$ (linha vermelha) e $\mu = 4.0 \times 10^{34} \text{Am}^2$ (linha laranja). Nós podemos escolher outros valores de μ para esta comparação, mas as conclusões permanecem as mesmas.

Na Fig. (6.3), há um ponto de cruzamento entre as curvas com $\mu = 0.5 \times 10^{34} \text{Am}^2$ e $\mu = 4.0 \times 10^{34} \text{Am}^2$. Isto é devido ao fato de escalar o campo magnético como $\sim \frac{r}{R}$, com r sendo o raio, no qual é o raio estelar dentro do domínio de uma estrela. Estrelas com massas bariônicas fixas de $M_B = 1.00 M_\odot$ e $M_B = 1.80 M_\odot$ são representadas por linhas horizontais tracejadas na Fig. (6.3). De acordo com a equação (6.26), ao longo das diferentes curvas para um μ fixo, o campo magnético é determinado apenas pelo tamanho da estrela. No entanto, ao longo das linhas de massas bariônicas fixas, o campo magnético é uma combinação do momento de dipolo magnético μ e a coordenada radial r .

Olhando para a relação entre as massas estelares e os campos magnéticos da superfície e centrais nos diagramas $M \times B_s$ e $M \times B_c$ na Fig. (6.3) vê-se que as estrelas (com massas bariônicas fixas) acima do ponto de cruzamento das curvas $\mu = 0.5 \times 10^{34} \text{Am}^2$ (linha vermelha) e $\mu = 4.0 \times 10^{34} \text{Am}^2$ (linha laranja) possuem maiores campos magnéticos para menores momentos de dipolo magnético. Neste caso, uma sequência estelar, por exemplo, com $M_B = 1.80 M_\odot$, a partir de alta magnetização para um processo menos magnetizado de uma anã branca (indicada por setas pretas) será seguida por um aumento

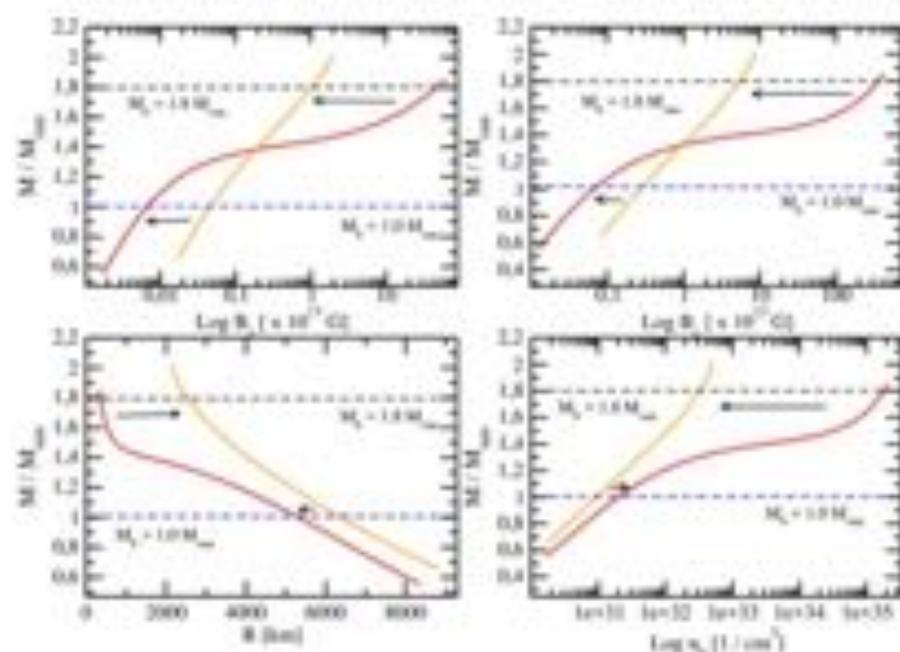


FIGURA 6.3 – Propriedades globais das anãs brancas de carbono magnetizadas para dois diferentes momentos de dipolo magnético, $\mu = 0.5 \times 10^{30} \text{Am}^2$ (linha vermelha) e $\mu = 4.0 \times 10^{30} \text{Am}^2$ (linha laranja). As linhas horizontais representam anãs brancas com massas bariônicas fixas de $M_B = 1.00 M_\odot$ e $M_B = 1.80 M_\odot$, respectivamente. As setas indicam uma possível redução do campo magnético destas estrelas (ver texto para detalhes).

no seu momentos de dipolo magnético de $\mu = 0.5 \times 10^{30} \text{Am}^2$ à $\mu = 4.0 \times 10^{30} \text{Am}^2$. Isto é acompanhado por um aumento no raio estelar (veja o diagrama $M \times R_{\text{eq}}$) e uma diminuição na densidade bariônica central (veja o diagrama $M \times \rho_c$). Por outro lado, abaixo do ponto de cruzamento, estrelas com massas bariônicas fixas têm uma redução em seus campos magnéticos diminuindo seus momentos de dipolo magnético (setas pretas). Nesse caso, as anãs brancas tornam-se menores e portanto, mais densas no centro (veja $M \times R_{\text{eq}}$ e $M \times \rho_c$ diagramas da Fig. (6.3) para $M_B = 1.00 M_\odot$).

Na Fig. (6.3) é interessante observar que estrelas com massas acima do ponto de cruzamento expandem o raio equatorial, ao mesmo tempo que os seus campos magnéticos reduzem-se. Nota-se que com o aumento do momento de dipolo magnético, a estrela (com massa bariônica fixa) se expande na direção equatorial devido à força de Lorentz. No entanto, o campo magnético estelar escala como $\frac{1}{R}$. Isso significa que, para uma estrela com $M_B = 1.80 M_\odot$, o aumento do momento de dipolo magnético μ é cancelado pelo aumento do raio, reduzindo o campo magnético. Isto é o oposto do esperado para estrelas com massas inferiores. Por exemplo, uma estrela com $M_B = 1.00 M_\odot$ diminui o seu momento de dipolo magnético e o seu raio. No entanto, neste caso, a diminuição do raio não é suficiente para cancelar a diminuição de μ . Como resultado, o campo magnético diminui proporcionalmente. Isto pode ser compreendido olhando para a variação do raio equatorial circular para as estrelas $M_B = 1.80 M_\odot$ e $M_B = 1.00 M_\odot$. No último caso,

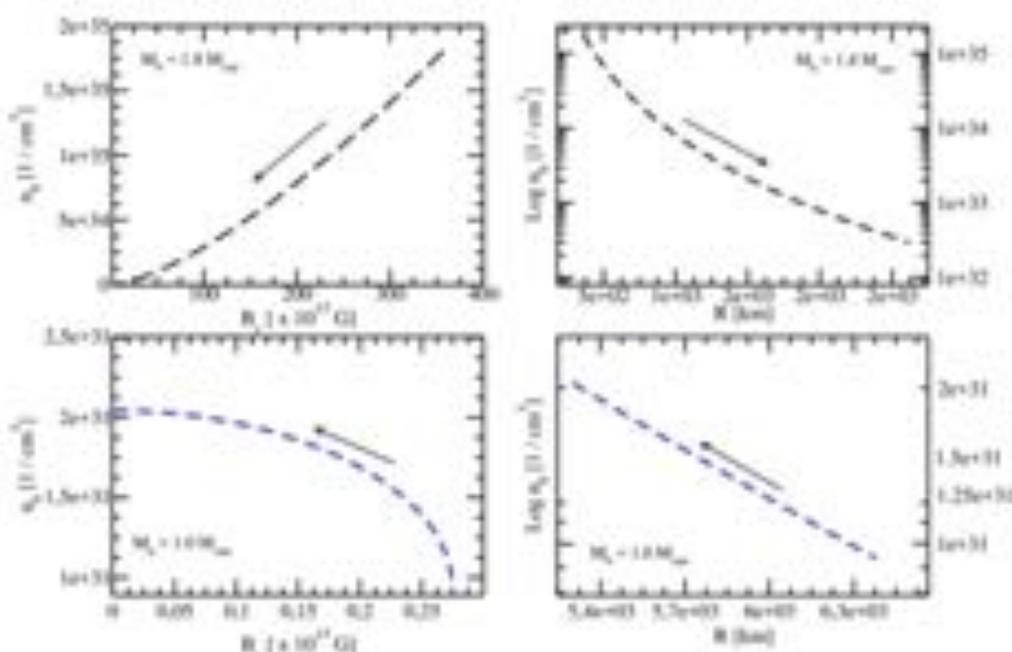


FIGURA 6.4 – Densidade de número bariônico como função do campo magnético e raio equatorial circular para anãs brancas magnetizadas com massas bariônicas fixas de $M_B = 1.00 M_\odot$ e $M_B = 1.80 M_\odot$.

temos que ΔR_{eq} é muito menor do que ΔR_{eq} para $M_B = 1.80 M_\odot$ quando levada em consideração a mesma variação (absoluta) do momento de dipolo magnético, ou seja, $|\Delta \mu| = 3.5 \times 10^{34} \text{ Am}^2$.

Na Fig. (6.4), vamos mostrar as propriedades globais de duas anãs brancas com massas bariônicas fixas $M_B = 1.00 M_\odot$ e $M_B = 1.80 M_\odot$, respectivamente. Os diagramas superiores retratam a densidade bariônica central como função do campo magnético central e raio circular equatorial para uma estrela com $M_B = 1.80 M_\odot$. Nesse caso como o campo magnético diminui, a densidade bariônica central torna-se menor, devido ao fato de que o raio está a aumentar. Por outro lado, uma estrela com $M_B = 1.00 M_\odot$ aumenta a sua densidade bariônica central, quando o campo magnético diminui, uma vez que o raio estelar é reduzido. Na Fig. (6.5), mostramos a estrutura das linhas do campo magnético poloidal para estrelas estáticas de massas iguais à $M = 1.0 M_\odot$ e $M = 2.12 M_\odot$ respectivamente, para um μ fixo de $3.0 \times 10^{34} \text{ Am}^2$. Como vimos na Fig. (6.1) ambas as estrelas são estáveis por reações do tipo pícnonuclear e β -inverso. Podemos observar que as linhas de campo magnético são mais concentradas a medida que a estrela torna-se mais compacta. Observamos para campos magnéticos centrais maiores e massas mais elevadas (acima do limite de Chandrasekhar), uma nova fenomenologia para a estrutura: ao aumentar o campo magnético da estrela, a densidade central de número bariônico aumenta proporcionalmente, uma vez que o raio equatorial diminui, tornando as anãs brancas magnetizadas mais compactas.

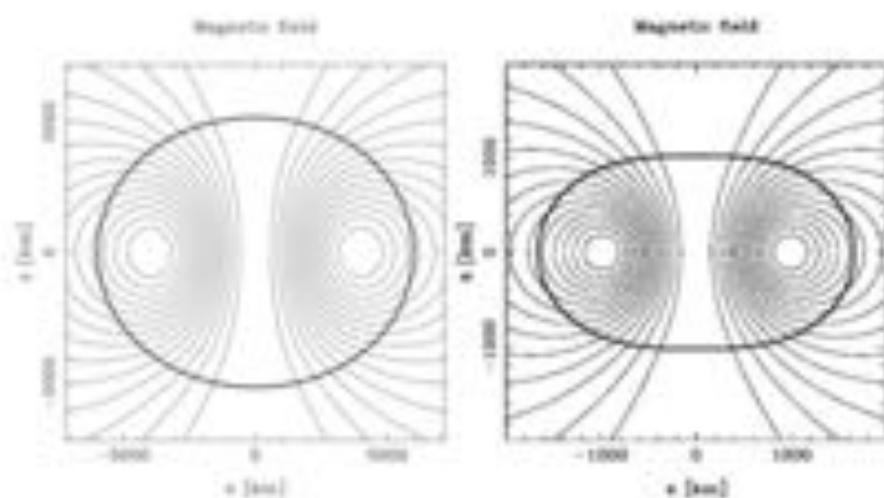


FIGURA 6.5 - Linhas do campo magnético poloidal para anãs brancas de carbono estáticas de massas iguais à $M = 1.0 M_{\odot}$ e $M = 2.12 M_{\odot}$, respectivamente, para um μ fixo de $3.0 \times 10^{34} \text{ Am}^2$

7 Anãs Brancas Estranhas

7.1 Matéria estranha em estrelas compactas

A existência de estrelas composta por matéria estranha formada de quarks u , d e o estranho, tem sido proposta há bastante tempo. Muitos desses trabalhos consideraram esta matéria no centro das estrelas de nêutrons ou formando estrelas de quarks sem presença de hádrons (ALCOCK *et al.*, 1986; BUDALLA, 2005; NA *et al.*, 2012; CHU *et al.*, 2015). Evidências de estrelas de nêutrons mais compactas que o normal e também com evolução térmica acelerada tem levado astrofísicos a proporem a presença de matéria estranha nessas estrelas. Essas candidatas a estrelas com matéria estranha em seu interior, podem ser encontradas nas referências (XU, 2005; SCHAFFNER-BIELICH, 2005; WEBER, 2005; MAJCZYNA; MADEJ, 2006).

Alguns autores (BODMER, 1971; WITTEN, 1984), propuseram teoricamente que a matéria estranha de quarks pode constituir o verdadeiro estado fundamental da interação forte ao invés do ^{56}Fe . Se tal hipótese é verdadeira, a matéria estranha pode realmente estar presente nas estrelas compactas. Estrelas com matéria estranha podem criar uma crosta nuclear basicamente a partir de dois processos: uma jovem estrela estranha acreta matéria do meio interestelar, ou durante sua criação em uma supernova desde que sua progenitora já tenha acretado um nugget de matéria estranha (GLENDEENING *et al.*, 1995a; WEBER, 2005).

A crosta de matéria nuclear será separada do núcleo de quarks devido a um dipolo elétrico que se formará entre as camadas do núcleo de quarks e da superfície de matéria nuclear (GLENDEENING *et al.*, 1995b). A existência do dipolo elétrico é fundamental, visto que ele isola a matéria nuclear da crosta de ser convertida em matéria quarkônica. A densidade da crosta é limitada pela densidade do nêutron-drip (gotejamento de nêutrons) ($\rho_{\text{drip}} \approx 4.2 \times 10^{14} \text{ g/cm}^3$), densidade em que os nêutrons dos núcleos da crosta começam a ser atraídos pela força gravitacional para o núcleo de quarks e misturados com a matéria estranha.

Nesta seção nós trataremos especificamente da possível existência de anãs brancas com a presença de matéria estranha em seu núcleo, com a crosta formada de uma matéria

heterogênea do tipo C/O e sob efeitos da interação elétron-íon de uma rede cristalina do tipo bcc e sujeito a um campo magnético. Esta hipótese foi proposta inicialmente por Glendenning e Weber, ver referências (GLENDEENING *et al.*, 1995b; GLENDEENING *et al.*, 1995a; GLENDEENING, 2012).

7.2 Modelo de sacola - MIT

A matéria de quarks é descrita pela teoria de campos de quarks e glúons, também conhecida como cromodinâmica quântica (QCD). Atualmente são desconhecidas as soluções das equações de movimento da QCD para densidades bariônicas finitas. Por essa razão, confiamos em modelos da QCD não perturbativos para a matéria de quark. Um dos modelos difundidos utilizado para descrever a matéria de quarks é o modelo de sacola - MIT (conhecido como MIT Bag Model) (FARHI; JAFFE, 1984; WEBER, 2005). Apresentamos nesta seção a matéria de quark estranho usando o modelo de sacola - MIT para quarks estranhos com massa (para os quarks u e d as suas massas correntes por serem muito pequenas são consideradas nulas), e com primeira ordem de correção na constante de acoplamento da interação forte α_s (FARHI; JAFFE, 1984). Nosso modelo de matéria estranha é um gás de Fermi degenerado de quarks, u (up), d (down), s (estranho) e e/e^+ (elétron/positron) em equilíbrio químico mantidos por reações de interações fracas dadas por:

$$d \leftrightarrow u + e + \bar{\nu}_e \quad (7.1)$$

$$s \leftrightarrow u + e + \bar{\nu}_e \quad (7.2)$$

$$s + u \leftrightarrow u + d \quad (7.3)$$

A partir de (7.1)-(7.3) os potenciais químicos obedecem então as relações:

$$\mu_d = \mu_u \equiv \mu \quad (7.4)$$

$$\mu_s = \mu_e \quad (7.5)$$

onde μ_i , para $i = u, d, s$ e e são os potenciais químicos dos quarks up, down, estranho e elétrons respectivamente. As equações (7.4) e (7.5) implicam que existem apenas dois potenciais químicos independentes por exemplo μ_u e μ_e . Os neutrinos não desempenham qualquer papel para a composição da equação de estado, pois escapam da estrela.

O potencial grande-canônico Ω , pode ser escrito como:

$$\Omega = U - TS - \mu N, \quad (7.6)$$

sendo U a densidade de energia interna, T a temperatura, S a densidade de entropia, μ o potencial químico e N a densidade de partículas. O potencial grande-canônico para os quarks u e d sem massa e elétrons, com o quark estranho s massivo até a primeira ordem de correção em α_s , são dados por (FARHI; JAFFE, 1984)

$$\Omega_u = -\frac{\mu_u^4}{4\pi^2} \left(1 - \frac{2\alpha_s}{\pi}\right), \quad (7.7)$$

$$\Omega_d = -\frac{\mu_d^4}{4\pi^2} \left(1 - \frac{2\alpha_s}{\pi}\right), \quad (7.8)$$

$$\Omega_s = -\frac{\mu_s^4}{12\pi^2}, \quad (7.9)$$

$$\begin{aligned} \Omega_e = & -\frac{1}{4\pi^2} \left\{ \mu_e \sqrt{\mu_e^2 - m_e^2} \left(\mu_e^2 - \frac{5}{2} m_e^2 \right) + \frac{3}{2} m_e^4 \ln \left(\frac{\mu_e + \sqrt{\mu_e^2 - m_e^2}}{m_e} \right) \right. \\ & - \frac{2\alpha_s}{\pi} \left[3 \left(\mu_e \sqrt{\mu_e^2 - m_e^2} - m_e^2 \ln \left(\frac{\mu_e + \sqrt{\mu_e^2 - m_e^2}}{m_e} \right) \right)^2 - 2 (\mu_e^2 - m_e^2)^2 \right. \\ & \left. \left. + 3 m_e^4 \ln^2 \frac{m_e}{\mu_e} + 6 \ln \frac{\sigma}{\mu_e} \left(\mu_e m_e^2 \sqrt{\mu_e^2 - m_e^2} - m_e^4 \ln \left(\frac{\mu_e + \sqrt{\mu_e^2 - m_e^2}}{m_e} \right) \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (7.10)$$

onde σ é a constante de renormalização, cujo o valor tem que ser da ordem do potencial químico μ_e . Para um gás degenerado de matéria estranha, a densidade de número de quarks para cada espécie pode ser obtida de

$$N_i = -\frac{\partial \Omega_i}{\partial \mu_i}, \quad (7.11)$$

com $i = u, d, s$ e e .

É suposto que um sistema de massa (bulk system) tenha sua carga neutralizada. A condição de neutralização da carga elétrica entre quarks é dada por

$$\sum_{i=u,d,s,e} q_i N_i = 0 \quad (7.12)$$

onde q_i é o número de carga elétrica de cada sabor dos quarks e elétron, listado na tabela 7.1. Podemos a partir de (7.12), (7.4) e (7.5) deixar apenas um potencial químico independente para obter a solução, e escolhemos μ .

No modelo de sacola a pressão dos quarks e léptons individuais contidos na sacola é

Sabores dos quarks	u	d	s	c
q	$+\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1

TABELA 7.1 – Número de carga elétrica q dos quarks (WEBER, 2005).

contrabalançada pela pressão da bolsa externa B . Assim, a expressão para pressão é

$$P = -B - \sum_{i=u,d,s,c} \Omega_i \quad (7.13)$$

onde B é a constante da sacola. A densidade de energia para cada tipo de quark confinado na sacola é dado por

$$\epsilon = \sum_{i=u,d,s,c} (\Omega_i + \mu_i N_i) + B \quad (7.14)$$

A partir das equações (7.13) e (7.14), no limite onde $\alpha_i \rightarrow 0$ e para quarks sem massa $m_i \rightarrow 0$, nós obtemos analiticamente a equação de estado para o modelo de sacola dada por

$$P = \frac{\epsilon - 4B}{3}. \quad (7.15)$$

7.3 Anãs brancas estranhas

Nesta seção discutiremos a existência de anãs brancas com a presença de matéria estranha em seu núcleo. As anãs brancas têm densidades e temperaturas demasiadamente altas para que ocorra uma transição espontânea da matéria nuclear para a matéria de quarks. No entanto, as anãs brancas estranhas são esperadas ser formadas durante a sequência principal de sua progenitora por acreção de matéria, ou por um nugget de matéria estranha. Tais nuggets podem ser remanescentes do início do universo ou como resultado de fragmentos ejetados da coalescência da matéria estranha de estrelas de nêutrons. Uma vez tal sistema formado, o nugget de matéria estranha seria gravitacionalmente confinado no centro da estrela e começaria a converter matéria nuclear normal em matéria estranha, impossibilitando a formação de uma anã branca estranha.

Contando que este evento não ocorra, devido à existência de um forte dipolo elétrico que separa o núcleo de matéria estranha da crosta constituída por um gás de elétrons uma anã estranha seria formada contendo um pequeno caroço de matéria estranha e uma crosta formada por um gás de elétrons e uma rede cristalina de íons, como a matéria de uma anã branca descrita nos capítulos anteriores. Vale a pena salientar, que esta estrutura de anã branca estranha aqui proposta é nova na literatura, pois estas anãs brancas foram

anteriormente estudadas considerando fora do caroço de quarks matéria nuclear igual a de uma crosta de estrelas de nêutrons, descritas pela equação BPS (WEBER, 2005).

Tais anãs brancas estranhas assemelham-se às anãs brancas, mas com uma característica marcante: possuem um raio menor. Esta consequência dimana da matéria estranha ter um maior número de graus de liberdade, podendo ser mais compacta que uma anã branca normal, aumentando assim a pressão no seu interior.

7.3.1 O Modelo

Nós obtemos a equação de equilíbrio hidrostático de uma anã branca estranha estática utilizada para construção do diagrama massa-raio, a partir da equação de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) dada na seção (5.1) por:

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{G\mathcal{E}(r)m(r)}{c^2 r^2} \left[1 + \frac{P(r)}{\mathcal{E}(r)} \right] \left[1 + \frac{4\pi r^2 P(r)}{m(r)c^2} \right] \left[1 - \frac{2Gm(r)}{c^2 r} \right]^{-1}, \quad (7.16)$$

com m sendo a massa no interior da estrela e dada por

$$m(r) = \frac{4\pi}{c^2} \int_0^r r'^2 \mathcal{E} dr'. \quad (7.17)$$

e \mathcal{E} a densidade de energia e P a pressão. A massa total da estrela M e o raio R são encontrados a partir da integração da equação (7.17).

Nos capítulos anteriores nós fizemos um estudo sistemático para anãs brancas magnéticas, onde levamos em conta termos de correções à equação de estado, como por exemplo, a interação elétron-íons da rede e a massa experimental nuclear dos íons constituintes. Ainda observamos possíveis efeitos do campo magnético na estrutura da estrela como a anisotropia. Notamos que as correções da rede podem causar modificações sutis ao diagrama massa-raio de uma anã branca magnética.

Pretendemos nesta seção, calcular algumas propriedades dessa nova classe denominada anãs brancas estranhas usando nossa EOS para anãs brancas magnéticas para a crosta e comparar com as descritas por Weber, onde foi usada as EOS de Baym-Pethick-Sutherland (BPS) em (WEBER, 2005). Também evidenciaremos algumas anãs brancas que são muito compactas do banco de dados obtidos com Hipparcos paralaxe (PROVENCAL *et al.*, 1998) e que podem ser possíveis anãs brancas com matéria estranha em seu núcleo.

A existência de matéria estranha no interior das anãs brancas, é uma alternativa consistente para explicar as anãs brancas com raios menores. Este fato ocorre devido à matéria constituída por quarks ter densidades maiores do que a matéria nuclear. Esta densidade é mais elevada por dois motivos. A energia do vácuo da QCD diminui a

pressão de degenerescência dos quarks e glúons quando as densidades são elevadas e com o domínio da energia do vácuo da QCD na energia não se necessita da gravidade para manter a matéria estranha coesa dentro da estrela pois a pressão pode se anular na superfície mesmo para uma densidade de energia alta e não nula.

A matéria estranha é um sistema auto-ligado, dessa forma a estrela não tem dificuldades para manter a matéria em equilíbrio hidrostático. As altas densidades também só são possíveis devido a existência de três tipos de quarks na matéria no núcleo da estrela, uma vez que os graus de liberdade adicionais da matéria estranha (quark s) diminuem a pressão de degenerescência e a energia de Fermi, permitindo a matéria tornar-se mais compacta e a estrela diminuir seu raio.

As anãs brancas estranhas descritas nesta tese tem sua estrutura dividida em três regiões:

- a crosta constituída por uma equação de estado de elétrons degenerados magnetizado, mais o efeito da rede cristalina dos íons;
- a região crosta-núcleo que é constituída por um forte dipolo elétrico;
- e o núcleo constituído por matéria estranha.

A seguir eu irei explicar sobre cada região separadamente.

7.3.2 A crosta

A crosta de uma anã branca estranha é composta do um gás degenerado de elétrons. Em trabalhos anteriores alguns autores (GLENDEENING *et al.*, 1995b; GLENDEENING *et al.*, 1995a; GLENDEENING, 2012) propuseram a crosta sendo composta por uma matéria fria (cold matter) descrita por uma equação de estado do tipo BPS, sendo a densidade da crosta limitada à densidade de gotejamento de nêutron (nêutron-drip) $\rho = 4.2 \times 10^{11} \text{g/cm}^3$. Para o presente trabalho utilizaremos uma crosta constituída de C/O com campo magnético e levando em conta a interação elétron-íon da rede.

7.3.3 A região crosta-núcleo

Em condições normais à medida que a matéria alcança a densidade de drip, nêutrons passam a ser liberados pelos núcleos dos íons, sendo absorvidos pelo núcleo da estrela e convertidos em matéria estranha aumentando assim o tamanho desse núcleo. No entanto, uma fronteira será formada entre o núcleo de matéria estranha e a crosta de elétrons degenerado, em um ponto ligeiramente abaixo da densidade de drip. Isso acontece devido

ao núcleo de matéria estranha formar uma carga líquida positiva, devido à massa finita do quark estranho $\sim 150\text{MeV}$ impedindo a matéria estranha de torna-se eletricamente neutra (GLENDENNING *et al.*, 1995a). Uma vez que os elétrons degenerados da crosta são incapazes de neutralizar a carga positiva oriunda do núcleo de matéria estranha, um dipolo elétrico de alta intensidade é formado entre o núcleo e a crosta da estrela. A formação deste dipolo elétrico devido à repulsão Coulombiana impede que o núcleo continue a crescer além da densidade de drip, limitando o raio limite interior da crosta a densidade de drip. Esse fato também define o tamanho natural até ao qual o núcleo de matéria de quarks pode crescer (WEHER, 2005).

7.3.4 O núcleo

O núcleo de uma anã branca estranha é formado por matéria estranha constituída de quarks up, down e estranhos sem massa. A equação de estado que descreve esta matéria será do modelo de sacola, descrita na seção (7.2). A pressão é então expressa em função da densidade de energia como:

$$P = \frac{\epsilon - 4B}{3}, \quad (7.18)$$

onde os quarks u , d e s não tem massa. A constante da sacola B é a energia do vácuo da QCD. A densidade no interior do núcleo de quarks é de (2 - 6) vezes que a densidade da matéria nuclear $\rho_{\text{nuclear}} = 4 - 5 \times 10^{14}\text{g/cm}^3$. Utilizamos uma constante da sacola igual à $B = 145\text{ MeV}$ e $B = 160\text{ MeV}$.

7.4 Resultados

Nesta seção analisaremos uma estrela formada com um núcleo de matéria estranha envolto por uma matéria fermiônica, de uma mistura heterogênea e com ação da contribuição elétron-íon oriunda da rede do tipo bcc. Os resultados são apresentados para uma constante da sacola igual à $B = 145\text{ MeV}$ e $B = 160\text{ MeV}$, no qual tem energia por bárions (matéria estranha não interagente) de 875 - 894 MeV, abaixo do valor de 930,4 MeV que é a energia por bárions do núcleo de ^{56}Fe , considerada a mais estável.

Mostramos na Fig. (7.1) a relação massa raio para uma anã branca normal constituída de uma matéria heterogênea C/O e homogênea de Fe para diferentes valores de campo magnético. Comparamos estes resultados com os obtidos para oito anãs brancas compactas, para as quais foram medidas massas e raios a partir de Hipparcos paralaxe (PROVENCAL *et al.*, 1998; PROVENCAL *et al.*, 2002). Observamos que uma estrela constituída de ferro descreve significativamente bem se levamos em consideração os erros da medição. No entanto, anãs brancas estáveis formadas por ferro são ainda uma incógnita

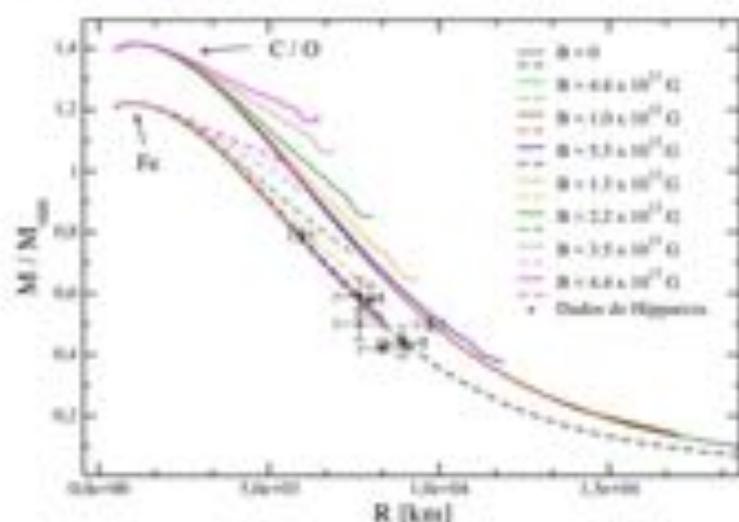


FIGURA 7.1 – Relação entre a massa e raio de uma anã branca magnética normal composta de C/O e ^{56}Fe para campos magnéticos de 10^{11} à 4.4×10^{13} G, os valores dos campos para as linhas tracejadas (^{56}Fe) coloridas são idênticos as linhas sólidas (^{16}O), com os dados retirados a partir do Hoggan em (PROVENCAL *et al.*, 1998; PROVENCAL *et al.*, 2002)

(CATALÁN *et al.*, 2008).

Porem uma alternativa para descrevermos tais estrelas seria uma anã estranha (WEBER, 2005) com um núcleo de quarks envolvida por uma matéria fermiônica de uma mistura C/O com campo magnético entre 10^{11} e 10^{13} G. A Fig. (7.2) representa como a equação de estado destas estrelas se comporta, a linha sólida vermelha representa o núcleo constituído de matéria estranha, a linha preta representa a EOS de um gás de elétrons magnetizado e degenerado de uma mistura heterogênea C/O, que é ligado ao núcleo por um forte dipolo elétrico. A transição de fase crosta-núcleo acontece na densidade do nêutron drip $\rho \sim 4.2 \times 10^{11}$ g/cm³. Como os resultados do capítulo 4, a anã branca de C/O sofre o processo de β - inverso na densidade indicada na figura. Contudo mesmo esta densidade sendo menor que a densidade de nêutron-drip, e a estrela poder ser instável vamos nesse momento não considerar esta questão. No futuro faremos o estudo destas estrelas considerando as instabilidades.

Vemos a partir da Fig. (7.3) que as curvas para as estrelas anãs estranhas descrevem muito bem as oito estrelas compactas. Inclusive com algumas reproduzindo o ponto central medido como é o caso da estrela GD 140 (ver tabela 7.2 para valores). Para uma anã estranha com $B = 145$ MeV a densidade central alcançada foi de $\rho = 4.1 - 4.2 \times 10^{14}$ g/cm³ e para $B = 160$ MeV $\rho = 6.1 - 6.2 \times 10^{14}$ g/cm³. A curva representada por a linha tracejada laranja, representa uma estrela formada por cold matter resultando em massas menores (WEBER, 2005; GLENDENNING, 2012) o modelo proposto anteriormente para anãs estranhas. Como vemos esta proposta produz anãs estranhas com raios bem menores que os observados. Contudo, o novo modelo para anãs estranhas aqui proposto

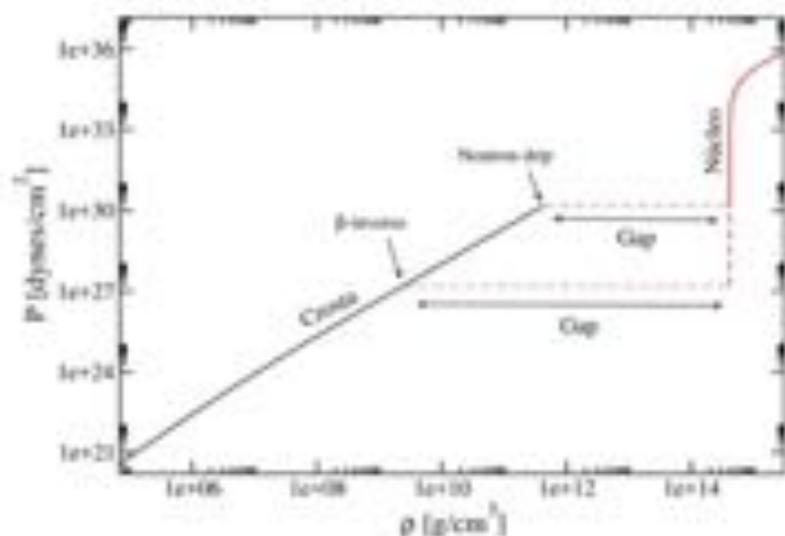


FIGURA 7.2 – Representação da equação de estado da matéria de quarks estranho (núcleo) envolto por uma matéria heterogênea C/O (crosta). A transição do núcleo para a crosta acontece na altura do nêutron drip. A segunda linha inferior, representa a densidade na qual a matéria na crosta sofreria decaimento por β -inverso.

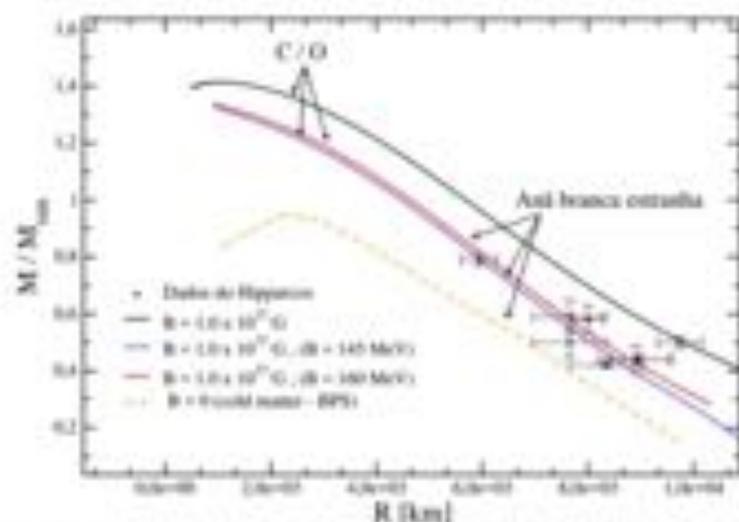


FIGURA 7.3 – Relações massa-raio para anãs estranhas ($B=145$ MeV linha azul) e ($B=100$ MeV linha vermelha) com um núcleo formado por matéria de quarks e uma crosta de C/O, linha preta representa uma anã branca de C/O normal. A linha tracejada laranja representa uma anã estranha com (cold matter) apresentada em (WEIBER, 2005), os dados foram retirados de (PROVENCAL *et al.*, 1998; PROVENCAL *et al.*, 2002).

nesta tese descreve muito bem os dados observacionais de massa e raio para estas estrelas anãs com raios menores que os previstos para o modelo de anã branca C/O usual.

Nas figuras (7.4) e (7.5) mostramos o perfil densidade de massa raio para uma estrela estranha. Observamos na Fig. (7.4) que estrelas estranhas suportam densidades superiores a densidades $\rho \sim 10^9$ g/cm³, valores na qual anãs brancas formadas por C/O tornam-se instáveis por processos β -inverso. Isso acontece devido ao núcleo de matéria estranha estabilizar a estrela para essas densidades. Outro ponto que podemos observar é que um

Candidatas a estrelas estranhas	$M (M_{\odot})$	$R (R_{\odot})$
GD 140	0.790 ± 0.020	0.00854 ± 0.0005
G156-64	0.590 ± 0.060	0.01100 ± 0.0010
EG 21	0.580 ± 0.050	0.01150 ± 0.0004
EG 50	0.500 ± 0.020	0.01040 ± 0.0006
G181-B5B	0.500 ± 0.050	0.01100 ± 0.0010
GD 279	0.440 ± 0.020	0.01290 ± 0.0008
WD2007-303	0.440 ± 0.050	0.01280 ± 0.0010
G238-44	0.420 ± 0.010	0.01200 ± 0.0010

TABELA 7.2 – Massa e raios observacionais de possíveis candidatas a anãs estranhas a partir de Hipparcos paralaxe retiradas de (PROVENCAL *et al.*, 1998; PROVENCAL *et al.*, 2002).

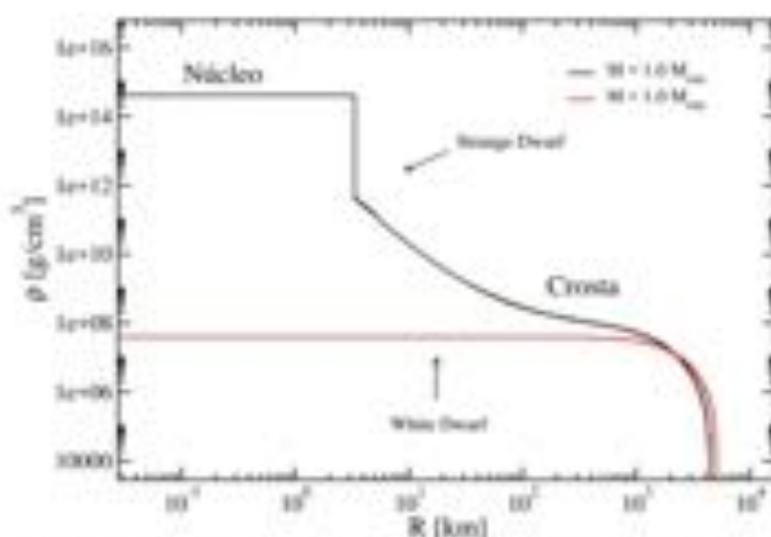


FIGURA 7.4 – Densidade de massa em função do raio de uma anã estranha (formada por matéria estranha no centro-envolto de matéria de elétrons) e uma anã branca constituída de matéria heterogênea de C/O para uma estrela de $M = 1.0 M_{\odot}$, com $B = 145$ MeV.

raio de $R \sim 3.0$ km é suficiente para estabilizar essa nova classe de estrelas, tornando-as mais densas que as anãs brancas normais (WEBER, 2005; GLENDENNING, 2012) como pode ser visto na Fig. (7.5). Este estudo de anãs brancas necessita ser mais aprofundado, considerando as instabilidades nucleares discutidas no capítulo 4, que a princípio tornaria o núcleo de matéria estranha maior. Efeitos de rotação e fortes campos magnéticos nestas estrelas também necessitam ser investigados, em futuros trabalhos.

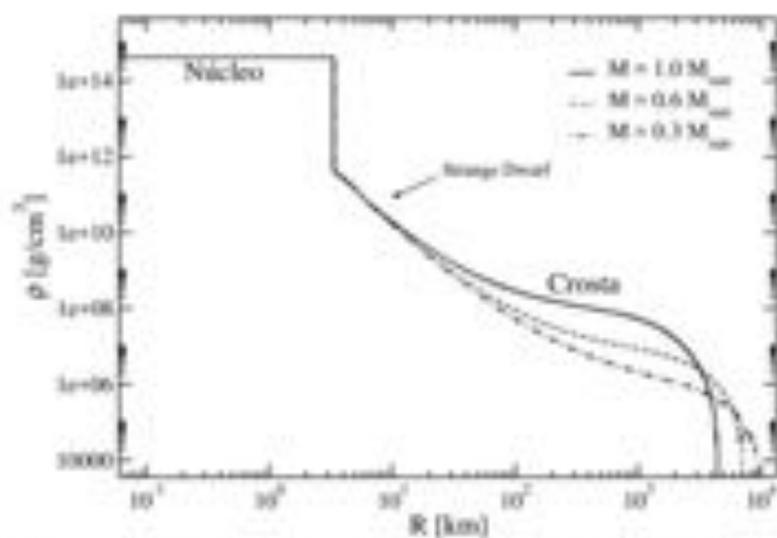


FIGURA 7.5 – Densidade de massa em função do raio para diferentes anãs brancas estranhas (formadas por matéria estranha com $B = 145$ MeV envolto por matéria de elétrons) $M = 0.3 M_{\odot}$, $M = 0.6 M_{\odot}$ e $M = 1.0 M_{\odot}$ com a densidade de transição igual a de nêutron drip ($\rho_{\text{nista}} = \rho_d$).

8 Conclusões

Vamos apresentar os resultados obtidos nesta tese, seguindo a sequência dos capítulos da tese. Inicialmente no Cap. 3.0 foram resolvidas a EOS para um gás de elétrons degenerado sob um campo magnético constante na direção z , levando-se em conta os efeitos causados pelos níveis de Landau na EOS para campos magnéticos da ordem de até $B = 10^{13}$ G. Observamos que para campos abaixo deste valor a separação entre os níveis de Landau é pequena, fazendo com que o elétron salte para níveis energeticamente mais favoráveis, com os números de níveis de Landau ocupados aumentando. Um trabalho com o estudo da influência dos níveis de Landau no comportamento da EOS foi apresentado no Encontro de Física Nuclear de 2014 e publicado em (OTONIEL *et al.*, 2015). Mostramos que se o campo magnético tem um valor menor de $B = 10^{13}$ G, a separação dos níveis de Landau é comparável à energia de repouso dos elétrons e conseqüentemente, os elétrons se movem livremente entre os mais energéticos níveis de Landau tornando a EOS semelhante ao caso não-magnético. Observamos ainda que as pressões do gás de elétrons tornam-se anisotrópicas quando o campo magnético é da ordem de $B = 10^{13}$ G, ou superior tornando a pressão perpendicular mais intensa do que a pressão paralela à direção do campo magnético. Quando levado em consideração apenas o termo da matéria no tensor momento-energia, vimos que apenas campos magnéticos da ordem de $B = 10^{13}$ G para valores de altas densidades de massa de aproximadamente $\rho = 3.0 \times 10^9$ g/cm³ contribuem para o endurecimento da equação de estado fazendo com que os níveis de Landau passem a serem importantes.

No Cap. 4.0 analisamos a contribuição elétron-íon devido a rede na EOS e instabilidades que um gás de elétrons degenerado imerso numa rede cristalina iônica e magnetizado por um campo magnético na direção z pode sofrer. Estudamos quatro possíveis estruturas de rede, são elas: sc, bcc, fcc e hcp. Ressalta-se que a EOS torna-se mais mole se a contribuição da rede cristalina iônica é levada em conta, além da pressão de elétrons (ver Fig. (4.2)). Contudo, como concluímos, este resultado é essencialmente insensível a escolha do tipo de rede considerada. Isto é devido ao fato de que a força de repulsão entre elétrons é menor na presença de uma rede iônica, pois a interação eletrostática elétron-íon é atrativa, causando um amolecimento da EOS. Observamos também que os limiares para as reações β -inverso e reações pícnucleares são deslocados para valores mais baixos em

anãs brancas se os campos magnéticos estão presentes. No entanto, se levamos em consideração a interação da rede essas densidades sofrem um aumento em seu valor, como é mostrado nas tabelas (4.6) e (4.7). Os resultados para o limiar de densidade para que ocorram as reações β -inverso e reações piconucleares independem quase que totalmente do tipo de rede utilizada (ver tabela (4.5)).

Além de observarmos as modificações causadas pela magnetização na EOS e as interações elétrons-íons no Cap. 5.0 descrevemos as equações de equilíbrio hidrostático para uma anã branca estática e com rotação até a frequência de Kepler, descritas por um gás de elétrons magnetizado. Como mostrado nas EOSs no Cap 3.0 campos magnéticos com valores que não afetam a anisotropia não modificam a estrutura da estrela. No entanto, campos da ordem de $B = 10^{12}$ G fazem com que a estrela de mesma massa tenha um aumento em seu raio em torno de 4%. Porém campos dessa magnitude já seriam suficientes para deformar muito as estrelas e um tratamento axi-simétrico do campo magnético teria que ser levado em consideração. Podemos ver que o campo magnético de $B = 10^{12} - 10^{13}$ G pouco influencia no valor da massa máxima, no entanto a contribuição da rede pelo fato de causar um amolecimento na EOS, leva conseqüentemente uma pequena diminuição do valor da massa máxima, tanto para uma anã branca livre de rotação, como com rotação. As reações β -inverso acontecem mais rapidamente na presença de elementos mais pesados, como em estrelas formadas por oxigênio antes mesmo da instabilidade devido à relatividade geral. As reações piconucleares tem suas densidades de instabilidades menores que as densidades via reações β -inverso. Isso acontece devido ao fato que o núcleo formado da fusão de dois elementos tem sua densidade de decaimento por captura de elétron inferior a esses elementos, limitando assim o raio das estrelas. Valores de massa e raio para as principais instabilidades podem ser vistos nas tabelas (5.1) e (5.3). Calculamos nesta tese pela primeira vez a relação massa raio de uma anã branca magnética com rotação utilizando um método auto-consistente utilizado em (WEIHER, 1999) para estrelas de nêutrons. Anãs brancas magnetizadas com rotação até a frequência de Kepler sofrem um aumento na sua massa entre 10-15 %, dependendo da taxa de rotação. A frequência de Kepler obtida pela relatividade geral é 3 - 5% mais lenta que a obtida na física newtoniana. Por último, mas não menos importante, descobrimos que anãs brancas magnetizadas em rotação, podem ser até dez vezes menos densas no centro do que as anãs brancas comuns, com a mesma densidade de número de bárions. Resultados sobre anãs brancas magnéticas com rotações foram apresentados na Fourteenth Marcel Grossmann Meeting - MG14 na Itália em 2015, onde será publicado um proceeding em breve e no Encontro de Física em 2016. Um artigo para Physical Review D está em fase final de revisão.

No Cap. 6.0 apresentamos anãs brancas magnetizadas descritas por modelos de campo magnéticos axi-simétrico e estacionários obtidos resolvendo as equações de Einstein-Maxwell auto-consistentemente, levando em consideração as instabilidade relacionadas com a neu-

tralização devido à captura de elétrons e às reações pícnucleares. Trabalhos recentes propuseram campos axi-simétricos em anãs brancas, no entanto, usando gás de elétrons sem qualquer interação da rede (FRANZON; SCHRAMM, 2015), ou equações do tipo politrópica (DAS; MUKHOPADHYAY, 2015). Nesta tese utilizamos pela primeira vez uma EOS mais realista, onde levamos em consideração a interação elétrons-íons da rede cristalina para o cálculo das propriedades globais de uma anã branca com campo magnético axi-simétrico e também construímos o diagrama massa raio para um valor de momento de dipolo μ fixo algo nunca feito até o momento. Recentemente submetemos à revista *Physical Review D* um trabalho apresentando estes resultados, e que está em processo de avaliação (OTONIEL *et al.*, 2016).

A força de Lorentz induzida por intensos campos magnéticos quebra a simetria esférica da estrela aumentando sua massa, uma vez que a força atua no sentido radial para fora contra a força gravitacional. Neste capítulo fazemos uso de uma EOS para um gás de elétrons degenerado com interações elétron-íon do tipo bec para descrever o interior das anãs brancas, no entanto, não tratamos a EOS magnetizada pois como visto no capítulo 3.0 os níveis de Landau na pressão de degenerescência dos elétrons podem ser desconsiderados para campos magnéticos inferiores à $B = 10^{13}$ G para altas densidades da matéria. Nós mostramos que as massas de anãs brancas aumentam até $M = 2.12M_{\odot}$ com um momento de dipolo magnético correspondente a $\mu = 3.0 \times 10^{38}$ Am² se as instabilidades microfísicas são considerados. Esta estrela tem um raio equatorial de ~ 1.596 km com campos magnéticos centrais de $B_c = 1.74 \times 10^{14}$ G e superficiais $B_s = 3.6 \times 10^{13}$ G na estrela. Para esta anã branca a relação entre a pressão magnética e a pressão da matéria no centro da estrela é de 0.867. Neste trabalho, o campo magnético máximo encontrado é uma ordem de magnitude menor do que em (FRANZON; SCHRAMM, 2015). Isto é devido ao fato de termos modelado o interior estelar com uma EOS mais realista quando comparado à um gás de elétrons simples. Além disso, foi considerado o limiar de densidade de reações de fusão pícnucleares, o que restringe a densidade central de uma anã branca de carbono em $\rho \sim 2.40 \times 10^9$ g/cm³ (ver tabela 4.8), limitando a massa estelar e portanto, seus raios que para anãs brancas magnetizadas massivas não podem ser menores do que $R \sim 1600$ km.

Os nossos resultados mostram que o campo magnético na superfície da estrela, B_s , é cerca de uma ordem de grandeza menor do que o campo magnético alcançado no centro estelar, B_c . Supondo que o campo magnético decaí com o tempo, mostramos que as anãs brancas massivas (para uma massa bariónica fixa) ao reduzir seus campos magnéticos, enquanto os seus momentos de dipolo magnético aumentam, mas seus raios aumentam mais. Assim, o campo é reduzido na sua superfície visto este ser determinado pela razão entre o momento de dipolo magnético e o raio estelar ao cubo. No entanto, o oposto ocorre para anãs brancas menos massivas, quando se verificou que quanto menor for o

campo magnético, menor será o momento de dipolo magnético. Concluímos então que para as anãs brancas massivas e magnetizadas ao diminuir seu campos magnético, o raio equatorial aumenta, mesmo que o seu momento de dipolo magnético aumente. Assim, nós encontramos uma nova fenomenologia para anãs brancas muito massivas com campos magnéticos centrais superiores a $B \sim 10^{12}$ G, ou seja, aumentando o campo magnético, as densidades centrais de número bariônico aumentam, e o raio equatorial diminui. Esta fenomenologia difere da obtida em resultados anteriores para estrela com massas inferiores ao limite de Chandrasekhar sujeitas a campos magnéticos não tão elevados, inferiores à $\sim 10^{12}$ G (SUI; MATHEWS, 2000; OSTRICKER; HARTWICK, 1968), em que para o aumento do campo magnético central a densidade de energia magnética faz com que a estrela torne-se menos densa no seu centro e seu raio maior.

E por fim, no capítulo 7.0 estudamos pela primeira vez a possível existência de uma nova população de anãs estranhas bastante compactas, formadas por um núcleo de matéria estranha de quarks e uma crosta de um gás de elétrons degenerados com interação elétron-íons devido a uma rede cristalina iônica do tipo bcc e com campo magnético de $B = 1.0 \times 10^{12}$ G, trabalhos anteriores tinham sido feitos para uma anãs estranhas, no entanto, propunham anãs estranhas com uma crosta do tipo BPS sem campo magnético (GLENDENING *et al.*, 1995b; GLENDENING *et al.*, 1995a) com raios bem menores que os observados. Contudo, o novo modelo para anãs estranhas aqui proposto nesta tese descreve muito bem os dados observacionais de massa e raio para estas estrelas anãs com raios menores que os previstos para o modelo de anã branca C/O usual. Mostramos que esta classe de estrelas é mais compacta que uma anã branca normal formada por C/O, devido ao seu centro ser constituído de matéria estranha de aproximadamente 3 km de raio. Mostramos que os resultados observacionais de massa e raio para oito anãs brancas de baixa massa e com raios menores, objetos mais compactos que o esperado para anãs brancas normais de C ou C/O, foram muito bem reproduzidos com este modelo de anãs estranhas, bem melhor do que com os resultados anteriormente obtidos com a crosta descrita por uma BPS, que implicavam raios menores ainda. Estas estrelas anãs brancas mais compactas observadas, só podem ser explicadas até hoje por anãs brancas normais se forem formadas totalmente por Ferro. Contudo, a formação de anãs brancas estáveis formadas por ferro são ainda uma incógnita (CATALÁN *et al.*, 2008), visto que como discutimos na tese no capítulo 4.0, as reações de fusão pínucleares já são difíceis de ocorrer entre 2 oxigênios para encontrar enxofre na composição da estrela, sendo mais complexo ainda em reações de elementos mais pesados como o Ferro.

8.1 Perspectivas

Como perspectiva para desenvolvimento futuro, de prosseguimento a esta tese de doutoramento, outros estudos em relação a anãs brancas com intensos campos magnéticos serão realizados no futuro:

- As energias dos níveis de Landau dos elétrons são modificadas por efeitos relativísticos para campos magnéticos maiores do que campo magnético na QED de $B_c = 4.4 \times 10^{12}$ G. No futuro, vamos levar em conta as configurações de campo magnético com ambas as componentes poloidal e toroidal, bem como as correções do campo magnético na EOS para o modelo de campo axi-simétrico.
- Melhorar o tratamento das estrelas anãs estranhas, tratando o núcleo de matéria estranha considerando o quark estranho massivo, considerando o efeito de campo magnético na crosta e que este possa ter uma configuração aximétrica, como também levar em conta o efeito da rotação estelar

Referências

- ADAM, D. Models of magnetic white dwarfs. *Astronomy and Astrophysics*, v. 160, p. 95–106, maio 1986. ISSN 0004-6361. Disponível em: <<http://adsabs.harvard.edu/abs/1986A%26A...160...95A>>.
- ALCOCK, C.; FARHI, E.; OLINTO, A. Strange stars. *The Astrophysical Journal*, v. 310, p. 261–272, nov. 1986. ISSN 0004-637X. Disponível em: <<http://adsabs.harvard.edu/abs/1986ApJ...310..261A>>.
- ALTHAUS, L. G.; PANEL, J. A.; BERTOLAMI, M. M. M.; GARCÍA-BERRO, E.; CÓRSICO, A. H.; ROMERO, A. D.; KEPLER, S.; BOHRMANN, R. D. New evolutionary sequences for hot h-deficient white dwarfs on the basis of a full account of progenitor evolution. *The Astrophysical Journal*, v. 704, n. 2, p. 1605, 2009. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0004-637X/704/i=2/a=1605>>.
- ANGEL, J. Magnetic white dwarfs. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, v. 16, p. 487–519, 1978.
- ANGEL, J. R. P. Magnetism in white dwarfs. *The Astrophysical Journal*, v. 216, p. 1–17, ago. 1977. ISSN 0004-637X. Disponível em: <<http://adsabs.harvard.edu/abs/1977ApJ...216....1A>>.
- ANGEL, J. R. P.; LANDSTREET, J. D. Detection of Circular Polarization in a Second White Dwarf. *The Astrophysical Journal Letters*, v. 164, p. L15, fev. 1971. ISSN 0004-637X. Disponível em: <<http://adsabs.harvard.edu/abs/1971ApJ...164L..15A>>.
- ANGEL, J. R. P.; LIEBERT, J.; STOCKMAN, H. S. The optical spectrum of hydrogen at 160–350 million gauss in the white dwarf GRW +70 deg 8247. *The Astrophysical Journal*, v. 292, p. 260–266, maio 1985. ISSN 0004-637X. Disponível em: <<http://adsabs.harvard.edu/abs/1985ApJ...292..260A>>.
- ARUTYUNYAN, G.; SEDRAKYAN, D.; CHUBARYAN, É. Rotating superdense configurations in general relativity. *Soviet Astronomy*, v. 15, p. 390, 1971.
- AUDI, G.; WANG, M.; WAPSTRA, A. H.; KONDEV, F. G.; MACCORMICK, M.; XU, X.; PFEIFFER, B. The Ame2012 atomic mass evaluation. *Chinese Physics C*, v. 36, n. 12, p. 1287, 2012. Disponível em: <<http://iopscience.iop.org/1674-1137/36/12/002>>.
- BALBERG, S.; SHAPIRO, S. L. The properties of matter in white dwarfs and neutron stars. *arXiv preprint astro-ph/0004317*, 2000. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/astro-ph/0004317>>.

- BAYM, G.; PETHICK, C.; SUTHERLAND, P. The Ground State of Matter at High Densities: Equation of State and Stellar Models. **The Astrophysical Journal**, v. 170, p. 299, dez. 1971. ISSN 0004-637X. Disponível em: <<http://adsabs.harvard.edu/abs/1971ApJ...170..299B>>.
- BERA, P.; BHATTACHARYA, D. Mass Radius Relation of Strongly Magnetized White Dwarfs and the Effects of Landau Quantization. [S.l.], 2014. Disponível em: <<http://ccc.ac.uk:8081/download/pdf/25025273.pdf>>.
- BERA, P.; BHATTACHARYA, D. Mass-radius relation of strongly magnetized white dwarf: dependence on field geometry, GR effects and electrostatic corrections to the EOS. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 456, n. 3, p. 3375-3385, mar. 2016. ISSN 0035-8711, 1365-2966. Disponível em: <<http://mnras.oxfordjournals.org/lookup/doi/10.1093/mnras/stv2823>>.
- BERESTETSKII, V. B.; LIFSHITS, E. M.; PITAEVSKII, L. P. Quantum electrodynamics /2nd revised edition/. **Moscow Izdatel Nauka Teoreticheskia Fizika**, v. 4, 1980. Disponível em: <<http://adsabs.harvard.edu/abs/1980MINTF...4....B>>.
- BOCQUET, M.; BONAZZOLA, S.; GOURGOULHON, E.; NOVAK, J. Rotating neutron star models with magnetic field. **Arxiv preprint gr-qc/9503044**, 1995. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/gr-qc/9503044>>.
- BOCQUET, M.; BONAZZOLA, S.; GOURGOULHON, E.; NOVAK, J. Rotating neutron star models with magnetic field. **Astron. Astrophys.**, v. 301, p. 757, 1995.
- BODMER, A. R. Collapsed nuclei. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 4, p. 1601-1606, Sep 1971. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.4.1601>>.
- BONAZZOLA, S.; GOURGOULHON, E.; SALGADO, M.; MARCK, J. Axisymmetric rotating relativistic bodies: a new numerical approach for 'exact' solutions. **Astronomy and Astrophysics**, v. 278, p. 421-443, 1993.
- BOSHKAYEV, K.; RUEDA, J.; RUFFINI, R. On the maximum mass of general relativistic uniformly rotating white dwarfs. **International Journal of Modern Physics E**, v. 20, n. supp01, p. 136-140, 2011. Disponível em: <<http://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0218301311040177>>.
- BOSHKAYEV, K.; RUEDA, J.; RUFFINI, R. ON THE MAXIMUM MASS AND MINIMUM ROTATION PERIOD OF RELATIVISTIC UNIFORMLY ROTATING WHITE DWARFS. **International Journal of Modern Physics: Conference Series**, v. 23, p. 193-197, jan. 2013. ISSN 2010-1945, 2010-1945. Disponível em: <<http://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S201019451301129X>>.
- BUBALLA, M. NJL-model analysis of dense quark matter. **Physics Reports**, v. 407, n. 4-6, p. 205-376, fev. 2005. ISSN 03701573. Disponível em: <<http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S037015730400506X>>.
- CANUTO, V.; CHIU, H.-Y. Quantum theory of an electron gas in intense magnetic fields. **Physical Review**, v. 173, n. 5, p. 1210, 1968. Disponível em: <<http://journals.aps.org/pr/abstract/10.1103/PhysRev.173.1210>>.

- CARVALHO, G. A importância da relatividade no estudo de anãs brancas. **Dissertação de Mestrado**, v. 1, n. 1, mar. 2015. Disponível em: <http://www.biblioteca.biblioteca.br/tesesdigi/taais/lista_resumo.php?num_tese=67951>.
- CATALÁN, S.; Ribas, I.; ern, J. I.; García-Berro, E. Wd0433+270: an old hyades stream member or an fe-core white dwarf? **AA**, v. 477, n. 3, p. 901-906, 2008. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1051/0004-6361/20078230>>.
- CHAMEL, N.; FANTINA, A. F.; DAVIS, P. J. Stability of super-Chandrasekhar magnetic white dwarfs. **Physical Review D**, v. 88, n. 8, out. 2013. ISSN 1550-7998, 1550-2368. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.88.081301>>.
- CHAMEL, N.; MOLTER, E.; FANTINA, A.; ARTEAGA, D. P. Maximum strength of the magnetic field in the core of the most massive white dwarfs. **Physical Review D**, v. 90, n. 4, ago. 2014. ISSN 1550-7998, 1550-2368. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.90.043002>>.
- CHAMON, L. C.; PEREIRA, D.; HUSSEIN, M. S.; RIBEIRO, M. A. C.; GALETTI, D. Nonlocal description of the nucleus-nucleus interaction. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 79, p. 5218-5221, Dec 1997. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.79.5218>>.
- CHANDRASEKHAR, S. **On stars, their evolution and their stability**. Re. 1935. Disponível em: <<http://cplh-theory.persiangig.com/chandrasekhar83-lecture.pdf>>.
- CHANDRASEKHAR, S. **An Introduction to the Study of Stellar Structure**. [S.l.]: Chicago : Univ. Chicago Press, 1939.
- CHANDRASEKHAR, S.; FERMI, E. Problems of Gravitational Stability in the Presence of a Magnetic Field. **The Astrophysical Journal**, v. 118, p. 116, jul. 1953. ISSN 0004-637X. Disponível em: <<http://adsabs.harvard.edu/abs/1953ApJ...118..116C>>.
- CHATTERJEE, B.; MISHRA, H.; MISHRA, A. Vacuum structure and chiral symmetry breaking in strong magnetic fields for hot and dense quark matter. **Physical Review D**, v. 84, n. 1, jul. 2011. ISSN 1550-7998, 1550-2368. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.84.014016>>.
- CHATTERJEE, D.; ELGHOZI, T.; NOVAK, J.; OERTEL, M. Consistent neutron star models with magnetic field dependent equations of state. **Mon. Not. Roy. Astron. Soc.**, v. 447, p. 3785, 2015.
- CHIU, H.-Y.; CANUTO, V.; FASSIO-CANUTO, L. Quantum theory of an electron gas with anomalous magnetic moments in intense magnetic fields. **Physical Review**, v. 176, n. 5, p. 1438, 1968. Disponível em: <<http://journals.aps.org/pr/abstract/10.1103/PhysRev.176.1438>>.
- CHU, P.-C.; WANG, X.; CHEN, L.-W.; HUANG, M. Quark magnetar in three-flavor Nambu–Jona-Lasinio model with vector interaction and magnetized gluon potential. **Physical Review D**, v. 91, n. 2, jan. 2015. ISSN 1550-7998, 1550-2368. ArXiv: 1409.6154. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/1409.6154>>.

COELHO, J. G.; MALHEIRO, M. Magnetic dipole moment of soft gamma-ray repeaters and anomalous x-ray pulsars described as massive and magnetic white dwarfs.

Publications of the Astronomical Society of Japan, 2014. Disponível em: <<http://pasj.oxfordjournals.org/content/early/2014/02/15/pasj.pst014.abstract>>.

COELHO, J. G.; MARINHO, R. M.; MALHEIRO, M.; NEGREIROS, R.; CÄCERES, D. L.; RUEDA, J. A.; RUFFINI, R. DYNAMICAL INSTABILITY OF WHITE DWARFS AND BREAKING OF SPHERICAL SYMMETRY UNDER THE PRESENCE OF EXTREME MAGNETIC FIELDS. **The Astrophysical Journal**, v. 794, n. 1, p. 86, set. 2014. ISSN 1538-4357. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0004-637X/794/i=1/a=86?key=crossref.90672c749694f688fb9ced8bc2dca8b>>.

CUADRADO, R. A.; JORDAN, S.; NAPIWOTZKI, R.; SCHMID, H. M.; SOLANKI, S. K.; MATHYS, G. Discovery of kilogauss magnetic fields in three DA white dwarfs. **Astronomy and Astrophysics**, v. 423, n. 3, p. 1081-1094, set. 2004. ISSN 0004-6361, 1432-0756. Disponível em: <<http://www.edpsciences.org/10.1051/0004-6361:20040355>>.

DAS, U.; MUKHOPADHYAY, B. Strongly magnetized cold degenerate electron gas: Mass-radius relation of the magnetized white dwarf. **Physical Review D**, v. 86, n. 4, ago. 2012. ISSN 1550-7998, 1550-2368. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.86.042001>>.

DAS, U.; MUKHOPADHYAY, B. New mass limit for white dwarfs: super-Chandrasekhar type Ia supernova as a new standard candle. **Physical review letters**, v. 110, n. 7, p. 071102, 2013. Disponível em: <<http://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.110.071102>>.

DAS, U.; MUKHOPADHYAY, B. Maximum mass of stable magnetized highly super-Chandrasekhar white dwarfs: stable solutions with varying magnetic fields. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, v. 2014, n. 06, p. 050, 2014. Disponível em: <<http://iopscience.iop.org/1475-7516/2014/06/050>>.

DAS, U.; MUKHOPADHYAY, B. Revisiting some physics issues related to the new mass limit for magnetized white dwarfs. **Modern Physics Letters A**, v. 29, n. 07, p. 1450035, 2014. Disponível em: <<http://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0217732314500357>>.

DAS, U.; MUKHOPADHYAY, B. GRMHD formulation of highly super-Chandrasekhar magnetized white dwarfs: stable configurations of non-spherical white dwarfs. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, v. 2015, n. 05, p. 016, 2015. Disponível em: <<http://iopscience.iop.org/1475-7516/2015/05/016>>.

DAS, U.; MUKHOPADHYAY, B.; RAO, A. R. A POSSIBLE EVOLUTIONARY SCENARIO OF HIGHLY MAGNETIZED SUPER-CHANDRASEKHAR WHITE DWARFS: PROGENITORS OF PECULIAR TYPE Ia SUPERNOVAE. **The Astrophysical Journal**, v. 767, n. 1, p. L14, abr. 2013. ISSN 2041-8205, 2041-8213. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/2041-8205/767/i=1/a=L14?key=crossref.302d00cc31becb5b7d8658fcc3d99e40c>>.

- DEGL'INNOCENTI, E. L. Are there spots on magnetic white dwarfs? **The Astrophysical Journal**, v. 209, p. 208-213, out. 1976. ISSN 0004-637X. Disponível em: <<http://adsabs.harvard.edu/abs/1976ApJ...209..208L>>.
- DEXHEIMER, V.; MENEZES, D. P.; STRICKLAND, M. The influence of strong magnetic fields on proto-quark stars. **Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics**, v. 41, n. 1, p. 015203, jan. 2014. ISSN 0954-3899, 1361-6471. ArXiv: 1210.4526. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/1210.4526>>.
- FARHI, E.; JAFFÉ, R. L. Strange matter. **Physical Review D**, v. 30, n. 11, p. 2379-2390, dez. 1984. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.30.2379>>.
- FERRARIO, L.; MARTINO, D. de; GANSICKE, B. T. Magnetic White Dwarfs. **Space Science Reviews**, maio 2015. ISSN 0038-6308, 1572-9672. Disponível em: <<http://link.springer.com/10.1007/s11214-015-0152-0>>.
- FRANZON, B.; DEXHEIMER, V.; SCHRAMM, S. Rotating proto-neutron stars under strong magnetic fields. 2016.
- FRANZON, B.; DEXHEIMER, V.; SCHRAMM, S. A self-consistent study of magnetic field effects on hybrid stars. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, Oxford University Press, v. 456, n. 3, p. 2937-2945, 2016.
- FRANZON, B.; SCHRAMM, S. Effects of strong magnetic fields and rotation on white dwarf structure. **Phys. Rev.**, D92, n. 8, p. 083006, 2015.
- FRIEDMAN, J. L.; IUPER, J. R.; PARKER, L. Rapidly rotating neutron star models. **apj**, v. 304, p. 115-139, maio 1986.
- GAMOW, G. Physical Possibilities of Stellar Evolution. **Physical Review**, v. 55, n. 8, p. 718-725, abr. 1939. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.55.718>>.
- GARCÍA-BERRO, E.; LOBÉN-AGUILAR, P.; AZNAR-SIGUÁN, G.; TORRES, S.; CAMACHO, J.; ALTHAUS, L. G.; CÔRSICO, A. H.; KULEBI, B.; ISERN, J. Double degenerate mergers as progenitors of high-field magnetic white dwarfs. **The Astrophysical Journal**, v. 749, n. 1, p. 25, 2012. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0004-637X/749/1/a=25>>.
- GASQUES, L. R.; AFANASJEV, A. V.; AGUILERA, E. F.; BEARD, M.; CHAMON, L. C.; RING, P.; WIESCHER, M.; YAKOVLEV, D. G. Nuclear fusion in dense matter: Reaction rate and carbon burning. **Physical Review C**, v. 72, n. 2, ago. 2005. ISSN 0556-2813, 1089-490X. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.72.025806>>.
- GLENDENNING, N. K. **Compact Stars: Nuclear Physics, Particle Physics and General Relativity**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012. ISBN 978-1-4684-0491-3.
- GLENDENNING, N. K.; KETTNER, C.; WEBER, F. From Strange Stars to Strange Dwarfs. **The Astrophysical Journal**, v. 450, p. 253, set. 1995. ISSN 0004-637X. Disponível em: <<http://adsabs.harvard.edu/abs/1995ApJ...450..253G>>.

- GLENDENNING, N. K.; KETTNER, C.; WEBER, F. Possible New Class of Dense White Dwarfs. **Physical Review Letters**, v. 74, n. 18, p. 3519-3522, maio 1995. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.74.3519>>.
- GOURGOULHON, E. **3+ 1 formalism in general relativity: bases of numerical relativity**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012.
- GREENSTEIN, J. L.; HENRY, R. J. W.; OCONNELL, R. F. Further identifications of hydrogen in GRW +708247. **The Astrophysical Journal Letters**, v. 289, p. L25-L29, fev. 1985. ISSN 0004-637X. Disponível em: <<http://adsabs.harvard.edu/abs/1985ApJ...289L..25G>>.
- HAENSEL, P.; POTEKHIN, A. Y.; YAKOVLEV, D. G. **Neutron Stars 1: Equation of State and Structure**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2007. ISBN 978-0-387-47301-7.
- HAENSEL, P.; ZDUNIK, J. A submillisecond pulsar and the equation of state of dense matter. Nature Publishing Group, 1989.
- HARTLE, J. B. Slowly Rotating Relativistic Stars. I. Equations of Structure. **The Astrophysical Journal**, v. 150, p. 1005, dez. 1967. ISSN 0004-637X. Disponível em: <<http://adsabs.harvard.edu/abs/1967ApJ...150.1005H>>.
- HARTLE, J. B.; SHARP, D. H. Variational Principle for the Equilibrium of a Relativistic, Rotating Star. **The Astrophysical Journal**, v. 147, p. 317, jan. 1967. ISSN 0004-637X. Disponível em: <<http://adsabs.harvard.edu/abs/1967ApJ...147..317H>>.
- HARTMANN, D. H.; HEGER, A.; FRYER, C. L.; WOOSLEY, S. E.; LANGER, N. How Massive Single Stars End Their Life. **The Astrophysical Journal**, 2002. Disponível em: <http://tigerprints.clemson.edu/physastro_pubs/7/>.
- HEARN, D. R.; RICHARDSON, J. A.; CLARK, G. W. Detection of soft X-ray emission from an unidentified source at high galactic latitude. **The Astrophysical Journal Letters**, v. 210, p. L23-L26, nov. 1976. ISSN 0004-637X. Disponível em: <<http://adsabs.harvard.edu/abs/1976ApJ...210L..23H>>.
- HICKEN, M.; GARNAVICH, P. M.; PRIETO, J. L.; BLONDIN, S.; DEPOY, D. L.; KIRSHNER, R. P.; PARRENT, J. The Luminous and Carbon-Rich Supernova 2006gz: A Double Degenerate Merger? **Astrophys. J.**, v. 669, p. L17-L20, 2007.
- HORN, H. M. V. The physics of white dwarfs. **Astrophysics Today**, v. 1, p. 129, 1984. Disponível em: <http://astro.berkeley.edu/~gmarcy/astro160/papers/physics_of_white_dwarfs.pdf>.
- HOWELL, D. A. *et al.* The type Ia supernova SNLS-03D3bb from a super-Chandrasekhar-mass white dwarf star. **Nature**, v. 443, p. 308, 2006.
- HUANG, K.-N.; AOYAGI, M.; CHEN, M. H.; CRASEMANN, B.; MARK, H. Neutral-atom electron binding energies from relaxed-orbital relativistic hartree-fock-slater calculations $2 \text{ \AA} \leq \lambda \leq 106 \text{ \AA}$. **Atomic Data and Nuclear Data Tables**, v. 18, n. 3, p. 243 - 291, 1976. ISSN 0002-640X. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0002640X76000279>>.

- ITZYKSON, C.; ZUBER, J.-B. **Quantum Field Theory**. [S.l.]: Courier Corporation, 2006. ISBN 978-0-486-44568-7.
- JACKSON, C. B.; PIEKAREWICZ, J.; POULIOT, S. L.; TARUNA, J.; ELLISON, B. W.; LEE, D. D. **Compact objects for everyone: A Real experiment**. [S.l.], 2004. Disponível em: <<http://cds.cern.ch/record/793078/files/0400348.pdf>>.
- JI, S.; FISHER, R. T.; GARCÍA-BERRO, E.; TZEFERACOS, P.; JORDAN, G.; LEE, D.; LORÁ@N-AGUILAR, P.; CREMER, P.; BEHREND, J. The post-merger magnetized evolution of white dwarf binaries: The double-degenerate channel of sub-chandrasekhar type Ia supernovae and the formation of magnetized white dwarfs. **The Astrophysical Journal**, v. 773, n. 2, p. 136, 2013. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0004-637X/773/1=2/a=136>>.
- KAWALER, S. D. White dwarf rotation: observations and theory. **arXiv preprint astro-ph/0301539**, 2003. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/astro-ph/0301539>>.
- KEMP, J. C.; SWEDLUND, J. B.; LANDSTREET, J. D.; ANGEL, J. R. P. Discovery of Circularly Polarized Light from a White Dwarf. **The Astrophysical Journal Letters**, v. 161, p. L77, ago. 1970. ISSN 0004-637X. Disponível em: <<http://adsabs.harvard.edu/abs/1970ApJ...161L..77K>>.
- KEPLER, S. O.; Kleinman, S.; Pelisoli, I.; PeĀjanha, V.; Diaz, M.; Koester, D.; Castanheira, B. G.; Nitta, A. Magnetic White Dwarfs in the SDSS and Estimating the Mean Mass of Normal DA and DB WDs. In: Werner, K.; Rauch, T. (Ed.). **American Institute of Physics Conference Series**. [S.l.: s.n.], 2010. (American Institute of Physics Conference Series, v. 1273), p. 19-24.
- KEPLER, S. O.; KLEINMAN, S. J.; NITTA, A.; KOESTER, D.; CASTANHEIRA, B. G.; GIOVANNINI, O.; COSTA, A. F. M.; ALTHAUS, L. White dwarf mass distribution in the sdss. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 375, n. 4, p. 1315-1324, 2007. Disponível em: <<http://mnras.oxfordjournals.org/content/375/4/1315.abstract>>.
- KEPLER, S. O.; Pelisoli, I.; Jordan, S.; Kleinman, S. J.; Koester, D.; Kulebi, B.; PeĀjanha, V.; Castanheira, B. G.; Nitta, A.; Costa, J. E. S.; Winget, D. E.; Kanaan, A.; Fraga, L. Magnetic white dwarf stars in the Sloan Digital Sky Survey. **mnras**, v. 429, p. 2934-2944, mar. 2013.
- KLEINMAN, S. J.; KEPLER, S. O.; KOESTER, D.; PELISOLI, I.; PEĀJANHA, V.; NITTA, A.; COSTA, J. E. S.; KRZESINSKI, J.; DUFOUR, P.; LACHAPPELLE, F.-R.; others. SDSS DR7 white dwarf catalog. **The Astrophysical Journal Supplement Series**, v. 204, n. 1, p. 5, 2013. Disponível em: <<http://iopscience.iop.org/0067-0049/204/1/5>>.
- KONNO, K.; OBATA, T.; KOJIMA, Y. Deformation of relativistic magnetized stars. **arXiv preprint gr-qc/9910038**, 1999. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/gr-qc/9910038>>.
- KONNO, K.; OBATA, T.; KOJIMA, Y. Flattening modulus of a neutron star by rotation and magnetic field. **arXiv preprint astro-ph/0001397**, 2000. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/astro-ph/0001397>>.

- KUELEBI, B.; JORDAN, S.; EUSCHNER, F.; GAENSICKE, B. T.; HIRSCH, H. VizieR Online Data Catalog: Magnetic fields in white dwarfs (Kuelebi+, 2009). **VizieR Online Data Catalog**, v. 350, jan. 2010.
- KULEBI, B.; JORDAN, S.; EUSCHNER, F.; GAENSICKE, B. T.; HIRSCH, H. Analysis of hydrogen-rich magnetic white dwarfs detected in the sloan digital sky survey. **AA**, v. 506, n. 3, p. 1341-1350, 2009. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1051/0004-6361/200912570>>.
- KULEBI, B.; JORDAN, S.; NEFAN, E.; BASTIAN, U.; ALTMANN, M. Constraints on the origin of the massive, hot, and rapidly rotating magnetic white dwarf *ref0317-853* from an *l1st* parallax measurement? **AA**, v. 524, p. A36, 2010. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1051/0004-6361/201015237>>.
- LAI, D.; SHAPIRO, S. L. Cold equation of state in a strong magnetic field - Effects of inverse beta-decay. **The Astrophysical Journal**, v. 383, p. 745-751, dez. 1991. ISSN 0004-637X. Disponível em: <<http://adsabs.harvard.edu/abs/1991ApJ...383.745L>>.
- LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M.; SYKES, J. B.; BELL, J. S.; ROSE, M. E. Quantum Mechanics, Non-Relativistic Theory. **Physics Today**, v. 11, p. 56, 1958. ISSN 0031-9228. Disponível em: <<http://adsabs.harvard.edu/abs/1958PhT...11L.56L>>.
- LANDSTREET, J. D.; BAGNULO, S.; VALYAVIN, G. G.; FOSSATI, L.; JORDAN, S.; MONIN, D.; WADE, G. A. On the incidence of weak magnetic fields in DA white dwarfs. **Astronomy & Astrophysics**, v. 545, p. A30, set. 2012. ISSN 0004-6361, 1432-0746. Disponível em: <<http://www.aanda.org/10.1051/0004-6361/201219829>>.
- LICHNEROWICZ, A. **Relativistic Hydrodynamics and Magneto-hydrodynamics**. [S.l.: s.n.], 1967.
- LIU, H.; ZHANG, X.; WEN, D. One possible solution of peculiar type in supernovae explosions caused by a charged white dwarf. **Physical Review D**, APS, v. 89, n. 10, p. 104043, 2014.
- LIVIO, M. The Spins of White Dwarfs and Pulsars. In: . [s.n.], 1999. v. 157, p. 247. Disponível em: <<http://adsabs.harvard.edu/abs/1999ASPC..157..247L>>.
- LIVIO, M.; PRINGLE, J. E. The rotation rates of white dwarfs and pulsars. **The Astrophysical Journal**, v. 505, n. 1, p. 339, 1998. Disponível em: <<http://iopscience.iop.org/0004-637X/505/1/339>>.
- LOBATO, R. V.; MALHEIRO, M.; COELHO, J. G. Magnetars and white dwarf pulsars. **International Journal of Modern Physics D**, v. 25, n. 09, p. 1641025, 2016. Disponível em: <<http://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S021827181641025X>>.
- LUNNEY, D.; PEARSON, J. M.; THIBAUT, C. Recent trends in the determination of nuclear masses. **Rev. Mod. Phys.**, American Physical Society, v. 75, p. 1021-1082, Aug 2003. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.75.1021>>.
- MACIEL, W. J. **Introdução Estrutura e Evolução Estelar Vol. 24**. [S.l.]: EdUSP, 1999. ISBN 978-85-314-0520-4.

- MAJCYNA, A.; MADEJ, J. Mass and radius determination for the neutron star in X-ray burst source 4u/MXB 1728-34. **arXiv:astro-ph/0601076**, jan. 2006. ArXiv: astro-ph/0601076. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/astro-ph/0601076>>.
- MARSH, T.; GÄNSICKE, B.; HÜMMERICH, S.; HAMBISCH, F.-J.; BERNHARD, K.; LLOYD, C.; BREEDT, E.; STANWAY, E. R.; STEEGHS, D.; PARSONS, S. *et al.* A radio-pulsing white dwarf binary star. **Nature**, Nature Research, v. 537, n. 7620, p. 374-377, 2016.
- MATHEW, A.; NANDY, M. K. General Relativistic Calculations for White Dwarf Stars. **arXiv preprint arXiv:1401.0819**, 2014. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/1401.0819>>.
- MELROSE, D. B.; PARLE, A. J. Quantum electrodynamics in strong magnetic fields. I. Electron states. **Australian Journal of Physics**, v. 36, p. 755-774, 1983. ISSN 0004-9506. Disponível em: <<http://adsabs.harvard.edu/abs/1983AuJPh...36..755M>>.
- MEREGHETTI, S.; Tiengo, A.; Esposito, P.; La Palombara, N.; Israel, G. L.; Stella, L. An Ultramassive, Fast-Spinning White Dwarf in a Peculiar Binary System. **Science**, v. 325, p. 1222, set. 2009.
- MESTEL, L. **Stellar magnetism**. [S.l.]: OUP Oxford, 2012.
- MOLL, R.; RASKIN, C.; KASEN, D.; WOODSLEY, S. Type Ia Supernovae from Merging White Dwarfs. I. Prompt Detonations. **Astrophys. J.**, v. 785, p. 105, 2014.
- NA, X.; XU, R.; WEBER, F.; NEGREIROS, R. Transport properties of a quark-hadron Coulomb lattice in the cores of neutron stars. **Physical Review D**, v. 86, n. 12, dez. 2012. ISSN 1550-7998, 1550-2368. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.86.123016>>.
- OPPENHEIMER, J. R.; VOLKOFF, G. M. On Massive Neutron Cores. **Physical Review**, v. 55, n. 4, p. 374-381, fev. 1939. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.55.374>>.
- OSTRIKER, J. P.; HARTWICK, F. D. A. Rapidly Rotating Stars.IV. Magnetic White Dwarfs. **The Astrophysical Journal**, v. 153, p. 797, set. 1968. ISSN 0004-637X. Disponível em: <<http://adsabs.harvard.edu/abs/1968ApJ...153..797O>>.
- OTONIEL, MALHEIRO, M.; COELHO, J. G. Fermionic matter under the effects of high magnetic fields and its consequences in white dwarfs. **Journal of Physics**, v. 630, n. 1, p. 012039, 2015. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/1742-6596/630/i=1/a=012039>>.
- OTONIEL, E.; FRANZON, B.; MALHEIRO, M.; SCHRAMM, S.; WEBER, F. Axisymmetric Magnetic Fields, Electron Capture and Pycnonuclear Reactions in Magnetized White Dwarfs. **arXiv:1609.05994 [astro-ph]**, set. 2016. ArXiv: 1609.05994. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/1609.05994>>.
- PARET, D. M.; HORVATH, J. E.; MARTÁNEZ, A. P. Anisotropic stellar structure equations for magnetized strange stars. **Research in Astronomy and Astrophysics**, v. 15, n. 7, p. 975, 2015. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/1674-4527/15/i=7/a=975>>.

- PARET, D. M.; HORVATH, J. E.; MARTÁNEZ, A. P. Maximum mass of magnetic white dwarfs. **Research in Astronomy and Astrophysics**, v. 15, n. 10, p. 1735, 2015. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/1674-4527/15/i=10/a=1735>>.
- PEARSON, J. M.; GRIELY, S.; CHAMEL, N. Properties of the outer crust of neutron stars from Hartree-Fock-Bogoliubov mass models. **Physical Review C**, v. 83, n. 6, jun. 2011. ISSN 0556-2813, 1089-490X. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.83.065810>>.
- PROVENCAL, J. L.; SHIPMAN, H. L.; HÅG, E.; THEJLL, P. Testing the white dwarf mass-radius relation with hipparcos. **The Astrophysical Journal**, v. 494, n. 2, p. 759, 1998. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0004-637X/494/i=2/a=759>>.
- PROVENCAL, J. L.; SHIPMAN, H. L.; KOESTER, D.; WESEMAEL, F.; BERGERON, P. Procyon b: Outside the iron box. **The Astrophysical Journal**, v. 568, n. 1, p. 324, 2002. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0004-637X/568/i=1/a=324>>.
- PUTNEY, A. Three new magnetic white dwarf stars. **The Astrophysical Journal Letters**, IOP Publishing, v. 451, n. 2, p. L67, 1995.
- REIMERS, D.; JORDAN, S.; KOESTER, D.; BADE, N.; KOHLER, T.; WISOTZKI, L. Discovery of four white dwarfs with strong magnetic fields by the Hamburg / ESO survey. **Astron. Astrophys.**, v. 311, p. 572-578, 1996.
- RIBEIRO, M. A. C.; CHAMON, L. C.; PEREIRA, D.; HUSSEIN, M. S.; GALETTI, D. Pauli nonlocality in heavy-ion rainbow scattering: A further test of the folding model. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 78, p. 3270-3273, Ago 1997. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.78.3270>>.
- ROSSUM, D. R. van; KASHYAP, R.; FISHER, R.; WOLLAEGER, R. T.; GARCÍA-BERRO, E.; AZNAR-SIGUÁN, G.; JI, S.; LORÉN-AGUILAR, P. Light curves and spectra from a thermonuclear explosion of a white dwarf merger. **The Astrophysical Journal**, v. 827, n. 2, p. 128, 2016. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0004-637X/827/i=2/a=128>>.
- ROXBURGH, I. W.; DURNEY, B. R. Structure, Oscillations and Stability of Rotating White Dwarfs. **Zeitschrift für Astrophysik**, v. 64, p. 504, 1966. ISSN 0372-8331. Disponível em: <<http://adsabs.harvard.edu/abs/1966ZA....64..504R>>.
- SAGERT, I.; HEMPEL, M.; GREINER, C.; SCHAFFNER-BIELICH, J. Compact stars for undergraduates. **European Journal of Physics**, v. 27, n. 3, p. 577-610, maio 2006. ISSN 0143-0807, 1361-6404. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0143-0807/27/i=3/a=0127?key=crossref.b34f2c725aaefeb63fe5aefb614cd3dd>>.
- SALPETER, E. E. Energy and Pressure of a Zero-Temperature Plasma. **The Astrophysical Journal**, v. 134, p. 669, nov. 1961. ISSN 0004-637X. Disponível em: <<http://adsabs.harvard.edu/abs/1961ApJ...134..669S>>.
- SARAIVA, M. d. F. O. **Astronomia & Astrofísica**. [S.l.]: Editora Livraria da Física, 2004. ISBN 978-85-88325-23-4.

SCALZO, R. A. *et al.* Nearby Supernova Factory Observations of SN 2007d: First Total Mass Measurement of a Super-Chandrasekhar-Mass Progenitor. **Astrophys. J.**, v. 713, p. 1073-1094, 2010.

SCHAFFNER-BIELICH, J. Strange quark matter in stars: a general overview. **Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics**, v. 31, n. 6, p. S651, 2005. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0954-3899/31/i=6/a=004>>.

SCHMIDT, G. D.; BERGERON, P.; LIEBERT, J.; SAEFFER, R. A. Two ultramassive white dwarfs found among candidates for magnetic fields. **apj**, v. 394, p. 603-608, ago. 1992.

SCHMIDT, G. D.; SMITH, P. S. A Search for magnetic fields among DA white dwarfs. **Astrophys. J.**, v. 448, p. 305, 1995.

SHAPIRO, S. L.; TEUKOLSKY, S. A. **Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars: The Physics of Compact Objects**. [S.L.]: John Wiley & Sons, 2008. ISBN 978-3-527-61767-8.

SILVERMAN, J. M.; GANESHALINGAM, M.; LI, W.; FILIPPENKO, A. V.; MILLER, A. A.; POZNANSKI, D. Fourteen months of observations of the possible super-chandrasekhar mass type Ia supernova 2009dc. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, Oxford University Press, v. 410, n. 1, p. 585-611, 2011.

STRICKLAND, M.; DEXHEIMER, V.; MENEZES, D. P. Bulk properties of a Fermi gas in a magnetic field. **Physical Review D**, v. 86, n. 12, dez. 2012. ISSN 1550-7998, 1550-2368. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.86.125032>>.

SUBRAMANIAN, S.; MUKHOPADHYAY, B. Grubel formulation of highly super-chandrasekhar rotating magnetized white dwarfs: stable configurations of non-spherical white dwarfs. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 454, n. 1, p. 752-765, 2015. Disponível em: <<http://mnras.oxfordjournals.org/content/454/1/752.abstract>>.

SUH, I.-S.; MATHEWS, G. J. Mass-Radius Relation for Magnetic White Dwarfs. **The Astrophysical Journal**, v. 530, n. 2, p. 949, fev. 2000. ISSN 0004-637X. Disponível em: <<http://iopscience.iop.org/0004-637X/530/2/949>>.

TAUBENBERGER, S.; BENETTI, S.; CHILDRESS, M.; PAKMOR, R.; HACHINGER, S.; MAZZALI, P.; STANISHEV, V.; ELIAS-ROSA, N.; AGNOLETTI, L.; BUFANO, F. *et al.* High luminosity, slow ejecta and persistent carbon lines: Sn 2009dc challenges thermonuclear explosion scenarios. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, Oxford University Press, v. 412, n. 4, p. 2735-2762, 2011.

TERADA, Y.; HAYASHI, T.; ISHIDA, M.; MUKAI, K.; DOTANI, T.; OKADA, S.; NAKAMURA, R.; NAIK, S.; BAMBA, A.; MAKISHIMA, K. Suzaku Discovery of Hard X-Ray Pulsations from a Rotating Magnetized White Dwarf, AE Aquarii. **pasj**, v. 60, p. 387-397, abr. 2008.

TERADA, Y.; HAYASHI, T.; ISHIDA, M.; MUKAI, K.; DOTANI, T. *et al.* OKADA, S.; NAKAMURA, R.; NAIK, S.; BAMBA, A.; MAKISHIMA, K. Suzaku Discovery of Non-thermal X-ray Emission from the Rotating Magnetized White Dwarf, AE Aquarii. **Publ. Astron. Soc. Jap.**, v. 60, p. 387, 2008.

- TOLMAN, R. C. Static Solutions of Einstein's Field Equations for Spheres of Fluid. **Physical Review**, v. 55, n. 4, p. 364-373, fev. 1939. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.55.364>>.
- VALYAVIN, G.; SHULYAK, D.; WADE, G. A.; ANTONYUK, K.; ZHARIKOV, S. V.; GALAZUTDINOV, G. A.; PLACHINDA, S.; BAGNULO, S.; MACHADO, L. F.; ALVAREZ, M.; CLARK, D. M.; LOPEZ, J. M.; HIRIART, D.; HAN, I.; JEON, Y.-B.; ZURITA, C.; MUJICA, R.; BURLAKOVA, T.; SZEIFERT, T.; BURENKOV, A. Suppression of cooling by strong magnetic fields in white dwarf stars. **Nature**, v. 515, n. 7525, p. 88-91, out. 2014. ISSN 0028-0836, 1476-4687. Disponível em: <<http://www.nature.com/doi/10.1038/nature13836>>.
- WANG, M.; AUDI, G.; WAPSTRA, A. H.; KONDEV, F. G.; MACCORMICK, M.; XU, X.; PFEIFFER, B. The AME2012 atomic mass evaluation. **Chinese Physics C**, v. 36, n. 12, p. 1603, 2012. Disponível em: <<http://iopscience.iop.org/1674-1137/36/12/003>>.
- WARNER, B. The Discovery Of Magnetic Cataclysmic Variable Stars. In: . [s.n.], 1995. v. 85, p. 3. Disponível em: <<http://adsabs.harvard.edu/abs/1995ASPC...85...3W>>.
- WEBER, F. **Pulsars as Astrophysical Laboratories for Nuclear and Particle Physics**. 1st edition. ed. Bristol ; Philadelphia: CRC Press, 1999. ISBN 978-0-7503-0332-3.
- WEBER, F. Strange quark matter and compact stars. **Progress in Particle and Nuclear Physics**, v. 54, n. 1, p. 193-288, mar. 2005. ISSN 01466410. Disponível em: <<http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0146641004001061>>.
- WEBER, F.; GLENDENNING, N. K. Application of the improved Hartle method for the construction of general relativistic rotating neutron star models. **The Astrophysical Journal**, v. 390, p. 541-549, maio 1992. ISSN 0004-637X. Disponível em: <<http://adsabs.harvard.edu/abs/1992ApJ...390..541W>>.
- WICKRAMASINGHE, D. T.; FERRARIO, L. A centered dipole model for the high field magnetic white dwarf GRW + 70 deg 8247. **The Astrophysical Journal**, v. 327, p. 222-233, abr. 1988. ISSN 0004-637X. Disponível em: <<http://adsabs.harvard.edu/abs/1988ApJ...327..222W>>.
- WICKRAMASINGHE, D. T.; FERRARIO, L. Magnetism in isolated and binary white dwarfs. **Publications of the Astronomical Society of the Pacific**, v. 112, n. 773, p. 873, 2000. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/1538-3873/112/i=773/n=873>>.
- WITTEN, E. Cosmic separation of phases. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 30, p. 272-285, Jul 1984. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.30.272>>.
- XU, R. X. 1e 1207.4-5209: a low-mass bare strange star? **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 356, n. 1, p. 359-370, jan. 2005. ISSN 0035-8711, 1365-2966. Disponível em: <<http://mnras.oxfordjournals.org/content/356/1/359>>.
- YAKOVLEV, D. G.; GASQUES, L. R.; AFANASJEV, A. V.; BEARD, M.; WIESCHER, M. Fusion reactions in multicomponent dense matter. **Physical Review C**, v. 74, n. 3, set. 2006. ISSN 0556-2813, 1089-490X. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.74.035803>>.

YAMANAKA, M. *et al.* Early phase observations of extremely luminous Type Ia Supernova 2006dc. *Astrophys. J.*, v. 707, p. L118-L122, 2009.

Apêndice A - Solução da Equação de Dirac na Presença de Campo Magnético

Dirac propôs uma equação relativista para um elétron de carga e sob ação de um campo magnético externo constante. Obteremos as soluções da equação de Dirac para um elétron na presença de um campo magnético, no entanto, esse formalismo pode ser utilizado para outro tipo de férmion. Descreveremos a carga como $e = \epsilon_Q |e|$, de tal maneira que $\epsilon_Q = 1$ e $\epsilon_Q = -1$ (MELBOSE; PARLE, 1983). A equação de Dirac é dada por:

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H_D(\vec{x}) \right) \psi(x) = 0, \quad (\text{A.1})$$

onde

$$H_D(\vec{x}) = \vec{\alpha} \cdot \vec{H} + \beta m_e c^2 \quad \text{com} \quad \vec{H} = \left(\hat{p}c - \epsilon_Q |e| \vec{A}(\vec{x}) \right).$$

utilizando a representação da álgebra de Dirac, com as seguintes definições:

$$\alpha = \gamma^0 \gamma^i, \quad \beta = \gamma^0, \quad \text{e} \quad \hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} = -i\hbar \nabla$$

podemos reescrever a equação (A.1) como:

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \vec{\alpha} \cdot \left(\hat{p}c - \epsilon_Q |e| \vec{A}(\vec{x}) \right) + \beta m_e c^2 \right) \psi(x) = 0. \quad (\text{A.2})$$

Afim de determinar uma direção para o campo magnético, escolheremos o calibre para o potencial $A_\mu(x)$, tal que:

$$A_\mu(x) = \delta_{\mu 2} x B, \quad (\text{A.3})$$

de modo que $A^0 = 0$ e

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{x}) &= (0, \delta_{22} x B, 0) \\ &= (0, xB, 0) \end{aligned}$$

com o potencial vetor respeitando as relações $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ e $\nabla \times \vec{A} = B\hat{z}$. Ao substituir o calibre escolhido em (A.3), vemos que a equação depende apenas da coordenada x , e temos então:

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \vec{\alpha} \cdot (\hat{p} - e_Q |e| Bx \hat{z}) + \beta m_e c^2 \right) \psi(x) = 0, \quad (\text{A.4})$$

As soluções positivas e negativas podem ser escritas nas formas

$$\begin{aligned} \psi^+(\vec{x}, t) &= u(x) e^{-iEt + i(p_y y + p_z z)} \equiv \phi^{(+)} e^{-iEt}, \\ \psi^-(\vec{x}, t) &= v(x) e^{iEt - i(p_y y + p_z z)} \equiv \phi^{(-)} e^{iEt}, \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

onde reescrevemos usando para $\phi^{(\pm)}$

$$\psi^{(\pm)}(\vec{x}, t) = \phi^{(\pm)} e^{-iEt} = f^{(\pm)}(x) e^{i(p_y y + p_z z)} e^{-iEt}, \quad (\text{A.6})$$

de forma que ϵ corresponde aos estados de energia:

$$\epsilon = \begin{cases} +1, & (\text{positiva}) \\ -1, & (\text{negativa}) \end{cases}$$

e $f^{(\pm)}(x)$ representa os quadri-spinores que determinamos ao substituir $\psi^{(\pm)}$ diretamente na equação de Dirac (A.4), usando a convenção de Bjorken e Drell (ITZYKSON; ZUBER, 2006) definimo as matrizes como:

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.7})$$

onde σ_i , são as matrizes de Pauli com $i = 1, 2, 3$, dadas por:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \hat{x}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \hat{y}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \hat{z} \quad \text{e} \quad \beta = \gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad (\text{A.8})$$

Substituindo o ansatz (A.6) na equação de Dirac (A.4), obtemos

$$\left[i\hbar \lambda \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \vec{\alpha} \cdot \hat{p} - e_Q |e| Bx i \sigma_3 \\ \vec{\alpha} \cdot \hat{p} - e_Q |e| Bx i \sigma_3 & 0 \end{pmatrix} - mc^2 \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \right] \psi^{(\pm)}(\vec{x}, t) \quad (\text{A.9})$$

dado que $i\hbar\partial_t = E$, reescrevemos a equação (A.10) como:

$$\begin{pmatrix} -(E - mc^2)I & (\sigma_1 p_x + \sigma_2 p_y + \sigma_3 p_z)c - e_Q |e| B x i \sigma_2 \\ (\sigma_1 p_x + \sigma_2 p_y + \sigma_3 p_z)c - e_Q |e| B x i \sigma_2 & -(E + mc^2)I \end{pmatrix} f^{(i)} = 0 \quad (\text{A.10})$$

utilizando as matrizes de Pauli, obtemos a identidade a seguir:

$$\begin{aligned} & (\sigma_1 p_x + \sigma_2 p_y + \sigma_3 p_z)c - e_Q |e| B x i \sigma_2 = \\ & = \begin{pmatrix} 0 & -i\hbar c \frac{\partial}{\partial x} \\ -i\hbar c \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -i p_y c \\ i p_y c & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_z c & 0 \\ 0 & -p_z c \end{pmatrix} \\ & - \begin{pmatrix} 0 & i e_Q |e| B x \\ -i e_Q |e| B x & 0 \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} p_z c & -i(p_y c - e_Q |e| B x + \hbar c \frac{\partial}{\partial x}) \\ -i(-p_y c + e_Q |e| B x + \hbar c \frac{\partial}{\partial x}) & p_z c \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

podemos definir que:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_1 &= -i \left(p_z c - e_Q |e| B x + \hbar c \frac{\partial}{\partial x} \right) \\ \mathcal{O}_2 &= -i \left(-p_y c + e_Q |e| B x + \hbar c \frac{\partial}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

de modo que por conveniência tenhamos

$$x = \frac{\hbar c}{(\hbar c |e| B)^{1/2}} \xi + \frac{\hbar c p_y c}{\hbar c |e| B} \rightarrow \frac{dx}{d\xi} = \frac{\hbar c}{(\hbar c |e| B)^{1/2}} \quad (\text{A.13})$$

tal que obtemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_1 &= -i \left[p_z c - e_Q \hbar c |e| B \left(\frac{\xi}{(\hbar c |e| B)^{1/2}} + \frac{p_y c}{\hbar c |e| B} \right) + (\hbar c |e| B)^{1/2} \frac{\partial}{\partial \xi} \right] \\ &= -i \left[p_z c - e_Q (\hbar c |e| B)^{1/2} \xi - e_Q p_y c + (\hbar c |e| B)^{1/2} \frac{\partial}{\partial \xi} \right] \\ &= -i (\hbar c |e| B)^{1/2} \left(-e_Q \xi + \frac{\partial}{\partial \xi} \right), \\ \mathcal{O}_2 &= -i (\hbar c |e| B)^{1/2} \left(e_Q \xi + \frac{\partial}{\partial \xi} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

escrevermos a equação (A.10) após as relações como:

$$\begin{bmatrix} -\epsilon E + mc^2 & 0 & \epsilon p_x c & \mathcal{O}_1 \\ 0 & -\epsilon E + mc^2 & \mathcal{O}_2 & -\epsilon p_x c \\ \epsilon p_x c & \mathcal{O}_1 & -\epsilon E - mc^2 & 0 \\ \mathcal{O}_2 & -\epsilon p_x c & 0 & -\epsilon E - mc^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{A.15})$$

Para obtermos o quadri-spinor $f^{(s)}$ vamos usar as propriedades das funções de onda do oscilador harmônico unidimensional

$$\left(-\xi + \frac{\partial}{\partial \xi}\right) \phi_n(\xi) = -\sqrt{2(n+1)} \phi_{n+1}(\xi) \quad (\text{A.16})$$

$$\left(\xi + \frac{\partial}{\partial \xi}\right) \phi_n(\xi) = -\sqrt{2n} \phi_{n-1}(\xi) \quad (\text{A.17})$$

onde

$$\phi_n(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi} 2^n n!}} H_n(\xi) e^{-\xi^2} \quad (\text{A.18})$$

com $H_n(x)$ sendo o polinômio de Hermite dado por:

$$H_n(\xi) = (-1)^n e^{\xi^2} (\partial/\partial \xi)^n e^{-\xi^2}. \quad (\text{A.19})$$

Trataremos separadamente os casos com carga $\epsilon_Q = 1$ e $\epsilon_Q = -1$. Para os casos onde $\epsilon_Q = 1$, temos:

$$\mathcal{O}_1 \phi_n(\xi) = -i(\hbar c |\epsilon| B)^{1/2} \left(-\sqrt{2(n+1)}\right) \phi_{n+1}(\xi) \quad (\text{A.20})$$

$$= i\sqrt{2(n+1)} \hbar c |\epsilon| B \phi_{n+1}(\xi) \quad (\text{A.21})$$

$$\mathcal{O}_2 \phi_n(\xi) = -i(\hbar c |\epsilon| B)^{1/2} \left(\sqrt{2n}\right) \phi_{n-1}(\xi) \quad (\text{A.22})$$

$$= -i\sqrt{2n} \hbar c |\epsilon| B \phi_{n-1}(\xi) \quad (\text{A.23})$$

e para $\epsilon_Q = -1$:

$$\mathcal{O}_1 \phi_n(\xi) = -i\sqrt{2n} \hbar c |\epsilon| B \phi_{n-1}(\xi) \quad (\text{A.24})$$

$$\mathcal{O}_2 \phi_n(\xi) = i\sqrt{2(n+1)} \hbar c |\epsilon| B \phi_{n+1}(\xi) \quad (\text{A.25})$$

onde usamos a definição de

$$p_x = \sqrt{2n \hbar c |\epsilon| B}$$

substituindo as definições na equação (A.15) obtemos as relações entre os coeficientes dada

por:

$$\begin{bmatrix} -\epsilon E + mc^2 & 0 & \epsilon p_x c & i\epsilon_Q \beta_0 \\ 0 & -\epsilon E + mc^2 & -i\epsilon_Q \beta_0 & -\epsilon p_x c \\ \epsilon p_x c & i\epsilon_Q \beta_0 & -\epsilon E - mc^2 & 0 \\ -i\epsilon_Q \beta_0 & -\epsilon p_x c & 0 & -\epsilon E - mc^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1^{(\epsilon)} \\ f_2^{(\epsilon)} \\ f_3^{(\epsilon)} \\ f_4^{(\epsilon)} \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{A.26})$$

o ansatz adequado para $f^{(\epsilon)}$ será dado por:

para $\epsilon_Q = 1$

$$f^{(\epsilon)} = \begin{bmatrix} f_1^{(\epsilon)} \phi_0 \\ f_2^{(\epsilon)} \phi_{0-1} \\ f_3^{(\epsilon)} \phi_0 \\ f_4^{(\epsilon)} \phi_{0-1} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.27})$$

para $\epsilon_Q = -1$

$$f^{(\epsilon)} = \begin{bmatrix} f_1^{(\epsilon)} \phi_{0-1} \\ f_2^{(\epsilon)} \phi_0 \\ f_3^{(\epsilon)} \phi_{0-1} \\ f_4^{(\epsilon)} \phi_0 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.28})$$

onde as constantes $f_1^{(\epsilon)}$, $f_2^{(\epsilon)}$, $f_3^{(\epsilon)}$ e $f_4^{(\epsilon)}$ são

$$\begin{aligned} f_2^{(\epsilon)} &= \frac{1}{\epsilon E + mc^2} (\epsilon p_x c f_1^{(\epsilon)} + i\epsilon_Q \beta_0 f_2^{(\epsilon)}) \\ f_4^{(\epsilon)} &= \frac{1}{\epsilon E + mc^2} (\epsilon p_x c f_3^{(\epsilon)} + i\epsilon_Q \beta_0 f_4^{(\epsilon)}) \end{aligned}$$

e pode ser reescrita como:

$$\begin{bmatrix} f_1^{(\epsilon)} \\ f_2^{(\epsilon)} \\ f_3^{(\epsilon)} \\ f_4^{(\epsilon)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{2p_x c}{\epsilon E + mc^2} \\ -\frac{i\epsilon_Q \beta_0 c}{\epsilon E + mc^2} \end{bmatrix} f_1^{(\epsilon)} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{i\epsilon_Q \beta_0 c}{\epsilon E + mc^2} \\ \frac{2p_x c}{\epsilon E + mc^2} \end{bmatrix} f_2^{(\epsilon)} \quad (\text{A.29})$$

Para obtermos soluções não triviais a matriz não pode ser inversível e, portanto, o seu determinante deve ser nulo. Para o cálculo deste determinante vamos usar a propriedades

de decomposição de uma matriz composta por blocos de submatrizes:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}}_{M_1} = \underbrace{\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & \mathbf{1} \end{pmatrix}}_{M_2} \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{1} & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}}_{M_3} \quad (\text{A.30})$$

as condições para obtermos a soluções não triviais, são:

$$\det[M_1] = \det[M_2] = \det A \cdot \det (D - CA^{-1}B)$$

resolveremos separadamente cada matriz do bloco, para tornar claro os procedimentos efetuados na resolução, as matrizes bloco são:

$$A = \begin{pmatrix} -\epsilon E + mc^2 & 0 \\ 0 & -\epsilon E + mc^2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} \epsilon p_x c & i\epsilon q p_y \\ -i\epsilon q p_x & -\epsilon p_x c \end{pmatrix} \quad (\text{A.31})$$

$$C = \begin{pmatrix} \epsilon p_x c & i\epsilon q p_y \\ -i\epsilon q p_x & -\epsilon p_x c \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} -\epsilon E - mc^2 & 0 \\ 0 & -\epsilon E - mc^2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.32})$$

A matriz adjunta é dada por:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj}^A \quad \text{onde } \text{adj}^A = (\text{Cof } A)^T$$

Calculando a determinante da matriz A , temos

$$\det \begin{bmatrix} -\epsilon E + mc^2 & 0 \\ 0 & -\epsilon E + mc^2 \end{bmatrix} = (-\epsilon E + mc^2)(-\epsilon E + mc^2) = (-\epsilon E + mc^2)^2 \quad (\text{A.33})$$

e os seus cofatores

$$\text{Cof } A = \begin{bmatrix} + \cdot A_{11} & - \cdot A_{12} \\ - \cdot A_{21} & + \cdot A_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{A.34})$$

sendo $A_{11} = -\epsilon E + mc^2$, $A_{12} = 0$, $A_{21} = 0$ e $A_{22} = -\epsilon E + mc^2$

$$\text{Cof } A = (\text{Cof } A)^T = \begin{bmatrix} -\epsilon E + mc^2 & 0 \\ 0 & -\epsilon E + mc^2 \end{bmatrix} = \text{adj}^A \quad (\text{A.35})$$

temos a matriz adjunta de A , dada por:

$$A^{-1} = \frac{1}{(-\epsilon E + mc^2)^2} \begin{bmatrix} -\epsilon E + mc^2 & 0 \\ 0 & -\epsilon E + mc^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{-\epsilon E + mc^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.36})$$

podemos agora determinar o produto entre as matrizes $CA^{-1}B$, onde obtemos

$$\begin{aligned}
 CA^{-1}B &= \frac{1}{-\epsilon E + mc^2} \begin{pmatrix} \epsilon p_x c & i\epsilon Q p_y \\ -i\epsilon Q p_x & -\epsilon p_x c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon p_x c & i\epsilon Q p_y \\ -i\epsilon Q p_x & -\epsilon p_x c \end{pmatrix} \quad (\text{A.37}) \\
 &= \frac{1}{-\epsilon E + mc^2} \begin{pmatrix} \epsilon p_x c & i\epsilon Q p_y \\ -i\epsilon Q p_x & -\epsilon p_x c \end{pmatrix}^2
 \end{aligned}$$

agora com mais facilidade podemos resolver a relação $\det A \cdot \det (D - CA^{-1}B)$

$$\begin{aligned}
 \det \begin{bmatrix} -\epsilon E + mc^2 & 0 \\ 0 & -\epsilon E + mc^2 \end{bmatrix} \det \begin{bmatrix} -\epsilon E - mc^2 & 0 \\ 0 & -\epsilon E - mc^2 \end{bmatrix} & \quad (\text{A.38}) \\
 -\frac{1}{-\epsilon E + mc^2} \begin{pmatrix} \epsilon p_x c & i\epsilon Q p_y \\ -i\epsilon Q p_x & -\epsilon p_x c \end{pmatrix}^2 &= 0
 \end{aligned}$$

resolvendo

$$\begin{aligned}
 CA^{-1}B &= \frac{1}{-\epsilon E + mc^2} \begin{pmatrix} (\epsilon p_x c)^2 - (i\epsilon Q p_y)^2 & \epsilon p_x c \cdot i\epsilon Q p_y & \epsilon p_x c \cdot i\epsilon Q p_y \\ -\epsilon p_x c \cdot i\epsilon Q p_y & \epsilon p_x c \cdot i\epsilon Q p_y & (\epsilon p_x c)^2 - (i\epsilon Q p_y)^2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.39}) \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{\epsilon^2 p_x^2 + \epsilon^2 Q^2 p_y^2}{-\epsilon E + mc^2} & 0 \\ 0 & \frac{\epsilon^2 p_x^2 + \epsilon^2 Q^2 p_y^2}{-\epsilon E + mc^2} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

e fazendo a diferença entre as matrizes $D - CA^{-1}B$, temos:

$$\begin{aligned}
 D - CA^{-1}B &= \begin{pmatrix} -\epsilon E - mc^2 & 0 \\ 0 & -\epsilon E - mc^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\epsilon^2 p_x^2 + \epsilon^2 Q^2 p_y^2}{-\epsilon E + mc^2} & 0 \\ 0 & \frac{\epsilon^2 p_x^2 + \epsilon^2 Q^2 p_y^2}{-\epsilon E + mc^2} \end{pmatrix} \quad (\text{A.40}) \\
 &= \begin{pmatrix} -\epsilon E - mc^2 - \frac{\epsilon^2 p_x^2 + \epsilon^2 Q^2 p_y^2}{-\epsilon E + mc^2} & 0 \\ 0 & -\epsilon E - mc^2 - \frac{\epsilon^2 p_x^2 + \epsilon^2 Q^2 p_y^2}{-\epsilon E + mc^2} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Resolvendo a determinante da matriz $D - CA^{-1}B$, obtemos:

$$\begin{aligned}
 \det D - CA^{-1}B &= \det \begin{bmatrix} -\epsilon E - mc^2 - \frac{p_x^2 + p_y^2}{-E + mc^2} & 0 \\ 0 & -\epsilon E - mc^2 - \frac{p_x^2 + p_y^2}{-E + mc^2} \end{bmatrix} \quad (\text{A.41}) \\
 &= \left(-\epsilon E - mc^2 - \frac{p_x^2 + p_y^2}{-E + mc^2} \right) \left(-\epsilon E - mc^2 - \frac{p_x^2 + p_y^2}{-E + mc^2} \right) \\
 &= E^2 + \epsilon E mc^2 + \frac{(\epsilon E)(p_x^2 + p_y^2)}{-E + mc^2} + \epsilon E mc^2 + (mc^2)^2 + \frac{(-mc^2)(p_x^2 + p_y^2)}{-E + mc^2} \\
 &+ \left(\frac{p_x^2 + p_y^2}{-E + mc^2} \right) \epsilon E mc^2 + \left(\frac{p_x^2 + p_y^2}{-E + mc^2} \right) mc^2 + \left(\frac{p_x^2 + p_y^2}{-E + mc^2} \right) \\
 &\times \left(\frac{p_x^2 + p_y^2}{-E + mc^2} \right) \\
 &= \frac{(-\epsilon E^2 + m^2 c^4 + p_x^2 c^2 + p_y^2 c^2)^2}{(-\epsilon E + mc^2)^2}
 \end{aligned}$$

portanto da relação $\det A \cdot \det (D - CA^{-1}B)$, temos:

$$\det A \cdot \det (D - CA^{-1}B) = \frac{(-\epsilon E + mc^2)^2 (-\epsilon E^2 + m^2 c^4 + p_x^2 c^2 + p_y^2 c^2)^2}{(-\epsilon E + mc^2)^2} \quad (\text{A.42})$$

A solução da equação acima é trivial e resulta em:

$$(-E^2 + m^2 c^4 + p_x^2 c^2 + p_y^2 c^2)^2 = 0$$

de modo que determinamos as bases dos auto-valores de energia de um elétron sob ação de um campo magnético externo constante

$$E = \pm \sqrt{p_x^2 c^2 + m^2 c^4 + p_y^2 c^2} \quad (\text{A.43})$$

após a substituição de p_y , temos

$$E = \pm \sqrt{p_x^2 c^2 + m^2 c^4 + 2\hbar c |e| B n} \quad (\text{A.44})$$

Para um caso onde temos uma carga e positiva por exemplo quando $n = 0$ temos apenas um estado ocupado, no entanto, para $n \geq 1$ os estados passam a serem duplamente degenerado, isso pode ser associado a um rótulo de spin, tal que:

$$n = l + (-s + 1) \quad , l = 0, 1, 2, \dots, s = \pm 1, \text{ para } e \text{ positiva}$$

$$n = l + (s + 1) \quad , l = 0, 1, 2, \dots, s = \pm 1, \text{ para } e \text{ negativa.}$$

FOLHA DE REGISTRO DO DOCUMENTO

¹ CLASSIFICAÇÃO/TIPO TD	² DATA 20 de Dezembro de 2016	³ DOCUMENTO Nº DCTA/ITA/TD-000/2016	⁴ Nº DE PÁGINAS 142
⁵ TÍTULO E SUBTÍTULO Matéria fermiônica sujeita a altos campos magnéticos e seus efeitos em anãs brancas magnetizadas			
⁶ AUTOR(ES): Edson Ottoniel da Silva			
⁷ INSTITUIÇÃO(ÕES), ÓRGÃO(S) INTERNO(S), UNIDADE(ÕES): Instituto Tecnológico de Aeronáutica - ITA			
⁸ PALAVRAS-CHAVE SUGERIDAS PELO AUTOR: Campos magnéticos; Equação de estado; Anã branca; Magnetic Field; Equation of State; White Dwarf			
⁹ PALAVRAS-CHAVE RESULTANTES DE INDEXAÇÃO: Estrelas anãs; Campos magnéticos; Equações de estado; Propriedades magnéticas; Fusão nuclear; Física nuclear.			
¹⁰ APRESENTAÇÃO <input checked="" type="checkbox"/> Nacional <input type="checkbox"/> Internacional ITA, São José dos Campos. Curso de Doutorado. Programa de Pós-Graduação em Física. Área de Física Nuclear. Orientador: Prof. Dr. Manuel Máximo Bastos Malheiro de Oliveira; coorientador Prof. Dr. Fridolin Weber. Defesa em 20/12/2016. Publicada em 2016.			
¹¹ RESUMO: Neste trabalho, estudamos as propriedades das anãs brancas magnetizadas tendo em conta as possíveis instabilidades devido à captura de elétrons e as reações de fusão piónucleares nos núcleos de tais estrelas. A estrutura das anãs brancas é obtida resolvendo inicialmente a equação de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) com um campo magnético constante na equação de estado e posteriormente as equações Einstein-Maxwell com um campo magnético poloidal em uma abordagem de relatividade geral. O interior estelar é composto de uma estrutura cristalina regular, formada por íons de carbono e carbono/oxigênio inserido em um gás de elétrons degenerado relativista. Os inícios das reações de captura de elétrons e reações piónucleares são determinados com e sem campos magnéticos. Concluímos que as anãs brancas magnetizadas violam significativamente o limite padrão de massa de Chandrasekhar, mesmo quando a captura eletrônica e as instabilidades piónucleares não estão presentes no interior da estrela. Obtemos uma anã branca com massa máxima de $2.12M_{\odot}$ com um campo magnético central $B \sim 1.74 \times 10^{14}$ G, o que indica que as anãs brancas magnetizadas podem ser candidatas a progenitoras de supernovas superluminosas Tipo Ia. Além disso, mostramos que a densidade crítica para reações de fusão piónuclear limita a densidade central na anã branca em até $\rho \sim 2.39 \times 10^9$ g/cm ³ e em consequência, o seu raio equatorial não pode ser menor do que $R \sim 1.600$ km. Encontramos para anãs brancas magnetizadas com o campo magnético central inferior a $B \sim 10^{13}$ G a fenomenologia usual conhecida na literatura: aumentando o campo magnético central (a densidade de energia magnética), a densidade central de número bariônico reduz-se com o raio estelar aumentando. No entanto, para campos magnéticos centrais maiores (e as massas mais elevadas), temos uma nova fenomenologia para a estrutura estelar: ao aumentar o campo magnético da estrela, a densidade central de número bariônico aumenta proporcionalmente, uma vez que o raio equatorial diminui, tornando as anãs brancas magnetizadas mais compactas. Concluímos também que anãs brancas magnetizadas com rápidas rotações podem ser até dez vezes menos densas no seu centro do que as anãs brancas comuns. Por fim, propomos uma nova classe de estrelas, as anãs estranhas compostas por um núcleo de matéria de quarks, envolta por uma crosta de elétrons degenerados e uma rede cristalina de íons sujeita a campos magnéticos como nas anãs brancas normais. Estas estrelas com uma crosta formada de carbono e oxigênio e não como feito anteriormente com uma crosta de estrela de nêutrons descrita por um equação BPS, descrevem bem melhor algumas anãs brancas muito compactas observadas, normalmente entendidas como tendo ferro no seu interior mas esperadas serem instáveis.			
¹² GRAU DE SIGILO: <input checked="" type="checkbox"/> OSTENSIVO <input type="checkbox"/> RESERVADO <input type="checkbox"/> SECRETO			