

Dissertação apresentada à Pró-Reitoria de Pós-Graduação do Instituto Tecnológico de Aeronáutica, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências no Programa de Pós-Graduação em Física, Área de Dinâmica Não-Linear e Sistemas Complexos.

**Luiz Eduardo Sivieri**

**DESCRITORES LAGRANGIANOS APLICADOS À  
ASTRODINÂMICA: O MODELO RESTRITO DE TRÊS  
CORPOS**

Dissertação aprovada em sua versão final pelos abaixo assinados:



Prof. Dr. Erico Luiz Rempel

Orientador



Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Maísa de Oliveira Terra

Coorientadora

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Emília Villani

Pró-Reitora de Pós-Graduação

Campo Montenegro  
São José dos Campos, SP - Brasil  
2021

**Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)**  
**Divisão de Informação e Documentação**

Sivieri, Luiz Eduardo

Descritores Lagrangianos aplicados à Astrodinâmica: O Modelo Restrito de Três Corpos / Luiz Eduardo Sivieri.

São José dos Campos, 2021.

68f.

Dissertação de Mestrado – Curso de Física. Área de Dinâmica Não-Linear e Sistemas Complexos – Instituto Tecnológico de Aeronáutica, 2021. Orientador: Prof. Dr. Erico Luiz Rempel. Coorientadora: Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Maísa de Oliveira Terra.

1. Problema de Três Corpos. 2. Sistemas Dinâmicos. 3. Mecânica Celeste. 4. Física. I. Instituto Tecnológico de Aeronáutica. II. Título.

## **REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA**

SIVIERI, Luiz Eduardo. **Descritores Lagrangianos aplicados à Astrodinâmica: O Modelo Restrito de Três Corpos**. 2021. 68f. Dissertação de Mestrado – Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos.

## **CESSÃO DE DIREITOS**

NOME DO AUTOR: Luiz Eduardo Sivieri

TÍTULO DO TRABALHO: Descritores Lagrangianos aplicados à Astrodinâmica: O Modelo Restrito de Três Corpos.

TIPO DO TRABALHO/ANO: Dissertação / 2021

É concedida ao Instituto Tecnológico de Aeronáutica permissão para reproduzir cópias desta dissertação e para emprestar ou vender cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta dissertação pode ser reproduzida sem a autorização do autor.

---

Luiz Eduardo Sivieri  
Rua Rui Sérgio Rodrigues de Moura,1273  
12244-465 – São José dos Campos-SP

# DESCRITORES LAGRANGIANOS APLICADOS À ASTRODINÂMICA: O MODELO RESTRITO DE TRÊS CORPOS

**Luiz Eduardo Sivieri**

Composição da Banca Examinadora:

Prof. Dr.	Marco Ridenti	Presidente	-	ITA
Prof. Dr.	Erico Luiz Rempel	Orientador	-	ITA
Prof <sup>a</sup> . Dr <sup>a</sup> .	Maísa de Oliveira Terra	Coorientadora	-	ITA
Prof. Dr.	Jayr Amorim	Membro Interno	-	ITA
Prof. Dr.	Rodolpho Vilhena de Moraes	Membro Externo	-	UNIFESP
Prof <sup>a</sup> . Dr <sup>a</sup> .	Marisa Roberto	Suplente Interno	-	ITA
Prof <sup>a</sup> . Dr <sup>a</sup> .	Teresinha Stuchi	Suplente Externo	-	UFRJ

À minha família, professores, amigos e colegas do ITA que muito me ajudaram na realização deste trabalho.

# Agradecimentos

Agradeço aos professores Dr. Erico Luiz Rempel e Dra. Máisa de Oliveira Terra pela orientação, pelo conhecimento transmitido, por toda a paciência, dedicação, conselhos e correções de grande valia para a realização deste trabalho, como também lições de vida.

Agradeço aos colegas do grupo de pesquisa, Dalton, Francis, Suzana e Leonardo pelas contribuições feitas para o desenvolvimento deste trabalho, em especial ao Dalton pelas inúmeras discussões e ajuda ao longo deste trabalho.

Agradeço aos meus pais, Disney e Marlene, que mesmo diante de todas as dificuldades enfrentadas sempre estiveram ao meu lado, dispostos a ajudar independente da situação. Aos meus irmãos, em especial a Amanda e Junior, por todos os conselhos e ajuda prestadas.

Agradeço o Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA) e todo o corpo docente pelo suporte e oportunidade oferecido, como também pelo conhecimento transmitido.

Agradeço ao apoio financeiro da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) durante todo o desenvolvimento deste trabalho.

*“Above all, science is an imperfect, highly social activity. It happens in labs — but also in hallways and airports, over pizza or coffee. And as with any other human endeavour, egos and reputations play a huge part. Friendships are forged, broken and mended over perceived or actual slights in the literature or at conferences. The actual data matter less often than we would like to admit.”*

— DAVID QUAMMEN

# Resumo

O principal objetivo deste trabalho é analisar ferramentas de detecção de Estruturas Coerentes Lagrangianas, buscando identificar as vantagens e desvantagens de cada uma dessas ferramentas aplicadas ao modelo dinâmico do *Problema Restrito de Três Corpos Circular Planar*. Geralmente, na literatura, o espaço de fase do problema de três corpos é estudado por meio de seções de Poincaré e bacias de escape. Vamos comparar esses resultados com os obtidos por dois descritores lagrangianos. O primeiro deles é o campo do Expoente de Lyapunov de Tempo-Finito (FTLE), uma ferramenta que já foi usada nesse contexto na literatura. O segundo descritor lagrangiano é o comprimento de arco usando a Função-M, ou sua variante, a Função- $\hat{M}$ . A investigação foi feita para a evolução temporal do sistema Terra-Lua com diferentes níveis de energia, que possibilitam canais de transporte naturais entre regiões no espaço de fase no contexto de missões espaciais. Em nossa comparação, a Função-M( $\hat{M}$ ) se mostrou mais adequada do que o FTLE nessa tarefa.

# Abstract

The main objective of this work is to analyze Lagrangian Coherent Structures detection tools, seeking to identify the advantages and disadvantages of each of these tools applied to the dynamical model of the *Planar Circular Restricted Three-Body Problem*. Generally, in the literature, the phase space of the three-body problem is studied by means of Poincaré sections and escape basins. We will compare these results with those obtained by two Lagrangian descriptors. The first of these is Finite-Time Lyapunov Exponent (FTLE) field, a tool that has already been used in this context in the literature. The second Lagrangian descriptor is the arc-length using the M-Function, or its variant, the  $\hat{M}$ -Function. The investigation was done for the time evolution of the Earth-Moon system with different energy levels, which enable natural transport channels between regions in phase space in the context of space mission. In our comparison, the  $M(\hat{M})$ -Function proved to be better suited than FTLE in this task.

# Lista de Figuras

FIGURA 1.1 – Trajetória da missão <i>Gênesis</i> (2001-2004). Fonte: <i>NASA/Jet Propulsion Laboratory</i> . . . . .	17
FIGURA 2.1 – <b>a)</b> Representação de trecho de uma órbita quasi-periódica sobre um toro no espaço de fase tridimensional, percorrendo toda a superfície do toro e jamais se fecha; <b>b)</b> órbita periódica com $R = 3$ . (OTT, 1993)	20
FIGURA 2.2 – Representação das variedades invariantes em um ponto de sela, onde $W^e$ e $W^i$ são, respectivamente, as variedades estável e instável (MONTEIRO, 2019). . . . .	22
FIGURA 2.3 – a) Órbita homoclínica em torno de cruzamentos entre as variedades estável $W^s(\gamma)$ e instável $W^u(\gamma)$ de um ponto fixo $\gamma$ ; b) Órbita heteroclínica sobre os cruzamentos entre as variedades estável e instável de dois pontos de sela $(\gamma_1, \gamma_2)$ distintos. (OTT, 1993) . . . . .	22
FIGURA 2.4 – Representação qualitativa das trajetórias para diferentes valores do FTLE (PÉREZ-PALAU <i>et al.</i> , 2015) . . . . .	23
FIGURA 3.1 – Ilustração da configuração do problema restrito de três corpos em torno do baricentro, onde $\omega$ representa o vetor velocidade angular, e $r_1$ e $r_2$ as distâncias relativas de $P_3(m)$ aos primários $P_1(m_1)$ e $P_2(m_2)$	28
FIGURA 3.2 – Quatro possíveis configurações das curvas de velocidade zero e regiões acessíveis para o PR3CCP, encontradas à medida que o valor de $C$ decresce. Os primários estão localizados, respectivamente, em $x_1$ e $x_2$ , sendo $L_i, i = 1, \dots, 5$ , os <i>pontos Lagrangianos</i> (SCHAUB; JUNKINS, 2003). As regiões em cinza são as regiões inacessíveis para um determinado valor de $C$ . . . . .	29
FIGURA 3.3 – Localização dos pontos lagrangianos (KOON <i>et al.</i> , 2011) . . . . .	30

- FIGURA 3.4 – Representação do fluxo em torno de uma região de equilíbrio. São apresentadas órbitas periódicas (preto), órbitas que apresentam comportamento assintótico (verde) em direção à órbita periódica, órbitas não-trânsito (azul) e órbitas trânsito (vermelho) (KOON *et al.*, 2011) 31
- FIGURA 3.5 – Representação das conexões homoclínicas-heteroclínicas (KOON *et al.*, 2011). . . . . 32
- FIGURA 4.1 – Campo de Expoentes de Lyapunov de Tempo Finito para o pêndulo simples (Eq. 4.1), com integração direta por 30 unidades de tempo. **a)** Imagem produzida pelo autor; **b)** Imagem retirada de (PÉREZ-PALAU *et al.*, 2015, p.243). . . . . 36
- FIGURA 4.2 – Campos escalares para o pêndulo simples com integração direta por 30 unidades de tempo. **a)** Função- $M$ ; **b)** Função- $\hat{M}$  com  $\hat{p} = 0.4$ , **c)** contornos extraídos do campo gradiente da Função- $M$ ; **d)** *Jet Transport* (PÉREZ-PALAU *et al.*, 2015, p.252) . . . . . 36
- FIGURA 4.3 – Campo de Expoentes de Lyapunov de Tempo Finito para o pêndulo perturbado (Eq. 4.2), com integração progressiva até 10 unidades de tempo. **a)** Imagem produzida pelo autor; **b)** Imagem retirada de (PÉREZ-PALAU *et al.*, 2015, p.243) . . . . . 37
- FIGURA 4.4 – Campos escalares para o pêndulo perturbado com integração avançada até 10 unidades de tempo. **a)** Função- $M$ ; **b)** Função- $\hat{M}$  com  $\hat{p} = 0.4$ , **c)** contornos extraídos do campo gradiente da Função- $M$ ; **d)** *Jet Transport* (PÉREZ-PALAU *et al.*, 2015, p.252) . . . . . 38
- FIGURA 4.5 – Mapa de Poincaré utilizando os parâmetros do Gawlik com as seções **(a,b)**  $(x, \dot{x})$ , para  $y = 0$  e  $\dot{y} > 0$ ; e **(c,d)**  $(x, \dot{x})$ , para  $y = 0$  e  $\dot{y} < 0$ , respectivamente . . . . . 40
- FIGURA 4.6 – FTLE encontrado com parâmetro de massa  $\mu = 0.1$  e Constante de Jacobi  $\approx 3.6126$ , a partir de condições iniciais na seção de Poincaré  $(x, \dot{x})$ , para  $y = 0$  e  $\dot{y} < 0$ , com perturbação de  $10^{-3}$  sobre as trajetórias vizinhas com **a)**  $T = 2$  e **b)**  $T = 5$  . . . . . 40
- FIGURA 4.7 – FTLE encontrado com parâmetro de massa  $\mu = 0.1$  e Constante de Jacobi  $\approx 3.6126$ , a partir de condições iniciais na seção de Poincaré  $(x, \dot{x})$ , para  $y = 0$  e  $\dot{y} < 0$ , com perturbação de  $10^{-5}$  e os respectivos **a)**  $T = 2$  e **b)**  $T = 5$ . . . . . 41

- FIGURA 4.8 – FTLE obtido para o PR3CP no plano  $y = 0$  com  $\mu = 0.1$  e energia fixa como  $E = E(L_1) + 0.0371$  com os respectivos tempos integração sendo **a)**  $T = 2$  e **b)**  $T = 5$ . Fonte: Gawlik et al. (2009). . . . . 41
- FIGURA 4.9 – Comparação entre as trajetórias para o PR3CP evoluindo com distanciamento inicial de **a)**  $10^{-3}$  e **b)**  $10^{-5}$  em relação à trajetória de referência. . . . . 42
- FIGURA 4.10 – Intersecção dos cortes das variedades estável (verde) e instável (vermelho) da órbita de Lyapunov da região de equilíbrio em torno de  $L_1$  do PR3CCP no plano  $y = 0$ , com  $\mu = 0.1$  e  $E = E(L_1) + 0.03715$  (KOON *et al.*, 2000). . . . . 43
- FIGURA 4.11 – Representação do campo do FTLE integrando para frente (verde) e para trás (vermelho) por 10 unidades de tempo, uma grade de condições iniciais de  $1024 \times 1024$  pontos, sendo **a)** os contornos extraídos do campo gradiente do FTLE, e **b)** o campo FTLE normalizado pelos seus máximos globais. . . . . 43
- FIGURA 4.12 – Evolução do FTLE para o PR3CCP no plano  $(x, y)$ , para  $\dot{x} = 0$  e  $\dot{y} > 0$  e  $C = 3.2$  para **a)**  $T = 5$ , **b)**  $T = 15$ , **c)**  $T = 25$ , **d)**  $T = 50$  . . . 46
- FIGURA 4.13 – Bacias de escape do Sistema Terra-Lua para  $C = 3.2$ . Em **a)** temos apenas a bacia limitada, ou seja, as condições iniciais de trajetórias que permanecem no domínio em torno da Lua, sem colidir com o primário e sem escapar para  $t_f = 200$  unidades de tempo. Em **b)** temos as três bacias de escape para  $t_f = 5000$  unidades de tempo. Neste caso, temos a bacia colisional (preto), a bacia de escape para o domínio da Terra (azul) e a bacia limitada (verde). (ASSIS; TERRA, 2014). . . . . 46
- FIGURA 4.14 – Intersecção das variedades estável (verde) e instável (vermelha) da órbita de Lyapunov em torno de  $L_1$ , obtidas por a) seção de Poincaré (ASSIS; TERRA, 2014). . . . . 47
- FIGURA 4.15 – Campo do FTLE para 15 unidades de tempo progressivamente (verde) e regressivamente (vermelho) e grade condições iniciais de  $1024 \times 1024$  pontos, utilizando o campo gradiente do FTLE em (a) e o campo do FTLE normalizado pelos seus máximos globais em (b) . . . 47

- FIGURA 4.16 –Evolução do FTLE para o PR3CCP no plano  $(x, y, \dot{x} = 0, \dot{y} > 0)$  e  $C = 3.188075$  para os respectivos tempos **a)**  $T = 5$ , **b)**  $T = 15$ , **c)**  $T = 25$ ; d) diagrama das bacias de escape, contendo a bacia de escape para o domínio da Terra (*azul*), bacia de soluções limitadas (*verde*) e o conjunto colisional (preto) (ASSIS; TERRA, 2014) . . . . . 48
- FIGURA 4.17 –Evolução do FTLE para o PR3CCP no plano  $(x, y, \dot{x} = 0, \dot{y} > 0)$  e  $C = 3.1841$  para os respectivos tempos **a)**  $T = 5$ , **b)**  $T = 15$ , **c)**  $T = 25$ ; d) diagrama das bacias de escape, contendo a bacia de escape para o domínio da Terra (*azul*), bacia de escape para o domínio exterior (*vermelho*) (escape pela região de  $L_2$ ), bacia de soluções limitadas (*verde*) e o conjunto colisional (preto) (ASSIS; TERRA, 2014) . . . . . 49
- FIGURA 4.18 –Reprodução das Variedades apresentadas na Figura 4.7, desta vez usando o método da Função- $M$ , que integra de  $[-\tau, +\tau]$  nos respectivos tempos: **a)**  $\tau = 2$  e **b)**  $\tau = 5$ . . . . . 50
- FIGURA 4.19 –Reprodução das Variedades apresentadas na Fig. 4.7, desta vez usando o método da Função- $M$ , integrando apenas para frente nos seguintes tempos: **a)**  $\tau = 2$  e **b)**  $\tau = 5$ . . . . . 51
- FIGURA 4.20 –Comparação entre métodos da Função- $M$  e da Função- $\hat{M}$  usando os parâmetros descritos na Configuração de Análise de Gawlik, com 5 unidades de tempo para integração. Os métodos utilizados para cada figura são, respectivamente, Função- $M$  (**a, b, c**), Função- $\hat{M}$  com fator  $\hat{p} = 0.4$  (**d, e, f**) e Função- $\hat{M}$  com fator  $\hat{p} = 0.8$  (**g, h, i**). A primeira coluna (**a, d, g**) representa o cálculo usando as posições e velocidades de cada método, sendo a segunda coluna (**b, e, h**) o cálculo usando somente as velocidades e a terceira coluna (**c, f, i**) somente as posições. . . . . 52
- FIGURA 4.21 –Função- $M$  usando os parâmetros encontrados em (ASSIS; TERRA, 2014), para  $C=3.20$  e 5 unidades de tempo de integração. (a) Cálculo usando as posições e velocidades; (b) cálculo usando somente as velocidades; (c) cálculo usando somente as posições. . . . . 53
- FIGURA 4.22 –Função- $\hat{M}$  com fator  $\hat{p} = 0.4$  usando os parâmetros encontrados em (ASSIS; TERRA, 2014), para  $C=3.20$  e 5 unidades de tempo de integração. (a) Cálculo usando as posições e velocidades; (b) cálculo usando somente as velocidades; (c) cálculo usando somente as posições. 54

- FIGURA 4.23 – Função- $\hat{M}$  com fator  $\hat{p} = 0.8$  usando os parâmetros encontrados em (ASSIS; TERRA, 2014), para  $C=3.2$  e 5 unidades de tempo de integração. (a) Cálculo usando as posições e velocidades; (b) cálculo usando somente as velocidades; (c) cálculo usando somente as posições. 55
- FIGURA 4.24 – Função- $M$  usando somente as posições para a seção  $(x, y)$ , com  $\dot{x} = 0$  e  $\dot{y} > 0$ , com  $C = 3.2$  fixo para os seguintes tempos: **a)**  $T = 5$ , **b)**  $T = 15$ , **c)**  $T = 25$ . . . . . 56
- FIGURA 4.25 – Função- $\hat{M}$  com fator  $\hat{p} = 0.4$  usando somente as posições para a seção  $(x, y)$ , com  $\dot{x} = 0$  e  $\dot{y} > 0$ , com  $C = 3.2$  fixo para os seguintes tempos: **a)**  $T = 5$ , **b)**  $T = 15$ , **c)**  $T = 25$ . . . . . 57
- FIGURA 4.26 – Função- $M$  usando somente as posições para a seção  $(x, y)$ , com  $\dot{x} = 0$  e  $\dot{y} > 0$ , com  $C = 3.188075$  fixo para os seguintes tempos: **a)**  $T = 5$ , **b)**  $T = 15$ , **c)**  $T = 25$  . . . . . 58
- FIGURA 4.27 – Função- $\hat{M}$  com fator  $\hat{p} = 0.4$  usando somente as posições para a seção  $(x, y)$ , com  $\dot{x} = 0$  e  $\dot{y} > 0$ , com  $C = 3.188075$  fixo para os seguintes tempos: **a)**  $T = 5$ , **b)**  $T = 15$ , **c)**  $T = 25$  . . . . . 59
- FIGURA 4.28 – Função- $M$  usando somente as posições para a seção  $(x, y)$ , com  $\dot{x} = 0$  e  $\dot{y} > 0$ , com  $C = 3.1841$  fixo para os seguintes tempos: **a)**  $T = 5$ , **b)**  $T = 15$ , **c)**  $T = 25$  . . . . . 60
- FIGURA 4.29 – Função- $\hat{M}$  com fator  $\hat{p} = 0.4$  usando somente as posições para a seção  $(x, y)$ , com  $\dot{x} = 0$  e  $\dot{y} > 0$ , com  $C = 3.1841$  fixo para os respectivos tempos **a)**  $T = 5$ , **b)**  $T = 15$ , **c)**  $T = 25$  . . . . . 61
- FIGURA 4.30 – **(a)** Intersecção das variedades estável(*verde*) e instável(*vermelho*) do modelo de Gawlik encontradas utilizando a Função- $M$  integrando progressivamente e regressivamente com 10 unidades de tempo, grade de  $1024 \times 1024$ ,  $\mu = 0.1$ ,  $C = 3.6126$  no plano  $(x, \dot{x})$  para  $y = 0$  e  $\dot{y} < 0$ . **(b)** Variedades do modelo de Assis com 25 unidades de tempo, em uma grade  $1024 \times 1024$ ,  $\mu = 0.0121$ ,  $C = 3.200$  no plano  $(x, y)$ , para  $\dot{x} = 0$  e  $\dot{y} > 0$ . . . . . 62

- FIGURA 4.31 –Extração dos contornos do gradiente do **(a)** campo da Função- $M$  sobre a intersecção das variedades estável (*verde*) e instável (*vermelho*) para os parâmetros utilizados por Gawlik integrando progressivamente e regressivamente em  $a$ ) com 10 unidades de tempo, grade de  $1024 \times 1024$ ,  $\mu = 0.1$ ,  $C = 3.6126$  no plano  $(x, y = 0, \dot{x}, \dot{y} < 0)$ . **(b)** O mesmo para os parâmetros utilizados por Assis em com 15 unidades de tempo, em uma grade  $1024 \times 1024$ ,  $\mu = 0.0121$ ,  $C = 3.200$  no plano  $(x, y)$ , para  $\dot{x} = 0$  e  $\dot{y} > 0)$ . . . . . 62
- FIGURA 4.32 –Intersecção das variedades estável (*verde*) e instável (*vermelho*) para a configuração de Assis com 30 unidades de tempo, em uma grade  $1024 \times 1024$ ,  $C = 3.184164$ , no plano  $(x, y)$ , para  $\dot{x} = 0$  e  $\dot{y} > 0)$ . 63

# Sumário

1	INTRODUÇÃO . . . . .	16
2	SISTEMAS DINÂMICOS . . . . .	19
2.1	Sistemas Dinâmicos . . . . .	19
2.2	Órbitas periódicas e quasi-periodicidade . . . . .	19
2.3	Caos . . . . .	20
2.4	Variedades Invariantes . . . . .	21
2.5	Estruturas Coerentes Lagrangianas e Descritores Lagrangianos . . . . .	23
2.5.1	Expoente de Lyapunov de Tempo Finito . . . . .	23
2.5.2	Função- $M$ e $\hat{M}$ . . . . .	25
3	MODELO DINÂMICO . . . . .	27
3.1	Problema Restrito de Três Corpos . . . . .	27
3.2	Regularização de Lemaître . . . . .	33
4	RESULTADOS E DISCUSSÕES . . . . .	34
4.1	Pêndulo . . . . .	34
4.2	Problema Restrito de 3 Corpos . . . . .	38
4.2.1	Expoente de Lyapunov de Tempo-Finito . . . . .	38
4.2.2	Função- $M$ e $\hat{M}$ . . . . .	49
4.2.3	Segmentação de estruturas Lagrangianas com a Função- $M$ . . . . .	61
5	CONCLUSÃO . . . . .	64
	REFERÊNCIAS . . . . .	66

# 1 Introdução

Estruturas dinâmicas de modelos matemáticos de muitos corpos têm sido aplicadas em diversos aspectos da ciência, principalmente no que diz respeito à exploração espacial. Muitos projetos de trajetórias de missões espaciais bem sucedidas foram realizados através de abordagens clássicas, i.e., utilizando modelos de dois corpos, como, por exemplo, as missões dos Programas Apolo e Voyager. Porém, as abordagens através de modelos de dois corpos restringem os perfis de trajetórias espaciais a combinações de seções cônicas com foco em um dos primários, e por vezes, estão associadas a um alto custo de combustível. Por outro lado, projetos de trajetórias espaciais baseados em modelos de três ou mais corpos propiciam soluções com perfis diferenciados, orbitando, por exemplo, vizinhanças de pontos de equilíbrio destes modelos, e que por vezes são de menor gasto de combustível. Em especial, esses modelos possuem estruturas dinâmicas que se comportam como canais de transporte entre regiões do espaço de fases. Tais trajetórias podem ser usadas para estudos que envolvem observações de longa duração com menor gasto energético, tanto para transferências, quanto para manutenções orbitais.

Muitas das missões espaciais recentes possuem órbitas complexas que são relacionadas ao estudos da dinâmica gravitacional de N-corpos. Neste contexto, uma das missões espaciais pioneiras, já implementada e finalizada com sucesso, é a Missão Gênesis (2001-2004), da NASA, a qual empregou conexões heteroclínicas de variedades invariantes hiperbólicas e órbitas periódicas do tipo Halo localizadas em torno dos pontos de equilíbrio do Problema Restrito de Três Corpos do Sistema Sol-Terra como representado na Fig 1.1. Outros exemplos são: Missão do Telescópio Espacial James Webb, lançado em 25/12/2021, que opera em uma órbita periódica em torno do ponto lagrangiano  $L_2$  do sistema Sol-Terra (*Animação da órbita do Telescópio Espacial James Webb - (JWST, 2021)*); E a Missão Artemis, da NASA, prevista para acontecer em 2024, a qual pretende, justamente, aplicar conexões de órbitas heteroclínicas no sistema Terra-Lua e, futuramente, no sistema Lua-Marte.

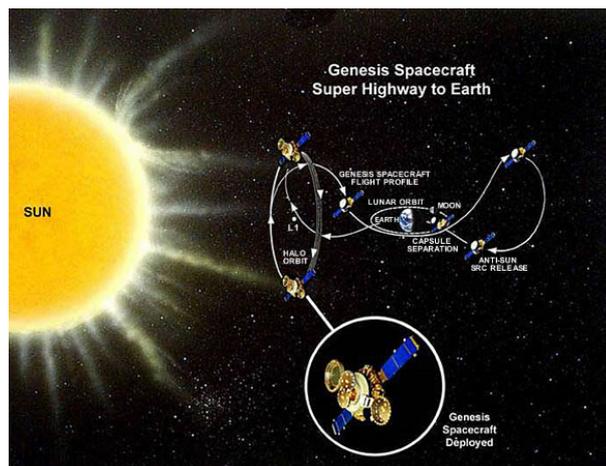


FIGURA 1.1 – Trajetória da missão *Gênesis* (2001-2004). Fonte: NASA/Jet Propulsion Laboratory.

O problema de três corpos é um problema clássico da astrodinâmica, sendo que tentativas de solucioná-lo fundamentaram as bases para teorias de sistemas dinâmicos. Em particular, este estudo propiciou que Poincaré identificasse, ainda no final do Século XIX, sem o uso de computadores, fenômenos dinâmicos intrincados e complexos, que dentro da teoria moderna, passaram a pertencer ao estudo de Caos em Sistemas Conservativos (KOON *et al.*, 2000). Os resultados de tais estudos muitas vezes têm implicações muito mais amplas na teoria de sistemas. Em particular, a obtenção de um quadro global das barreiras dinâmicas, as chamadas *variedades*, que regem o transporte de material através de um sistema de muitos corpos, é uma questão importante para uma gama surpreendentemente ampla de campos da ciência. Essas barreiras podem ser encontradas de diversas formas, tais como mapas de Poincaré ou mesmo por bacias de escapes, como apresentado por Assis & Terra (2014).

As Estruturas Coerentes Lagrangianas (do inglês, *Lagrangian Coherent Structures - LCS*) foram introduzidas por Haller & Yuan (2000) e têm sido propostas como uma generalização do conceito de variedades invariantes nos estudos de sistemas dinâmicos não-estacionários. Essas estruturas separam o espaço de fase em regiões com comportamentos distintos e, em sistemas dissipativos, delimitam regiões de máxima atração e repulsão, organizando a evolução do sistema de modo similar ao das variedades invariantes de problemas estacionários. As LCS têm sido implementadas com sucesso tanto nos estudos de dinâmica de fluidos (SHADDEN *et al.*, 2005; LEKIEN; LEONARD, 2004; PENG; DABIRI, 2009; FARAZMAND; HALLER, 2012), como também para o problema restrito de três corpos (KOON *et al.*, 2000; QU *et al.*, 2020; GAWLIK *et al.*, 2009; PÉREZ-PALAU *et al.*, 2015), além de outras áreas de pesquisa. A teoria de LCS ainda está em desenvolvimento, contudo, consideram-se as LCS como separatrizes no espaço de fase, conforme originalmente definidas, sendo regiões com valores relativamente altos do Expoente de Lyapunov de Tempo-Finito (do inglês, *Finite-Time Lyapunov Exponent - FTLE*). Assim, a maior

parte dos trabalhos na literatura usam da ferramenta FTLE para a detecção de LCS. Entretanto, de acordo com Haller (2011), Farazmand & Haller (2012), algumas estruturas marcadas com altos valores em um campo FTLE podem não corresponder às LCS reais do sistema. Existem trabalhos, como o caso apresentado por Pérez-Palau (2015) o qual busca definir um método de correção do campo de FTLE para “limpar” as estruturas que não correspondam às LCS. Similarmente, existem outros métodos de detecção dessas LCS, como, por exemplo, o comprimento de arco de trajetórias, que é usado na definição da Função-M e sua variante, a Função- $\hat{M}$ . A Função-M foi utilizada com sucesso por Mendoza & Mancho (2010), Mendoza *et al.* (2010) para detectar variedades oceânicas, bem como por Rempel *et al.* (2013) para detectar variedades em fluidos magnetizados. A Função- $\hat{M}$  foi empregada por Montes *et al.* (2021) no estudo de trajetórias sobre toros invariantes no espaço de fase de um sistema Hamiltoniano.

O objetivo deste trabalho é, por meio do problema restrito de três corpos, fazer uma análise das ferramentas citadas, sendo elas o Expoente de Lyapunov de Tempo-Finito (FTLE), a Função-M e a Função- $\hat{M}$ , de modo a compará-las, apresentando para cada ferramenta seus aspectos vantajosos e desvantajosos na detecção de Estruturas Lagrangeanas Coerentes. A estrutura do trabalho é composta na seguinte forma: no Capítulo 2 são apresentados conceitos fundamentais de sistemas dinâmicos de grande utilidade para a compreensão deste trabalho. No Capítulo 3, apresentamos o modelo dinâmico do Problema Restrito de Três Corpos para o caso Circular Planar, falando sobre seus pontos de equilíbrio e fazendo associações com os conceitos apresentados no Capítulo 2, bem como o método de regularização utilizado para as simulações computacionais. No Capítulo 4 são apresentados os resultados para diferentes ferramentas, comparando-os em suas vantagens e desvantagens. Por fim, no Capítulo 5 apresenta-se os comentários finais sobre o trabalho e as propostas para continuação do mesmo.

## 2 Sistemas Dinâmicos

### 2.1 Sistemas Dinâmicos

Um sistema dinâmico corresponde, essencialmente, à evolução determinada por uma transformação em seu domínio, i.e., a variação de uma grandeza  $x(t)$  juntamente com uma regra determinística em um tempo  $t$ , podendo este ser contínuo ou discreto. Um exemplo de sistema dinâmico de tempo contínuo é um sistema de equações diferenciais ordinárias (ALLIGOOD *et al.*, 1996)

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad (2.1)$$

onde  $\mathbf{x} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$  e  $n$  é a dimensão do espaço vetorial, aqui chamado de *espaço de fase*. A denominação de tempo discreto é usada quando o tempo  $t \in \mathbb{Z}$ , sendo a evolução deste sistema governada por uma ou mais equações de diferenças que relacionam o valor de um vetor de estados  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  no instante  $t=m$  ao valor de  $\mathbf{x}$  no instante subsequente, de tal forma que

$$\mathbf{x}_{m+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_m),$$

onde  $\mathbf{x}_m$  denota o valor do vetor de estado  $\mathbf{x}$  no instante  $m$  (ALLIGOOD *et al.*, 1996). Um sistema como o da equação 2.1 é chamado não-autônomo, caso  $\mathbf{f}$  não dependa explicitamente do tempo  $t$ , o sistema é chamado autônomo.

### 2.2 Órbitas periódicas e quasi-periodicidade

Considere um sistema de tempo contínuo com fluxo  $\phi$ , i.e.,  $\phi_{t_0}^t(\mathbf{x}_0)$  é o estado do vetor  $\mathbf{x}$  no instante  $t$  a partir de uma condição inicial  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ . Um ponto  $\mathbf{x}_0$  é chamado *ponto de equilíbrio* ou ponto fixo, se  $\phi_{t_0}^t(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Para um sistema em que  $\phi_{t_0}^{t_0+T}(\mathbf{x}_0) = \phi_{t_0}^t(\mathbf{x}_0)$ , válido para todo  $t \in \mathbb{R}$  e algum  $T > 0$ , tal que  $\mathbf{x}_0$  não seja ponto de equilíbrio, a solução  $\phi_{t_0}^t(\mathbf{x}_0)$  é chamada de órbita periódica, i.e, ela repete seu comportamento de maneira exata após um período  $T$  (ALLIGOOD *et al.*, 1996).

Órbitas quasi-periódicas são uma composição de dois ou mais movimentos periódicos que situam-se sobre superfícies toroidais no espaço de fase. Seja uma órbita com duas frequências fundamentais  $\Omega = (\Omega_1, \Omega_2)$ , situada sobre um toro-2, se  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$  forem comensuráveis a órbita é dita periódica. Para o caso de quando  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$  são incomensuráveis, a órbita eventualmente se aproxima de cada ponto sobre a superfície toroidal. O número médio de rotações executadas pela órbita é definida como

$$R = \frac{\Omega_1}{\Omega_2}.$$

Quando  $R \in \mathbb{Q}$  a órbita apresenta movimento periódico, caso contrário temos movimento quasi-periódico. A Fig. 2.1 ilustra o comportamento de uma órbita periódica e quasi-periódica de duas frequências sobre a superfície de um toro em um espaço de fase tridimensional.

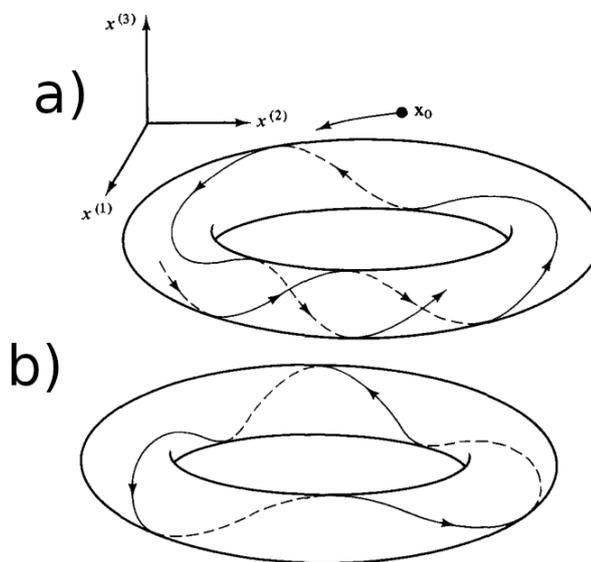


FIGURA 2.1 – **a)** Representação de trecho de uma órbita quasi-periódica sobre um toro no espaço de fase tridimensional, percorrendo toda a superfície do toro e jamais se fecha; **b)** órbita periódica com  $R = 3$ . (OTT, 1993)

## 2.3 Caos

Existem diferentes definições de caos na literatura, sendo que a maioria delas admite as seguintes propriedades (STROGATZ, 2018):

- É determinístico, i.e., o estado atual do sistema é unicamente determinado em termos de estados passados.
- Apresenta sensibilidade às condições iniciais, i.e., trajetórias infinitesimalmente próximas se afastam exponencialmente rápido, levando o sistema a ter um expoente de

Lyapunov positivo.

- Possui aparência errática, complexa e aperiódica.

## 2.4 Variedades Invariantes

Uma variedade, em sua definição mais básica, é um espaço topológico o qual lembra um espaço Euclidiano, i.e., cada ponto de uma variedade deve ter uma vizinhança que se assemelha ao  $\mathbb{R}^n$ . Em sistemas dinâmicos, variedades são curvas ou superfícies no espaço de fase associadas a pontos de equilíbrio do tipo sela ou outros conjuntos. Compreender o que é uma variedade é de suma importância nos estudos de sistemas dinâmicos, pois estas exercem influência por meio de suas posições relativas, determinando o aparecimento ou destruição de atratores caóticos, ou a delimitação de fronteiras entre bacias de atração (ALLIGOOD *et al.*, 1996).

Considere um sistema dinâmico autônomo com dimensão  $n$  superior a 1, com  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , definido por meio de um sistema de equações diferenciais não lineares  $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ , onde  $\mathbf{f}$  é o campo vetorial. Seja  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$  um ponto de equilíbrio desse sistema dinâmico, i.e., um ponto em que  $\mathbf{f}(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$ . Considerando a matriz Jacobiana de  $\mathbf{f}$  calculada nesse ponto, seus autovalores  $\lambda \in \mathbb{C}$  podem ser separados em  $\sigma_e$  e  $\sigma_i$ , respectivamente *estável* e *instável*, de modo

$$\lambda \in \sigma_e \text{ se } \operatorname{Re}(\lambda) < 0,$$

$$\lambda \in \sigma_i \text{ se } \operatorname{Re}(\lambda) > 0,$$

onde o subespaço gerado pelos autovetores cujos autovalores pertencem a  $\sigma_e$  é chamado de *subespaço estável*  $E^e$ , e aquele gerado pelos autovetores cujos autovalores pertencem a  $\sigma_i$  é chamado *subespaço instável*  $E^i$ .

Um conjunto  $S$  de pontos do espaço de fase  $n$ -dimensional é uma *variedade invariante local* se para  $\mathbf{x}(0)$  pertencente a esse conjunto  $S$ , a solução  $\mathbf{x}(t)$  com condição inicial em  $\mathbf{x}(0)$  está contida em  $S$  para  $t \rightarrow \pm\infty$ . Para um sistema dinâmico não linear diferenciável existe uma variedade estável  $W^e$ , invariante local, que é tangente ao subespaço  $E^e$  no ponto de equilíbrio  $P$ , possuindo a mesma dimensão  $n_e$  de  $E^e$ . Do mesmo modo existe uma variedade instável  $W^i$  tangente ao subespaço  $E^i$  em  $P$ , possuindo a mesma dimensão  $n_i$  de  $E^i$ . Como  $W^e$  e  $W^i$  possuem as mesmas propriedades assintóticas de  $E^e$  e  $E^i$ , respectivamente, tem-se que soluções com condições iniciais em  $W^e$  aproximam-se de  $P$  para  $t \rightarrow \infty$ , do mesmo modo que soluções com condições iniciais em  $W^i$  aproximam-se de  $P$  para  $t \rightarrow -\infty$ . A figura 2.2 demonstra justamente esses resultados para um sistema bidimensional com um ponto de equilíbrio do tipo sela (MONTEIRO, 2019).

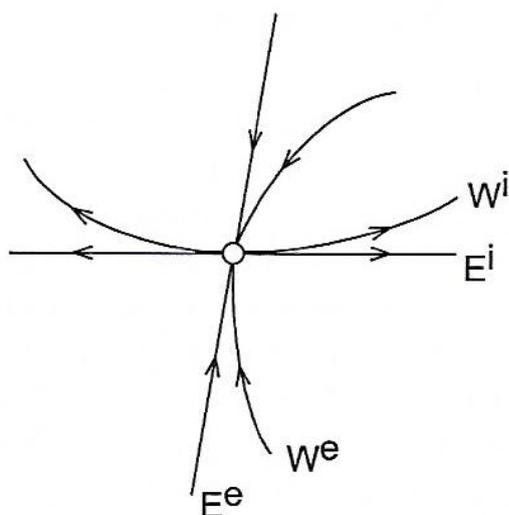


FIGURA 2.2 – Representação das variedades invariantes em um ponto de sela, onde  $W^e$  e  $W^i$  são, respectivamente, as variedades estável e instável (MONTEIRO, 2019).

Outros aspectos importantes que surgem no caso de variedades são as órbitas ditas *homoclínicas* e *heteroclínicas*, representadas na Fig. 2.3. Quando ocorre um cruzamento das variedades estável e instável associadas a um mesmo ponto  $\gamma$ , esta intersecção é chamada de homoclínica e, conseqüentemente, a órbita deste ponto é chamada de órbita homoclínica. No caso em que as variedades estável e instável pertencem a pontos fixos diferentes,  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ , esta intersecção é dita heteroclínica e, conseqüentemente, a órbita em torno deste ponto é chamada de órbita heteroclínica (OTT, 1993).

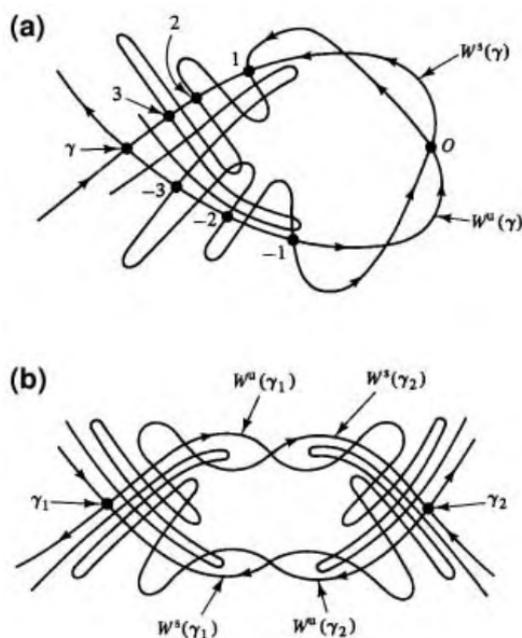


FIGURA 2.3 – a) Órbita homoclínica em torno de cruzamentos entre as variedades estável  $W^s(\gamma)$  e instável  $W^u(\gamma)$  de um ponto fixo  $\gamma$ ; b) Órbita heteroclínica sobre os cruzamentos entre as variedades estável e instável de dois pontos de sela  $(\gamma_1, \gamma_2)$  distintos. (OTT, 1993)

## 2.5 Estruturas Coerentes Lagrangianas e Descritores Lagrangianos

As variedades invariantes descritas na seção anterior são definidas para sistemas dinâmicos estacionários, i.e., aqueles em que o campo vetorial  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  não depende do tempo. Para campos variáveis no tempo, as “variedades” associadas com pontos de sela podem sofrer mudanças em sua topologia com o passar do tempo, sendo chamadas de Estruturas Coerentes Lagrangianas hiperbólicas (HALLER, 2011). O termo hiperbólico refere-se a pontos de equilíbrio em que nenhum dos autovalores da Jacobiana do campo vetorial é nulo, como no caso dos pontos de sela. A razão do termo “Lagrangiano” fica clara quando se estuda as ferramentas de detecção dessas estruturas, que se baseiam no acompanhamento de trajetórias no espaço de fase, o que no caso de um fluido representa um referencial Lagrangiano. Duas dessas ferramentas são descritas abaixo, os expoentes de Lyapunov de tempo finito e a Função-M (ou  $\hat{M}$ ). Chamaremos essas ferramentas de *Descritores Lagrangianos*. Enfatizamos que no presente trabalho se faz uso dessas ferramentas em um sistema dinâmico estacionário, logo, as LCS são de fato variedades invariantes.

### 2.5.1 Expoente de Lyapunov de Tempo Finito

O expoente de Lyapunov de Tempo Finito, ao qual neste trabalho vamos referir como FTLE e denotar por  $\sigma_t^{t+T}(\mathbf{x})$ , é um operador escalar utilizado para medir a taxa de separação ou aproximação entre órbitas vizinhas de  $\mathbf{x}$  durante um determinado tempo  $T$ , como mostra a Fig. 2.4.

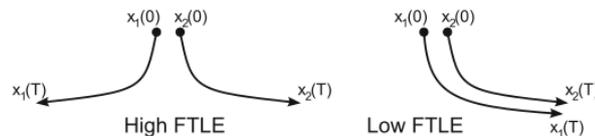


FIGURA 2.4 – Representação qualitativa das trajetórias para diferentes valores do FTLE (PÉREZ-PALAU *et al.*, 2015)

SHADDEN *et al.*, (2005), estabelecem a relação entre o campo de FTLE e Estruturas Coerentes Lagrangianas, as quais este trabalho referenciará como LCS. Tais estruturas apresentam comportamento semelhante ao de variedades e, de acordo com HALLER (2011), as *LCS hiperbólicas* são linhas ou superfícies materiais, ou separatrizes no espaço de fase (SHADDEN *et al.*, 2005), sendo *localmente* atrativas ou repulsivas em escoamentos não-estacionários. Considere um ponto  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  em um tempo  $t_0$ . Seja o fluxo  $\phi$  definido como,

$$\mathbf{x} \mapsto \phi_{t_0}^{t_0+T}(\mathbf{x}). \quad (2.2)$$

Agora considere a evolução de um ponto na vizinhança de  $\mathbf{x}$  definido como

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \delta\mathbf{x}(t_0), \quad (2.3)$$

onde  $\delta\mathbf{x}(t_0)$  é infinitesimal. Após um determinado intervalo de tempo  $T$ , tal perturbação se torna,

$$\hat{\mathbf{x}}(t_0 + T) = \phi_{t_0}^{t_0+T}(\mathbf{x}_0 + \delta\mathbf{x}(t_0)). \quad (2.4)$$

Realizando uma expansão em série de Taylor sobre o fluxo em torno do ponto  $\mathbf{x}_0$ , obtém-se

$$\hat{\mathbf{x}}(t_0 + T) = \phi_{t_0}^{t_0+T}(\mathbf{x}_0) + D\phi_{t_0}^{t_0+T}(\mathbf{x})\delta\mathbf{x}(t_0) + O(\|\delta\mathbf{x}(t_0)\|^2), \quad (2.5)$$

onde  $D\phi_{t_0}^{t_0+T}(\mathbf{x})$  é o gradiente de deformação. Supondo que as condições iniciais  $\mathbf{x}(t_0)$  sobre uma grade  $(i, j)$  estejam relativamente próximas inicialmente, pode-se calcular o gradiente de deformação por meio de diferenças finitas sobre um ponto central de tal forma que, para um espaço de dimensão 2, com  $\mathbf{x} = (x, y)$ ,

$$D\phi_{t_0}^{t_0+T}|_{x_i, j} = \begin{bmatrix} \frac{x_{i+1, j}(t_0+T) - x_{i-1, j}(t_0+T)}{x_{i+1, j}(t_0) - x_{i-1, j}(t_0)} & \frac{x_{i, j+1}(t_0+T) - x_{i, j-1}(t_0+T)}{y_{i, j+1}(t_0) - y_{i, j-1}(t_0)} \\ \frac{y_{i+1, j}(t_0+T) - y_{i-1, j}(t_0+T)}{x_{i+1, j}(t_0) - x_{i-1, j}(t_0)} & \frac{y_{i, j+1}(t_0+T) - y_{i, j-1}(t_0+T)}{y_{i, j+1}(t_0) - y_{i, j-1}(t_0)} \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

Após  $T$  unidades de tempo, o vetor perturbação é

$$\delta\mathbf{x}(t_0 + T) = \hat{\mathbf{x}}(t_0 + T) - \mathbf{x}(t_0 + T) \quad (2.7)$$

$$= \hat{\mathbf{x}}(t_0 + T) - \phi_{t_0}^{t_0+T}(\mathbf{x}_0) \quad (2.8)$$

$$= D\phi_{t_0}^{t_0+T}(\mathbf{x})\delta\mathbf{x}(t_0) + O(\|\delta\mathbf{x}(t_0)\|^2), \quad (2.9)$$

onde na última passagem foi utilizada a Eq. (2.5). Como  $\delta\mathbf{x}(t_0)$  é infinitesimal, pode-se descartar o termo  $O(\|\delta\mathbf{x}(t_0)\|^2)$  e usando a norma Euclidiana, a magnitude da perturbação é dada como:

$$\|\delta\mathbf{x}(t_0 + T)\| = \sqrt{\langle D\phi_{t_0}^{t_0+T}(\mathbf{x})\delta\mathbf{x}(t_0), D\phi_{t_0}^{t_0+T}(\mathbf{x})\delta\mathbf{x}(t_0) \rangle} \quad (2.10)$$

$$= \sqrt{\langle \delta\mathbf{x}(t_0), [D\phi_{t_0}^{t_0+T}(\mathbf{x})]^* D\phi_{t_0}^{t_0+T}(\mathbf{x})\delta\mathbf{x}(t_0) \rangle}, \quad (2.11)$$

onde  $D^*$  denota a transposta do gradiente de deformação. A matriz, em específico a parte direita da igualdade

$$\Delta = [D\phi_{t_0}^{t_0+T}(\mathbf{x})]^* D\phi_{t_0}^{t_0+T}(\mathbf{x}), \quad (2.12)$$

é uma versão do tensor de deformação de Cauchy-Green para um tempo finito. Quando  $\delta\mathbf{x}(t_0)$  está alinhado com o autovetor associado ao máximo autovalor da matriz  $\Delta$ ,  $\lambda_{max}(\Delta)$ , então reescreve-se a equação 2.11 como sendo

$$\max_{\delta\mathbf{x}(t_0)} \|\delta\mathbf{x}(t_0 + T)\| = \sqrt{\langle \delta\bar{\mathbf{x}}(t_0), \lambda_{max}(\Delta) \delta\bar{\mathbf{x}}(t_0) \rangle} = \sqrt{\lambda_{max}(\Delta)} \|\delta\bar{\mathbf{x}}(t_0)\|. \quad (2.13)$$

Se definirmos

$$\sigma_{t_0}^T(\mathbf{x}) = \frac{\ln \sqrt{\lambda_{max}(\Delta)}}{|T|}, \quad (2.14)$$

então, a Eq. (2.13) pode ser escrita como

$$\max_{\delta\mathbf{x}(t_0)} \|\delta\mathbf{x}(t_0 + T)\| = e^{\sigma_{t_0}^T(\mathbf{x})|T|} \|\delta\bar{\mathbf{x}}(t_0)\|, \quad (2.15)$$

onde  $\sigma_{t_0}^T(\mathbf{x})$  representa o expoente de Lyapunov no ponto  $\mathbf{x}$  para o intervalo de tempo finito de  $t_0 \rightarrow T$ .

Um outro modo de calcular o FTLE, segundo Padberg (2007) é utilizando de aproximações finitas de quantidades infinitesimais, onde calcula-se o quadrado da distância máxima de um ponto central em relação aos seus vizinhos dada a equação:

$$\delta_{t_0}^{t_0+T}(\mathbf{x}) := \frac{1}{T} \log \left( \max \frac{\|\phi_{t_0}^{t_0+T}(\mathbf{x}) - \phi_{t_0}^{t_0+T}(n_j(\mathbf{x}))\|}{\|\mathbf{x} - n_j(\mathbf{x})\|} \right), \quad (2.16)$$

onde  $\mathbf{x}$  denota o ponto central, e  $n_j$  denota seus vizinhos. A quantidade calculada por  $\delta_{t_0}^{t_0+T}$  é uma aproximação razoável de  $\sigma_{t_0}^{t_0+T}$ .

### 2.5.2 Função- $M$ e $\hat{M}$

A *Função- $M$*  foi proposta por Madrid & Mancho (2009) de modo a identificar “trajetórias distintas”, as quais em fluxos aperiódicos com dependência temporal seriam correspondentes aos pontos fixos hiperbólicos e não-hiperbólicos dos fluxos estacionários. Em fluxos estacionários, pontos hiperbólicos são responsáveis por dispersão de partículas, e pontos não-hiperbólicos por confinamento de partículas. A função proposta pode revelar regiões de fluxos hiperbólicos e não-hiperbólicos dependentes do tempo. Além disso,  $M$  é útil na detecção de variedades estáveis e instáveis de trajetórias hiperbólicas distintas (BRANICKI *et al.*, 2011). As variedades estáveis e instáveis destas trajetórias distintas correspondem, respectivamente, às LCS repulsoras e atratoras.

Considere um sistema com vetor de estados  $\mathbf{x} = x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , onde para todas as condições iniciais  $\mathbf{x}_0$  num domínio  $D$  em determinado tempo  $t_0$ , define-se a função

$M(\mathbf{x}_0, t_0) : (D, t) \rightarrow \mathbb{R}$  de tal forma que

$$M(x_0, t_0)_\tau = \int_{t_0-\tau}^{t_0+\tau} \left( \sum_{i=1}^n \left( \frac{dx_i}{dt} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} dt. \quad (2.17)$$

A *Função-M* é a medida do comprimento de arco da curva traçada pela trajetória de  $\mathbf{x}_0$ . Os mínimos locais de  $M$  representam trajetórias que evoluíram menos, estando relacionadas com trajetórias distintas hiperbólicas e não-hiperbólicas. As variedades dessas trajetórias também são visíveis no campo de  $M$ , desde que espera-se uma distinção entre os comprimentos de arco das trajetórias de partículas em regiões com comportamentos diferentes, separadas pelas variedades estáveis e instáveis (MENDOZA; MANCHO, 2010). Esta técnica tem sido aplicada com sucesso nas detecções de tais trajetórias e variedades no oceano (MENDOZA *et al.*, 2010) em fluxos da estratosférica (CÁMARA *et al.*, 2012), e em fluidos magnetizados (REMPEL *et al.*, 2013).

Uma outra forma de se detectar essas estruturas coerentes Lagrangianas é apresentada por Montes *et al.* (2021), partindo-se da Eq. (2.17). Porém, diferentemente da função apresentada por Mendoza & Mancho (2010), a qual calcula o comprimento de arco das trajetórias usando a norma Euclidiana, estes calculam o comprimento de arco das trajetórias usando uma  $\hat{p}$ -norma tal como

$$M(x_0, t_0)_\tau = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \sum_{i=1}^n \left| \frac{dx_i}{dt} \right|^{\hat{p}} dt, \quad (2.18)$$

sendo  $0 \leq \hat{p} \leq 1$  o expoente que define a norma e  $\tau$  o tempo de integração. Como a *Função-M* sempre cresce conforme o parâmetro  $\tau$  para qualquer valor usado no fator  $\hat{p}$ , considera-se os valores normalizados para o Descritor Lagrangiano, de modo que a *Função- $\hat{M}$*  é expressa na forma

$$\hat{M}(x_0, t_0; \tau) = \frac{M(x_0, t_0)_\tau}{\tau}. \quad (2.19)$$

A escolha de diferentes normas pode facilitar a visualização de fronteiras entre regiões distintas no espaço de fase.

## 3 Modelo Dinâmico

### 3.1 Problema Restrito de Três Corpos

O modelo dinâmico que foi estudado neste trabalho é conhecido como Problema Restrito de Três Corpos Circular Planar, que ao longo deste trabalho será referenciado apenas como PR3CCP, sendo este um caso particular do Problema Restrito de Três Corpos (PR3C) e, conseqüentemente, um caso particular do Problema de N-Corpos (SZEBEHELY, 1967). Para o PR3CCP, considera-se  $m_1 > m_2 \gg m_3$ , onde  $m_1$  e  $m_2$  são as massas dos corpos primários  $P_1$  e  $P_2$ , respectivamente, e  $m_3$  a massa do terceiro corpo  $P_3$ . Sendo assim, como hipótese do PR3C em todas suas versões, assume-se que as trajetórias de  $P_1$  e de  $P_2$  não são afetadas por  $P_3$ , sendo prescritas como soluções cônicas fechadas do problema de dois corpos  $P_1 - P_2$ . Na versão circular, essas cônicas, em um referencial inercial, são círculos no plano de referência  $x - y$  com foco no baricentro de  $P_1 - P_2$ . Em particular, na versão Planar, a dinâmica de  $P_3$  também fica restrita ao plano de referência. Além disso, modela-se os três corpos como uma massas pontuais (em aplicações de Astrodinâmica, o raio médio dos primários pode ser incluído no modelo adicionalmente, o que não é feito neste trabalho).

Neste modelo, define-se variáveis e parâmetros normalizados adimensionais. As distâncias são normalizadas pela distância média entre os primários e o tempo é definido de modo que um período de revolução dos primários seja  $2\pi$ . Em particular, as massas são normalizadas pela soma das massas dos primários, de modo que a massa do primário menor, fica sendo dada por

$$\mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2}, \quad (3.1)$$

e do primário maior por  $1 - \mu$ , sendo  $\mu$  o único parâmetro do modelo matemático.

Define-se ainda um sistema de coordenadas girante com origem no baricentro de  $P_1 - P_2$ . O eixo  $x$  é definido sobre a reta que une os primários, orientada no sentido de  $P_1$  a  $P_2$ . O eixo  $z$  é paralelo ao vetor momento angular dos primários, enquanto o eixo  $y$  completa o sistema de coordenadas ortonormal com orientação positiva (dextrogiro). Em relação

a este referencial girante, as posições  $(x, y)$  dos primários  $P_1 - P_2$  são fixas e são dadas, respectivamente, por  $(-\mu, 0)$  e  $(1 - \mu, 0)$ . A Figura 3.1 ilustra a configuração do problema restrito de três corpos em torno do baricentro.

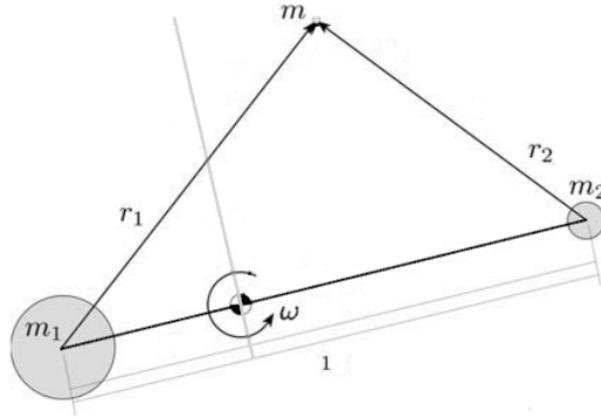


FIGURA 3.1 – Ilustração da configuração do problema restrito de três corpos em torno do baricentro, onde  $\omega$  representa o vetor velocidade angular, e  $r_1$  e  $r_2$  as distâncias relativas de  $P_3(m)$  aos primários  $P_1(m_1)$  e  $P_2(m_2)$

Em relação a esse referencial girante, as equações de movimento de  $P_3$  (SZEBEHELY, 1967) são

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= 2\dot{y} + \Omega_x, \\ \ddot{y} &= -2\dot{x} + \Omega_y,\end{aligned}\tag{3.2}$$

onde  $\Omega(x, y)$  corresponde à função potencial, sendo expressa por e as distâncias de  $P_3$  a  $P_1$  e a  $P_2$  são dadas por

$$\Omega(x, y) = \frac{(x^2 + y^2)}{2} + \frac{1 - \mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} + \frac{\mu(1 - \mu)}{2}\tag{3.3}$$

$$r_1 = \sqrt{(x + \mu)^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x - 1 + \mu)^2 + y^2}$$

O sistema dinâmico possui uma integral de movimento conhecida como integral de Jacobi, ou constante de Jacobi, a saber,

$$J(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = 2\Omega(x, y) - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = C.\tag{3.4}$$

A integral de Jacobi (3.4) consiste em uma integral exata das equações de movimento relativo ao  $P_3$ . Em particular, a precisão de uma simulação numérica das equações de movimento pode ser avaliada através da verificação de que a constante  $C$  mantém-se invariante dentro de uma tolerância requerida.

Dado um valor de  $C$ , a Eq. (3.4) define a existência de regiões do espaço de fases acessíveis às trajetórias, uma vez que

$$v^2 = 2\Omega - C, \quad (3.5)$$

ou seja, o lado direito desta equação deve ser uma quantidade positiva definida ou nula. Sendo assim as regiões acessíveis são definidas pela restrição  $2\Omega \geq C$ , e tem como fronteiras as *Curvas de Velocidade Zero (CVZ)*. Sendo assim, para cada valor de  $C$ , temos as regiões em torno de  $P_1$  e de  $P_2$ , nas quais  $P_3$  pode se movimentar dadas as suas condições iniciais, como ilustrado pela Figura 3.2. Note que à medida que o valor de  $C$  decresce (e energia cresce), canais de transporte entre as regiões surgem e as CVZ são reduzidas até que desaparecem totalmente e todo espaço de fases passa a ser acessível às trajetórias.

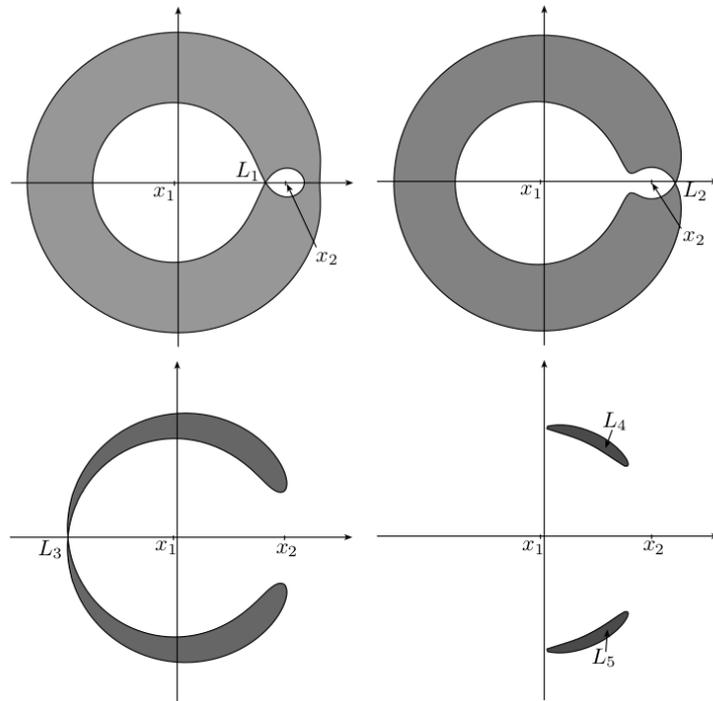


FIGURA 3.2 – Quatro possíveis configurações das curvas de velocidade zero e regiões acessíveis para o PR3CCP, encontradas à medida que o valor de  $C$  decresce. Os primários estão localizados, respectivamente, em  $x_1$  e  $x_2$ , sendo  $L_i, i = 1, \dots, 5$ , os *pontos Lagrangianos* (SCHAUB; JUNKINS, 2003). As regiões em cinza são as regiões inacessíveis para um determinado valor de  $C$

O PR3CC possui cinco pontos de equilíbrio,  $L_i$ , com  $i = 1, \dots, 5$ , também conhecidos como *Pontos Lagrangianos*. São obtidos impondo-se a condição de estacionariedade às equações de movimento (3.2). Estes pontos também podem ser compreendidos como o lugar geométrico onde a soma de todas as forças que agem em  $P_3$  anulam-se, em outras palavras, os pontos para os quais o gradiente do potencial dado pela equação (3.3) é nulo,

i.e.,

$$\begin{aligned}\Omega_x &= x - \frac{(1-\mu)(x+\mu)}{r_1^3} - \frac{\mu(x-1+\mu)}{r_2^3} = 0, \\ \Omega_y &= y - \frac{(1-\mu)y}{r_1^3} - \frac{\mu y}{r_2^3} = 0.\end{aligned}\tag{3.6}$$

Quando consideramos  $y=0$ , todos os corpos do sistema estão alinhados sobre o eixo  $x$  do referencial girante. Neste caso, há três pontos de equilíbrio colineares,  $L_1$ ,  $L_2$  e  $L_3$ . Por outro lado, quando consideramos  $y \neq 0$ , obtemos que  $r_1 = r_2 = 1$ , resultando em outros dois pontos de equilíbrio,  $L_4$  e  $L_5$ , sendo estes chamados pontos triangulares (SZEBEHELY, 1967). Estes pontos estão representados na Figs. 3.2 e 3.3.

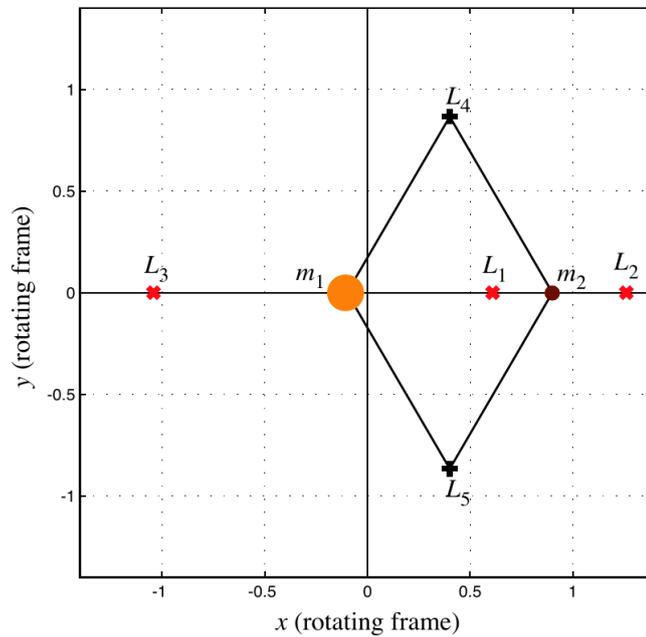


FIGURA 3.3 – Localização dos pontos lagrangianos (KOON *et al.*, 2011)

Para estudar a estabilidade na vizinhança desses pontos de equilíbrio, utiliza-se o *Método Indireto de Lyapunov*, também conhecido como *Método de Linearização*, que consiste em fazer uma aproximação por truncamento em série de Taylor, sendo que a estabilidade é estudada por meio dos auto-valores deste modelo linearizado. Dessa forma, pode-se concluir que os pontos colineares são instáveis para  $0 < \mu \leq 0.5$ , e os pontos triangulares são estáveis para  $0 < \mu < 0.0385$  e instáveis para  $0.0385 < \mu \leq 0.5$  (SZEBEHELY, 1967). Através da inspeção dos autovalores, aos pontos de equilíbrio colineares, são classificados como *sela*  $\times$  *centro*  $\times$  *centro*.

Neste contexto, o Teorema de Conley-Moser tem um papel central, uma vez que este garante que nas vizinhanças dos pontos lagrangianos colineares do PR3CCP, todos os

tipos de comportamentos dinâmicos do sistema dinâmico não linear tem um análogo no modelo linearizado (CONLEY, 1968; CONLEY, 1969; TERRA *et al.*, 2009; KOON *et al.*, 2011). Sendo assim, para melhor entender a dinâmica das órbitas nas vizinhanças de  $L_1$ ,  $L_2$  e  $L_3$ , podemos analisar a estrutura das soluções do análogo linear, como ilustrado na Fig. 3.4. Considere a solução geral do modelo linear

$$\mathbf{z}(t) = (x(t), y(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t)) = \alpha_1 e^{\lambda t} u_1 + \alpha_2 e^{-\lambda t} u_2 + 2\text{Re}(\beta e^{i\nu t} \omega_1), \quad (3.7)$$

onde os coeficientes  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  são reais e  $\beta = \beta_1 + i\beta_2$ , com  $\beta_2 \neq 0$ . Os termos  $\pm\lambda$ ,  $\pm i\nu$  correspondem aos autovalores, e  $u_1, u_2, \omega_1, \omega_2$  aos autovetores. Esta solução é bem descrita em (KOON *et al.*, 2011, p.42-56). (É importante ressaltar que para o presente trabalho não foi calculada esta solução, porém, ela é útil para que possamos entender melhor como funciona a dinâmica presente nas regiões em torno dos pontos de equilíbrio.) Por meio da solução na Eq. (3.7), para um valor fixo de  $C$ , têm-se as seguintes propriedades que auxiliam na compreensão da Fig. 3.4:

- Se  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ , têm-se uma órbita periódica, também conhecida como órbita de Lyapunov.
- Se  $\alpha_1 \alpha_2 = 0$ , têm-se órbitas assintóticas em relação à órbita de Lyapunov. Sendo que se  $\alpha_1 = 0$  esta órbita assintótica se projeta ao longo da faixa  $S_1$  no plano x-y. O mesmo vale para  $\alpha_2 = 0$  ao longo da faixa  $S_2$ .
- Se  $\alpha_1 = \alpha_2 < 0$  são órbitas não-trânsito porque elas cruzam a região de equilíbrio.
- Se  $\alpha_1 = \alpha_2 > 0$  são órbitas não-trânsito.

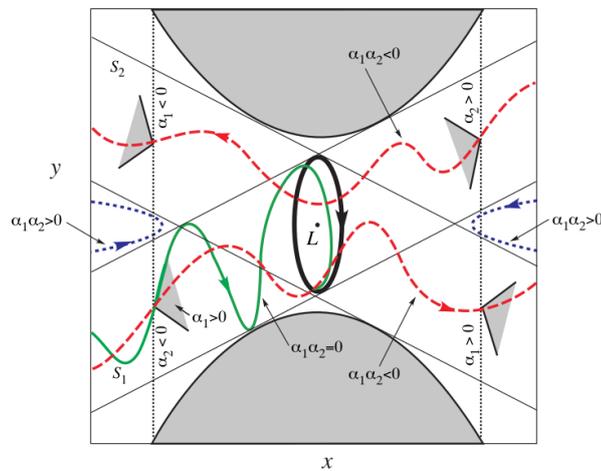


FIGURA 3.4 – Representação do fluxo em torno de uma região de equilíbrio. São apresentadas órbitas periódicas (preto), órbitas que apresentam comportamento assintótico (verde) em direção à órbita periódica, órbitas não-trânsito (azul) e órbitas trânsito (vermelho) (KOON *et al.*, 2011)

O ponto central aqui é a compreensão de que o conjunto de todas as órbitas assintóticas constitui as variedades invariantes estável e instável de cada de órbita de Lyapunov, que são homeomórficas a tubos bidimensionais e que atuam como separatrizes de dois tipos de movimentos, conhecidos como órbitas trânsito e não-trânsito. Órbitas trânsito passam de um domínio para outro e são aquelas que estão dentro desses cilindros de variedades ou *tubos* de variedades. As órbitas não-trânsito, as quais voltam para o domínio de origem, são as que estão fora desses tubos. Isso se torna mais claro ao analisar a Fig. 3.4, onde é perceptível o comportamento do tipo sela (CONLEY, 1968; KOON *et al.*, 2011). Esses canais de transportes são essenciais em projetos de órbitas de transferências de baixo custo entre Terra e Lua (SOUSA-SILVA *et al.*, 2018), por exemplo.

Outro aspecto que é importante comentar é que as Eqs. de movimento (3.2) satisfaz a seguinte *Simetria com Reversão Temporal*

$$\mathbf{S} : (x, y, \dot{x}, \dot{y}, t) \rightarrow (x, -y, -\dot{x}, \dot{y}, -t), \quad (3.8)$$

Isso implica que se conhecermos uma variedade instável de um ponto de equilíbrio das órbitas de Lyapunov, as quais são órbitas periódicas simétricas, a variedade estável correspondente é obtida por meio desta simetria. A compreensão deste conceito é importante, pois a intersecção dessas variedades estáveis e instáveis nos informa sobre as conexões heteroclínicas que conectam assintoticamente as órbitas de Lyapunov em torno das regiões dos pontos de equilíbrio. Dessa forma, surgem *canais de transporte naturais* por meio das *cadeias* de conexões homoclínicas-heteroclínicas, como representado na Fig. 3.5 (CONLEY, 1968; KOON *et al.*, 2000; KOON *et al.*, 2011).

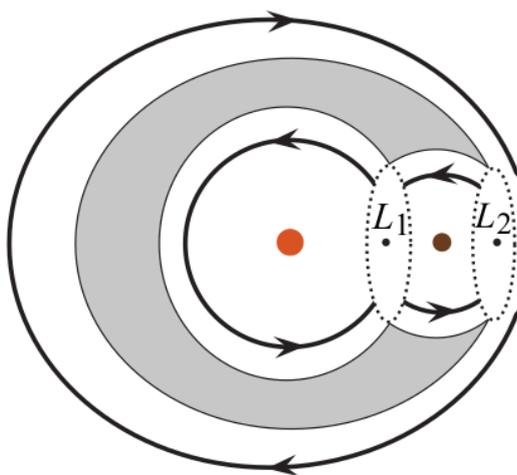


FIGURA 3.5 – Representação das conexões homoclínicas-heteroclínicas (KOON *et al.*, 2011).

## 3.2 Regularização de Lemaître

As equações de movimento (3.2) do PR3CCP apresentam singularidades quando  $r_1, r_2 \rightarrow 0$ , são situações em que  $P_3$  colide com os primários  $P_1$  e  $P_2$ . É possível remover esses pontos singulares por meio de transformações de coordenadas. O método de Lemaître é uma regularização local, i.e., introduz transformações que regularizam as equações de movimento em apenas uma das duas singularidades, sendo este bem descrito em (SZEBEHELY, 1967). Sejam  $q = (x - \mu + \frac{1}{2}) + iy$ , coordenadas de  $P_3$  no referencial girante com origem no ponto médio entre  $P_1$  e  $P_2$ , onde  $\omega = \mu + iv$  é a posição de  $P_3$  para o novo sistema de coordenadas regularizadas. Define-se a transformação de Lemaître por:

$$q = f(\omega) = \frac{1}{4}\left(\omega^2 + \frac{1}{\omega^2}\right), \quad (3.9)$$

e a transformação temporal

$$|f'(\omega)|^2 = \frac{|\omega^4 - 1|^2}{4|\omega|^6} = \frac{dt}{d\tau}, \quad (3.10)$$

onde  $\tau$  corresponde à nova variável temporal  $f' = \frac{df}{d\omega}$ . Aplicada a transformação, temos que as distâncias de  $m_1$  e  $m_2$  a  $P_3$  são expressas por:

$$\begin{aligned} r_1 &= \left|q - \frac{1}{2}\right| = \frac{|\omega^2 - 1|^2}{4|\omega|^2} \\ r_2 &= \left|q + \frac{1}{2}\right| = \frac{|\omega^2 + 1|^2}{4|\omega|^2}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

de forma que  $f'(\omega)$  passa a ser escrito como

$$|f'(\omega)|^2 = \frac{4r_1r_2}{|\omega|^2}. \quad (3.12)$$

Se  $\omega = \pm 1$ , então  $q = \frac{1}{2}$ , enquanto que se  $\omega = \pm i$ , então  $q = -\frac{1}{2}$ . Isto é, no plano transformado por  $\omega$ , as partículas estão localizadas nos pontos  $\omega = \pm 1$  e  $\omega = \pm i$ . A origem do plano  $q$  é transformada em  $\omega = (-1)^{\frac{1}{4}}$ , por meio da Eq. (3.9), resolvendo-se para  $\omega$  e com  $q = 0$ . A origem do plano regularizado,  $\omega = 0$ , corresponde aos pontos no infinito do plano  $q$ . Considerando, segundo Szebehely (1967), que  $\Omega^*(u, v) = U|f'(\omega)|$  é regular em toda a parte, exceto em  $\omega = 0$ , e introduzindo  $\bar{u} = \frac{du}{d\tau}$  e  $\bar{v} = \frac{dv}{d\tau}$ , pode-se reescrever as equações de movimento como um sistema de equações diferenciais de primeira ordem da forma:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{u}}{d\tau} - 2\bar{v}|f'(\omega)|^2 &= \frac{\partial\Omega^*}{\partial u} \\ \frac{d\bar{v}}{d\tau} + 2\bar{u}|f'(\omega)|^2 &= \frac{\partial\Omega^*}{\partial v}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

## 4 Resultados e Discussões

Neste capítulo são apresentados os resultados obtidos através de simulações numéricas, utilizando códigos escritos em *FORTRAN 90* para resolver as equações diferenciais 3.2 pelo método *Runge-Kutta-Fehlberg* de 7(8) ordem de passo de tempo variado, sendo sugerido  $10^{-3}$  como passo de tempo inicial e  $2 \times 10^{-3}$  como passo de tempo máximo, e precisão numérica do integrador de  $10^{-15}$ . Para o PR3CCP também foi utilizada uma subrotina em *FORTRAN 77* para a regularização de Lemaître, descrita na seção 3.2, para remover singularidades que surgem quando  $r_1$  e  $r_2 \rightarrow 0$ , i.e. situações onde  $P_3$  colide com os primários  $P_1$  e  $P_2$ , ou quando aproxima-se muito dos primários. Monitorou-se a *Constante de Jacobi* com tolerância de  $10^{-10}$ , e considerou-se os raio médio dos primários como sendo  $10^{-7}$ .

### 4.1 Pêndulo

Inicialmente, as ferramentas numéricas a serem utilizadas no restante do trabalho serão testadas em dois modelos relativamente simples de osciladores não-lineares, a saber, o *pêndulo simples* e o *pêndulo perturbado*, descritos, respectivamente, pelas equações

$$\ddot{x} = -\text{sen}(x) \tag{4.1}$$

e

$$\ddot{x} = (2.5 \cos(5t) - 1) \text{sen}(x). \tag{4.2}$$

Primeiramente, testamos o cálculo de FTLE para o pêndulo simples. Partindo de um conjunto de condições iniciais em uma grade de  $1024 \times 1024$  pontos, calculamos o FTLE integrando o sistema progressivamente até 30 unidades de tempo. O resultado é exibido na Fig. 4.1(a). Nota-se que as duas principais linhas de máximos locais coincidem com as conhecidas variedades do ponto de sela localizado em  $(x, \dot{x}) = (\pm\pi, 0)$ . No entanto, uma série de outras linhas com altos valores de FTLE são observadas no entorno das variedades. Resultado semelhante foi encontrado por Pérez-Palau (2015, p.243), conforme mostrado na Fig. 4.1(b). Conforme comentado por Pérez-Palau (2015), as linhas ao redor

das variedades são causadas pelo efeito das condições de contorno periódicas do espaço de fase do pêndulo, sendo que sempre que as soluções atravessam a fronteira  $x = \pi$ , elas são reinjetadas em  $x = -\pi$ . Assim, pode ocorrer que ao final de 30 unidades de tempo, uma das trajetórias vizinhas da órbita de referência no cálculo de FTLE ficou do lado  $x < \pi$  e outra do lado  $x > \pi$ , sendo essa última deslocada para o outro lado do espaço, gerando artificialmente um grande afastamento entre elas e, conseqüentemente, um grande valor de FTLE. Este é um exemplo de como o campo FTLE pode revelar linhas que não são variedades de pontos de sela, sendo que muitos autores têm proposto formas de se “limpar” o campo FTLE de tais linhas.

Um dos métodos é o *Jet Transport*, proposto por Pérez-Palau (2015), sendo esta uma ferramenta que analisa a propagação sobre uma vizinhança  $U$  de uma condição inicial  $\mathbf{x}_0$ , i.e.,  $\phi(t_0, U; T)$ , por meio de truncamentos polinomiais de ordem  $N$ . Alternativamente ao método descrito anteriormente, o qual busca calcular a taxa de expansão e contração sobre a vizinhança de um determinado ponto, resultados encontrados a partir do campo de comprimentos de arco de trajetórias têm se mostrado interessantes como mais um método para detectar essas estruturas hiperbólicas de modo que as imagens obtidas fiquem “limpas”.

A Figura 4.2 apresenta os resultados obtidos pelo cálculo de comprimento de arco das trajetórias, através da (a) Função- $M$ , e da (b) Função- $\hat{M}$  com fator  $\hat{p} = 0,4$ . Tanto a Fig. 4.2 (a) como (b) apresentam resultados interessantes, atuando como alternativas quando comparadas com a Fig. 4.1, pois não apresentam as estruturas de aparentes falsas variedades que o FTLE apresenta para este caso. O resultado obtido pelo método do *Jet Transport*, Fig. 4.2(d), também consegue eliminar esses “falsos indicativos”, porém exibe uma descontinuidade nos valores das variedades à medida que ocorre uma mudança no número de revoluções do pêndulo como, mostra Pérez-Palau (2015). Ressalta-se que é possível extrair as variedades, estáveis e instáveis, por meio do gradiente do campo escalar, i.e.,

$$\nabla f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{j},$$

já que essas variedades são relacionadas com pontos nos quais o campo escalar dos Descritores Lagrangianos é não-diferenciável (GARCÍA-GARRIDO, 2020), evidenciando as variedades como mostra a Fig. 4.2 (c) para o gradiente da Função- $M$ . O campo gradiente da Função- $M$  foi computado com a função *gradient* do Matlab, sendo aplicado um limiar sobre o campo resultante para extrair somente as linhas de máximos locais.

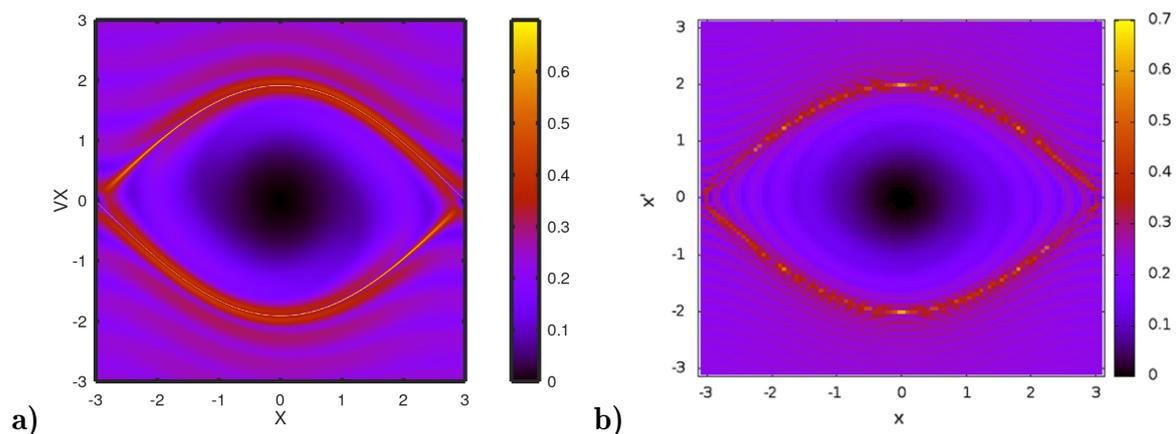


FIGURA 4.1 – Campo de Expoentes de Lyapunov de Tempo Finito para o pêndulo simples (Eq. 4.1), com integração direta por 30 unidades de tempo. **a)** Imagem produzida pelo autor; **b)** Imagem retirada de (PÉREZ-PALAU *et al.*, 2015, p.243).

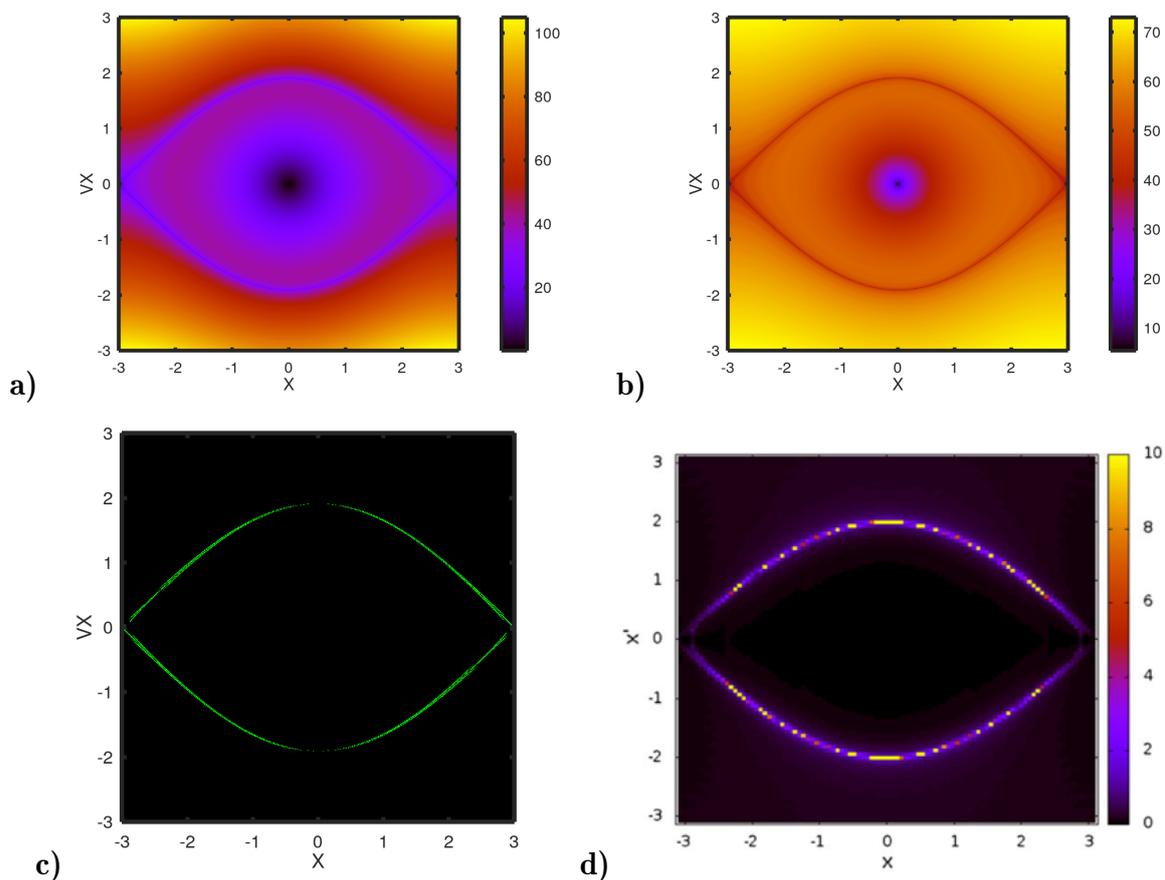


FIGURA 4.2 – Campos escalares para o pêndulo simples com integração direta por 30 unidades de tempo. **a)** Função- $M$ ; **b)** Função- $\hat{M}$  com  $\hat{p} = 0.4$ , **c)** contornos extraídos do campo gradiente da Função- $M$ ; **d)** *Jet Transport* (PÉREZ-PALAU *et al.*, 2015, p.252)

Da mesma forma que no pêndulo simples, podemos utilizar essas ferramentas para detectar as LCS no pêndulo perturbado. Contudo, como as estruturas hiperbólicas se modificam no decorrer do tempo neste caso, a análise se torna mais complexa para diferenciar

as estruturas ditas como “falsos indicativos” das verdadeiras estruturas hiperbólicas. A Fig. 4.3 (a) serve como validação dos nossos resultados obtidos pelo FTLE ao compará-los com o apresentado por Pérez-Palau (2015) na Fig. 4.3 (b). É perceptível que tanto o campo FTLE da Fig. 4.3 como os campos de comprimento de arco da Fig. 4.4 apresentam estruturas muito semelhantes. A princípio, a maior diferença entre esses métodos é o tempo computacional necessário para detectar esses campos, sendo o comprimento de arco uma ferramenta muito mais rápida e fácil de ser implementada do que o FTLE.

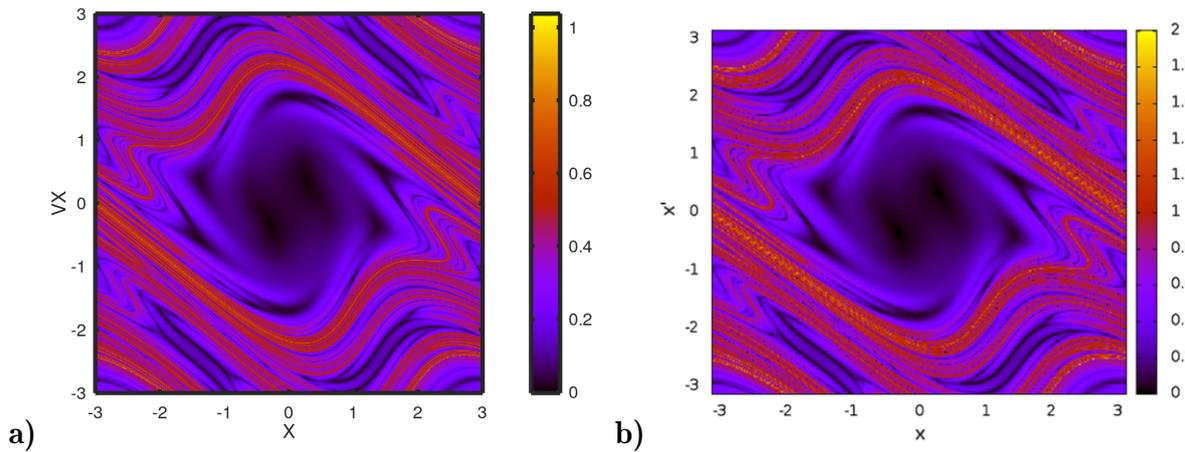


FIGURA 4.3 – Campo de Expoentes de Lyapunov de Tempo Finito para o pêndulo perturbado (Eq. 4.2), com integração progressiva até 10 unidades de tempo. **a)** Imagem produzida pelo autor; **b)** Imagem retirada de (PÉREZ-PALAU *et al.*, 2015, p.243)

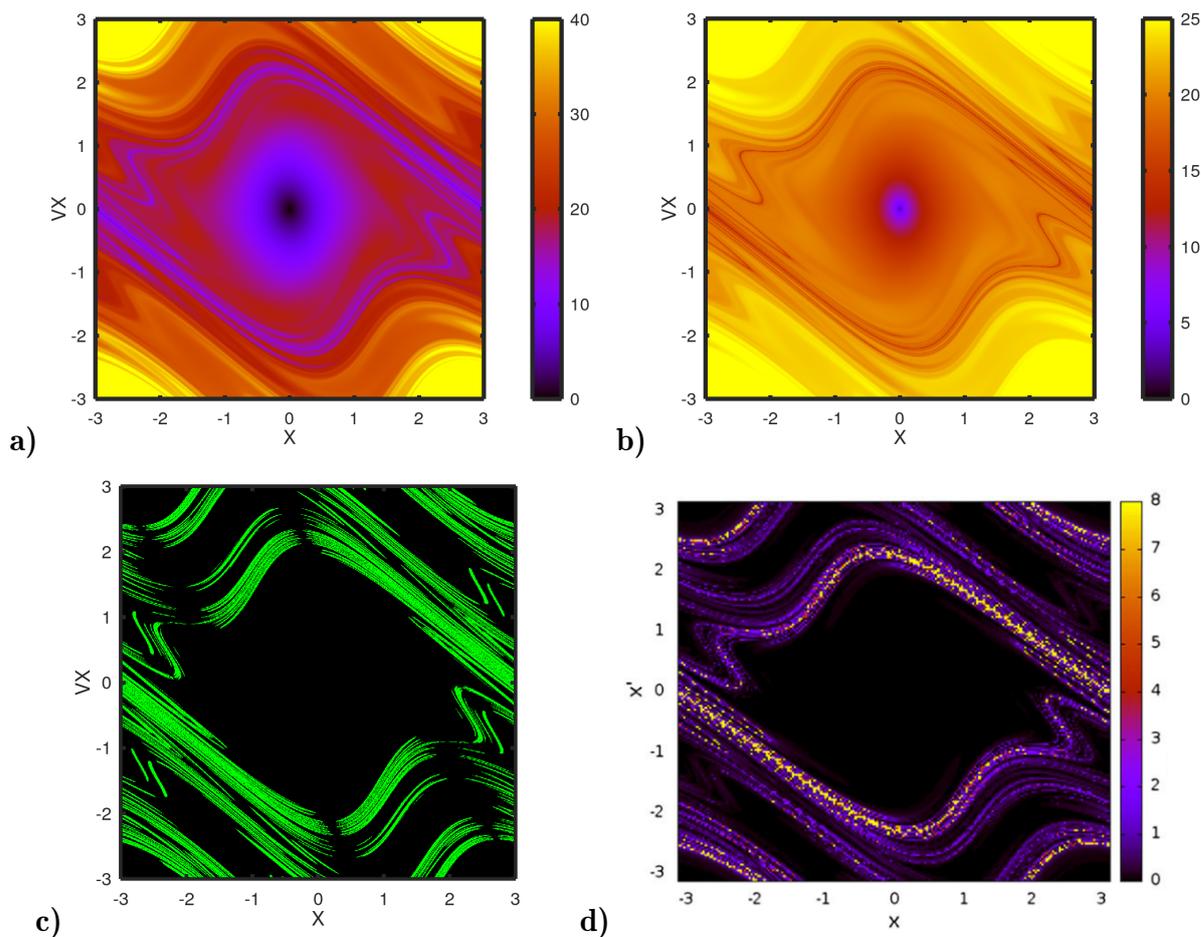


FIGURA 4.4 – Campos escalares para o pêndulo perturbado com integração avançada até 10 unidades de tempo. **a)** Função- $M$ ; **b)** Função- $\hat{M}$  com  $\hat{p} = 0.4$ , **c)** contornos extraídos do campo gradiente da Função- $M$ ; **d)** *Jet Transport* (PÉREZ-PALAU *et al.*, 2015, p.252)

## 4.2 Problema Restrito de 3 Corpos

### 4.2.1 Expoente de Lyapunov de Tempo-Finito

Após testadas as ferramentas na seção 4.1 para os modelos do pêndulo, buscou-se testar o cálculo de FTLE para o Problema Restrito de Três Corpos Circular Planar (PR3CCP) de acordo as equações de movimento (3.2), descritas na seção 3.1. Foram feitos testes no PR3CCP para duas configurações, descritas a seguir e intituladas, respectivamente, de *Configuração de Análise de Gawlik* e *Configuração de Análise de Assis*.

#### 4.2.1.1 Configuração de Análise de Gawlik

Seguindo o exemplo descrito por Gawlik *et al.* (2009), adotou-se o parâmetro de massa  $\mu = 0.1$  e a energia do sistema dada por  $E_g = E(L_1) + 0.03715$ , com condições

iniciais no plano  $(x, \dot{x})$ , para  $y = 0$  e  $\dot{y}$  definido pelo valor da Energia  $E_g$ . Note-se que não foi informado o sentido de cruzamento das trajetórias através deste plano, ou seja, o sinal de  $\dot{y}$ , que deve fazer parte da definição completa do plano de Poincaré adotada no artigo. Para reproduzir os resultados do artigo, foi necessário, em um primeiro momento, encontrar a constante de Jacobi, a qual é utilizada para restringir o movimento do corpo de menor massa no plano. Logo, calculamos os pontos de equilíbrio colineares ( $L_1, L_2$  e  $L_3$ ) e, com isso, obtivemos a energia que pode ser relacionada com a constante de Jacobi na forma

$$C = -2E.$$

Construiu-se o mapa de Poincaré como mostrado na Fig. 4.5 para verificar qual seria o sinal de  $\dot{y}$ . Na Fig. 4.5 (a,b) foi usado o mapa com  $\dot{y} > 0$  e na Fig. 4.5 (c,d) com  $\dot{y} < 0$ . Notou-se que os resultados são coerentes com os do artigo de Gawlik *et al.* (2009) quando  $\dot{y} < 0$ . Em seguida, após estabelecida a seção de Poincaré para as condições iniciais por  $(x, \dot{x})$ , para  $y = 0$  e  $\dot{y} < 0$ , a partir de uma grade de  $1024 \times 1024$  pontos, calculamos o campo de FTLE com integração progressiva até 2 e até 5 unidades de tempo. Para esse cálculo, é necessário definir a distância  $\delta$  entre cada órbita de referência sobre a grade de condições iniciais e seus vizinhos locais, que serão usados para o cálculo do gradiente de deformação segundo a Eq. (2.6). A Fig. 4.6 mostra os resultados obtidos para o FTLE calculado utilizando  $\delta_{(x, \dot{x})} = \frac{l_{(x, \dot{x})}}{n_{(x, \dot{x})}}$ , onde  $l_{(x, \dot{x})}$  representa o tamanho dos eixos plotados na figura e  $n_{(x, \dot{x})}$  a quantidade de pontos da grade de condições iniciais. Assim,  $\delta_{(x, \dot{x})} = 10^{-3}$  foi adotado inicialmente.

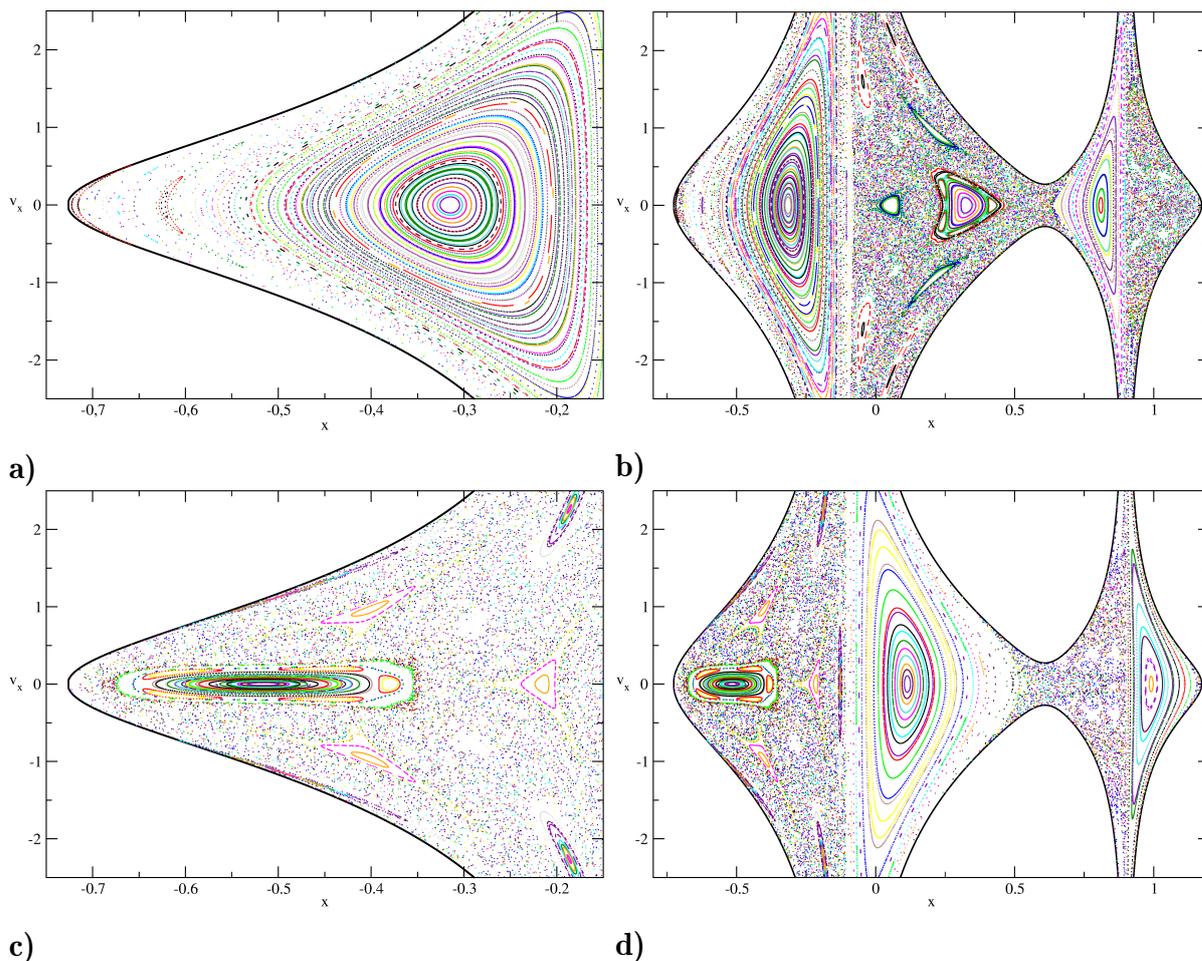


FIGURA 4.5 – Mapa de Poincaré utilizando os parâmetros do Gawlik com as seções (a,b)  $(x, \dot{x})$ , para  $y = 0$  e  $\dot{y} > 0$ ; e (c,d)  $(x, \dot{x})$ , para  $y = 0$  e  $\dot{y} < 0$ , respectivamente

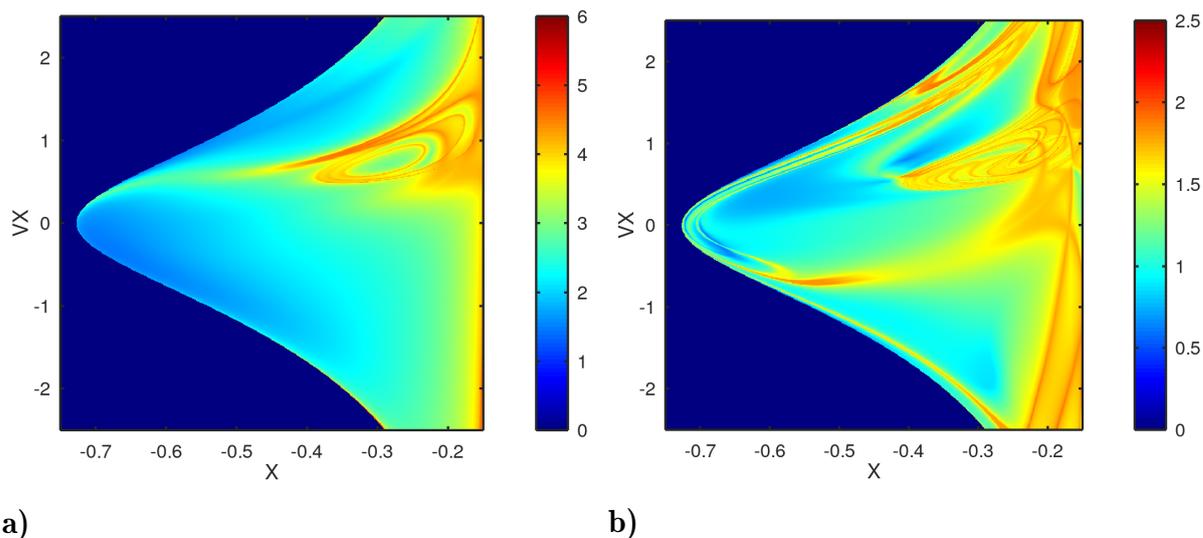


FIGURA 4.6 – FTLE encontrado com parâmetro de massa  $\mu = 0.1$  e Constante de Jacobi  $\approx 3.6126$ , a partir de condições iniciais na seção de Poincaré  $(x, \dot{x})$ , para  $y = 0$  e  $\dot{y} < 0$ , com perturbação de  $10^{-3}$  sobre as trajetórias vizinhas com a)  $T = 2$  e b)  $T = 5$

Conforme notado por Shadden *et al.* (2005), ao se utilizar um espaçamento muito

grande para as condições iniciais das trajetórias vizinhas, pode-se comprometer a precisão do cálculo do gradiente de deformação, além de correr-se o risco de que eventualmente tais pontos possam se encontrar em lados opostos das LCS e, conseqüentemente, ao evoluir as trajetórias, essas divergem muito mais rapidamente, gerando mais linhas de máximos locais do FTLE. Isso pode ser evitado com uma diminuição no valor de  $\delta$ . Então, calculou-se novamente o campo FTLE utilizando como perturbação  $\delta_{(x,y)} \approx 10^{-5}$ , obtendo-se os resultados apresentados na Fig. 4.7, os quais podem ser comparados com os resultados apresentados por Gawlik *et al.* (2009), mostrados na Fig. 4.8. Isso valida os resultados obtidos com nosso código, já que ambos apresentam as mesmas estruturas.

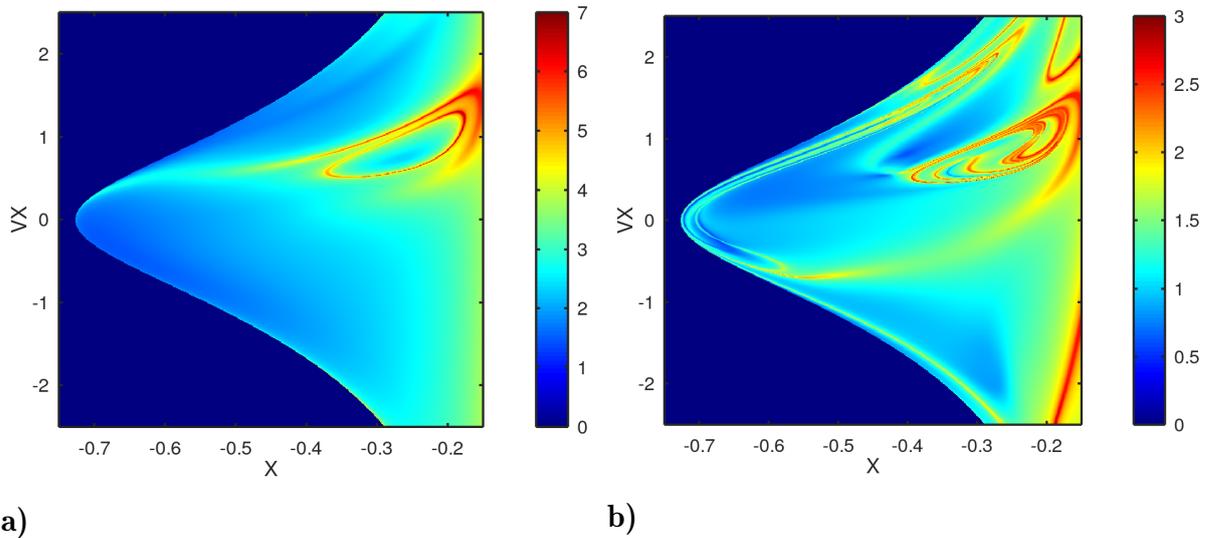


FIGURA 4.7 – FTLE encontrado com parâmetro de massa  $\mu = 0.1$  e Constante de Jacobi  $\approx 3.6126$ , a partir de condições iniciais na seção de Poincaré  $(x, \dot{x})$ , para  $y = 0$  e  $\dot{y} < 0$ , com perturbação de  $10^{-5}$  e os respectivos a)  $T = 2$  e b)  $T = 5$ .

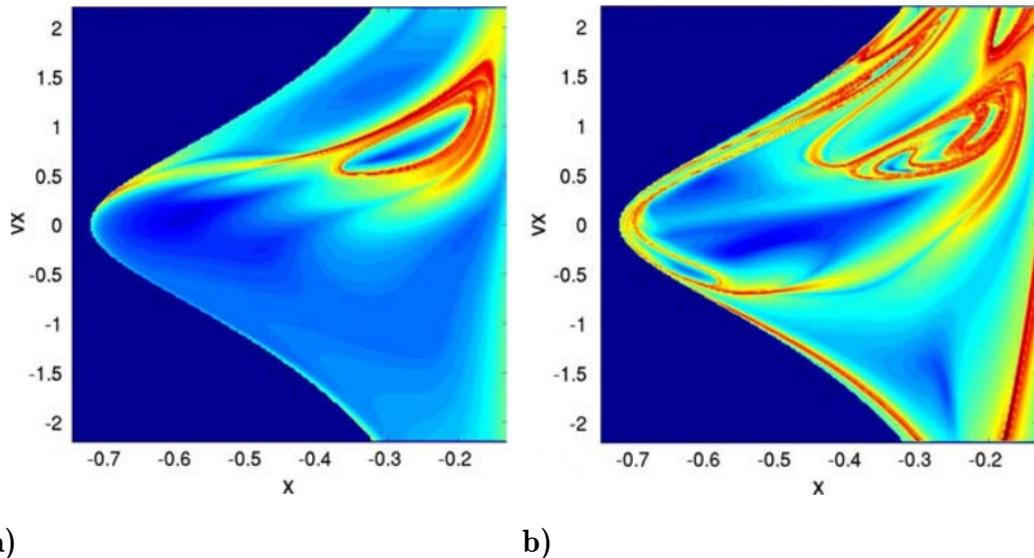


FIGURA 4.8 – FTLE obtido para o PR3CP no plano  $y = 0$  com  $\mu = 0.1$  e energia fixa como  $E = E(L_1) + 0.0371$  com os respectivos tempos integração sendo a)  $T = 2$  e b)  $T = 5$ . Fonte: Gawlik et al. (2009).

A diferença entre os gráficos de campos de FTLE obtidos com valores distintos de  $\delta$  está relacionada com a sensibilidade das condições iniciais no problema, o que é evidenciado pelo FTLE, já que o método monitora o afastamento e a aproximação de trajetórias vizinhas. A Fig. 4.9 (a) mostra a evolução da trajetória de um ponto central  $\mathbf{x}_0$  da grade (linha preta) e de seus quatro vizinhos (linhas coloridas) iniciados a uma distância  $\delta_{(x,\dot{x})} \approx 10^{-3}$  do ponto de referência. Percebe-se a rápida dispersão das trajetórias devido à sensibilidade às condições iniciais. A Fig. 4.9 (b) mostra a mesma coisa, mas com distâncias iniciais  $\delta_{(x,\dot{x})} \approx 10^{-5}$ , quando nota-se que as órbitas permanecem juntas por muito mais tempo.

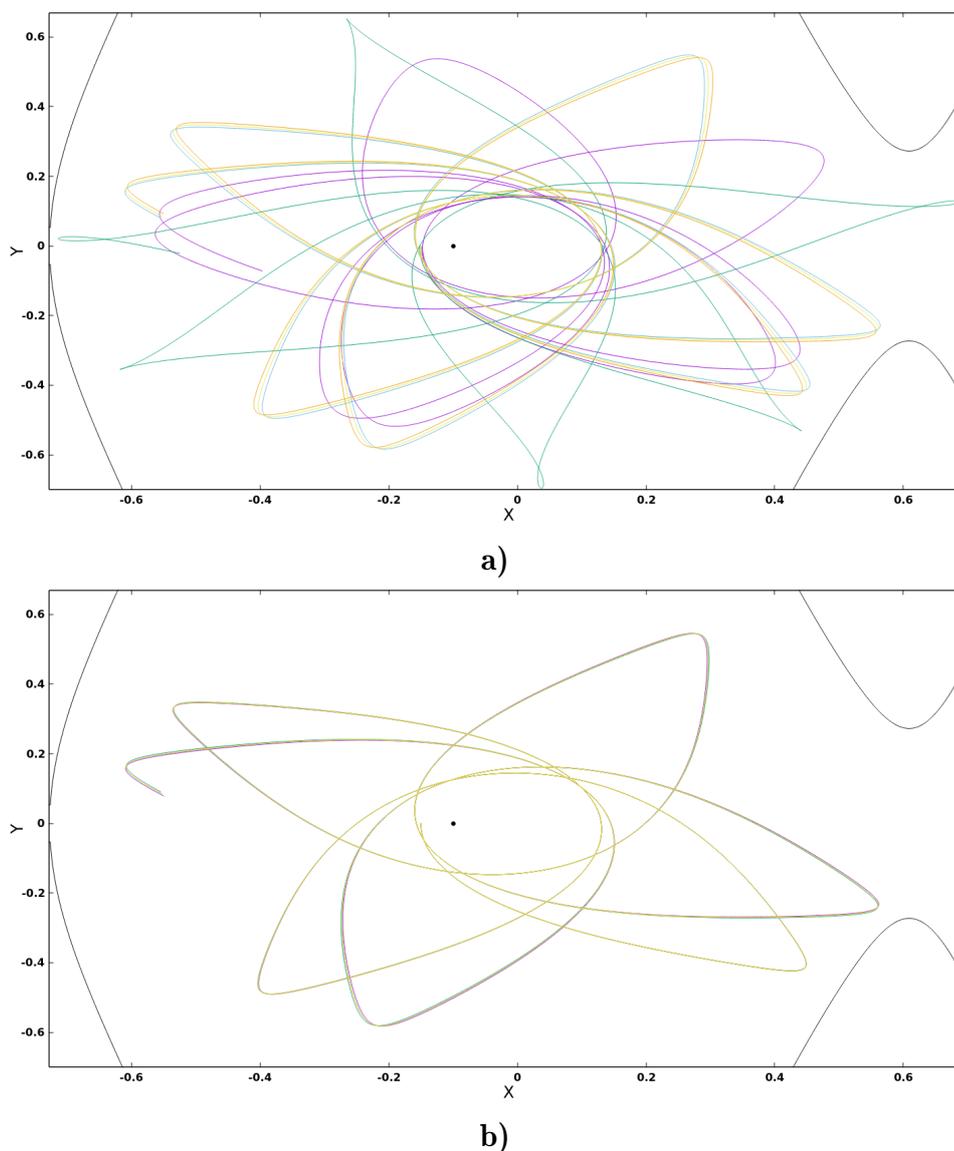


FIGURA 4.9 – Comparação entre as trajetórias para o PR3CP evoluindo com distanciamento inicial de a)  $10^{-3}$  e b)  $10^{-5}$  em relação à trajetória de referência.

Essas estruturas detectadas pelo campo FTLE correspondem a cortes da variedade estável associada à órbita de Lyapunov em torno do ponto colinear  $L_1$  desta camada de

energia, sendo bem definidas em Koon *et al.* (2000) As Figuras 4.10 e 4.11 apresentam três intersecções das variedades estável (*verde*) e instável (*vermelho*) com o plano de Poincaré considerado. Vale lembrar que uma vez obtida a variedade instável (estável) de  $L_1$ , pode-se usar a simetria de reversão temporal descrita na Eq. (3.8) para obter a variedade estável (instável) correspondente.

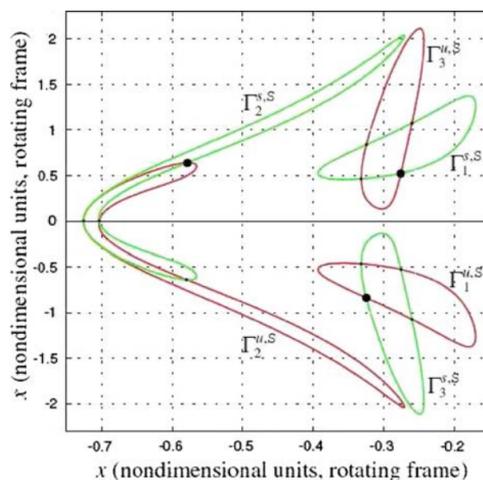


FIGURA 4.10 – Intersecção dos cortes das variedades estável (*verde*) e instável (*vermelho*) da órbita de Lyapunov da região de equilíbrio em torno de  $L_1$  do PR3CCP no plano  $y = 0$ , com  $\mu = 0.1$  e  $E = E(L_1) + 0.03715$  (KOON *et al.*, 2000).

Como comparativo, calculamos o campo FTLE progressivamente e regressivamente para 10 unidades de tempo, a fim de obter as variedades estáveis e instáveis que estão representadas na Fig. 4.11. Além da utilização do campo gradiente, como representado na Fig. 4.11 (a), uma outra maneira de se destacar somente as variedades do campo FTLE é este mesmo ser normalizado pelo seus máximos globais, podendo elevá-los a uma potência ímpar de modo a preservar os seus sinais como mostra a Fig. 4.11 (b).

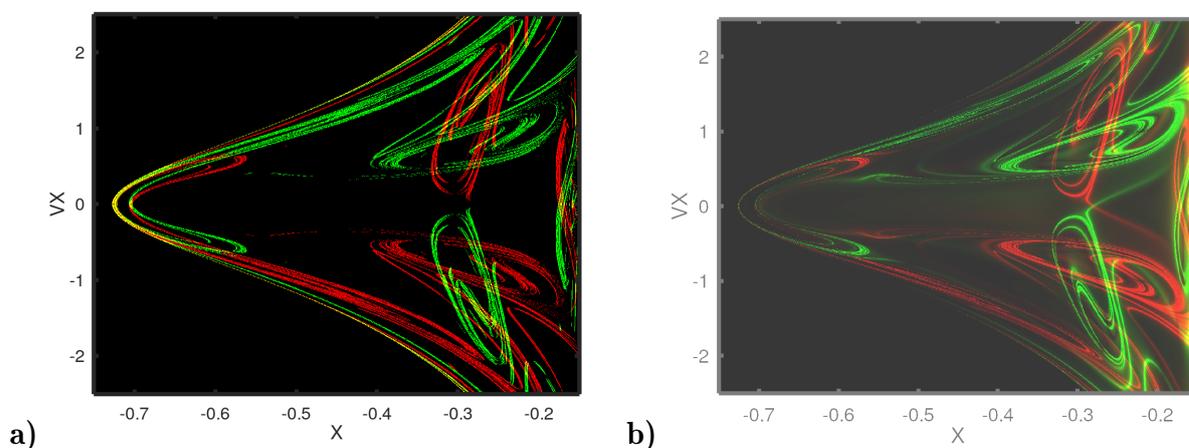


FIGURA 4.11 – Representação do campo do FTLE integrando para frente (*verde*) e para trás (*vermelho*) por 10 unidades de tempo, uma grade de condições iniciais de  $1024 \times 1024$  pontos, sendo **a)** os contornos extraídos do campo gradiente do FTLE, e **b)** o campo FTLE normalizado pelos seus máximos globais.

### 4.2.1.2 Configuração de Análise de Assis

Em seguida, adotou-se novos parâmetros que foram abordados por Assis & Terra (2014). O modelo continua sendo o PR3CCP, com  $P_1$  e  $P_2$  estando, respectivamente, fixos também em  $(-\mu, 0)$  e  $(1 - \mu, 0)$ , porém, o parâmetro de massa neste caso é  $\mu = 0.0121506683$ , correspondendo ao Sistema *Terra-Lua*. Inicialmente, vamos considerar o caso da Constante de Jacobi  $C = 3.2$ . Este valor é abaixo e próximo ao valor de  $C$  de  $L_1$ . Portanto, para condições iniciais próximas a Lua, apenas o gargalo em torno de  $L_1$  que encontra-se entre os domínios da Terra e da Lua está "levemente" aberto e disponível como canal de transporte para outras regiões, como mostrado na Fig. 3.2. É adotado um conjunto de condições iniciais no plano  $(x, y)$ , para  $\dot{x} = 0$  e  $\dot{y} > 0$ , que se encontram apenas no domínio da Lua em uma grade  $1024 \times 1024$  (região delimitada pelas CVZ, entre  $L_1$  e  $L_2$ ). Calculamos o campo FTLE, inicialmente, em 5 unidades de tempo e fomos aumentando o tempo gradativamente, como mostram os resultados da Fig. 4.12. É possível notar que a variedade estável começa a surgir na Fig. 4.12 (a) ao lado direito da Lua, sendo que tal variedade estável está associada à órbita de Lyapunov em torno da região de equilíbrio de  $L_1$  para este valor de  $C$ , como apresentado na Fig. 4.13 obtida por Assis & Terra (2014). Note que na Fig. 4.12, em todos os frames, existem regiões que apresentam pontos de descontinuidade no campo do FTLE (marcados em cores escuras), que chamaremos para esse caso de pontos espúrios. Tais pontos foram investigados e percebeu-se que correspondem a trajetórias cuja integração numérica é interrompida ao passar muito próximo dos primários, neste caso a Lua. Isso acontece devido ao fato das equações de movimento do PR3CCP apresentarem singularidades quando  $r_1, r_2 \rightarrow 0$ . Ainda que utilizando o Método de Regularização de Lemaitre, descrito na seção 3.2, há trajetórias que ao se aproximar de uma região muito próxima ao primário, o integrador numérico não tem sucesso, ou de prever a trajetória de modo a manter a constante de Jacobi invariante da precisão prescrita, ou de encontrar um passo de tempo para evolução da trajetória, de modo a satisfazer as tolerâncias de erro absoluto e relativo prescritos para o algoritmo. Vale notar que nas análises deste trabalho, mantém-se o modelo original de massa pontual para os primários, porém na análise de bacias de escape apresentada por Assis & Terra (2014), as trajetórias que se aproximam a uma distância igual ou menor ao raio médio dos primários tem suas evoluções temporais interrompidas e são atribuídas à bacia de soluções colisionais, como mostra a Fig. 4.13 (b). Esta Figura apresenta em preto a bacia colisional, i.e, o conjunto de todas as condições iniciais que colidem com o primário (Lua) ao longo da evolução temporal até o tempo final  $t_f=5000$  unidades de tempo. Comparando as Fig. 4.12 e 4.13 (b), vemos que o conjunto de pontos espúrios de nossa análise está contido na bacia colisional. É claro que o conjunto colisional da análise de bacias é bem maior que o das soluções espúrias do cálculo de FTLE, tanto devido ao valor do raio médio dos corpos ser bem maior que as aproximações típicas

onde há problemas de integração das trajetórias, quanto ao tempo total de integração das trajetórias ser bem maior no caso do cálculo das bacias.

Além disso, pela própria dinâmica do sistema, trajetórias ao passarem muito próximas do Primário tem aumentos abruptos elevados em suas velocidades, de modo que trajetórias vizinhas nesta situação apresentam grandes divergências, causando assim altos valores ao campo FTLE. (Isto ocorre, devido ao termo  $1/r_2$  do potencial. Quando  $r_2 \rightarrow 0$ , energia potencial cresce rapidamente, e devido a conservação de energia, a velocidade cresce abruptamente.) Isto foi constatado também por Pérez-Palau *et al.* (2015).

Em outras palavras, as linhas existentes na Fig. 4.12, contidos na bacia colisional na Fig. 4.13 são falsos indicativos, i.e, não são variedades hiperbólicas. As estruturas hiperbólicas que sabe-se que são verdadeiras, correspondem com as fronteiras da bacia de escape apresentadas por Assis & Terra (2014) na Fig. 4.13. Por fim, sabe que a região do lado esquerdo da Lua nesta seção de Poincaré é uma região que possui grande estabilidade, muito maior do que a do lado direito, apresentando a prevalência de toros invariantes (ASSIS; TERRA, 2014). O que não se sabe é o motivo do campo FTLE indicar linhas com comportamento em espiral para essa região.

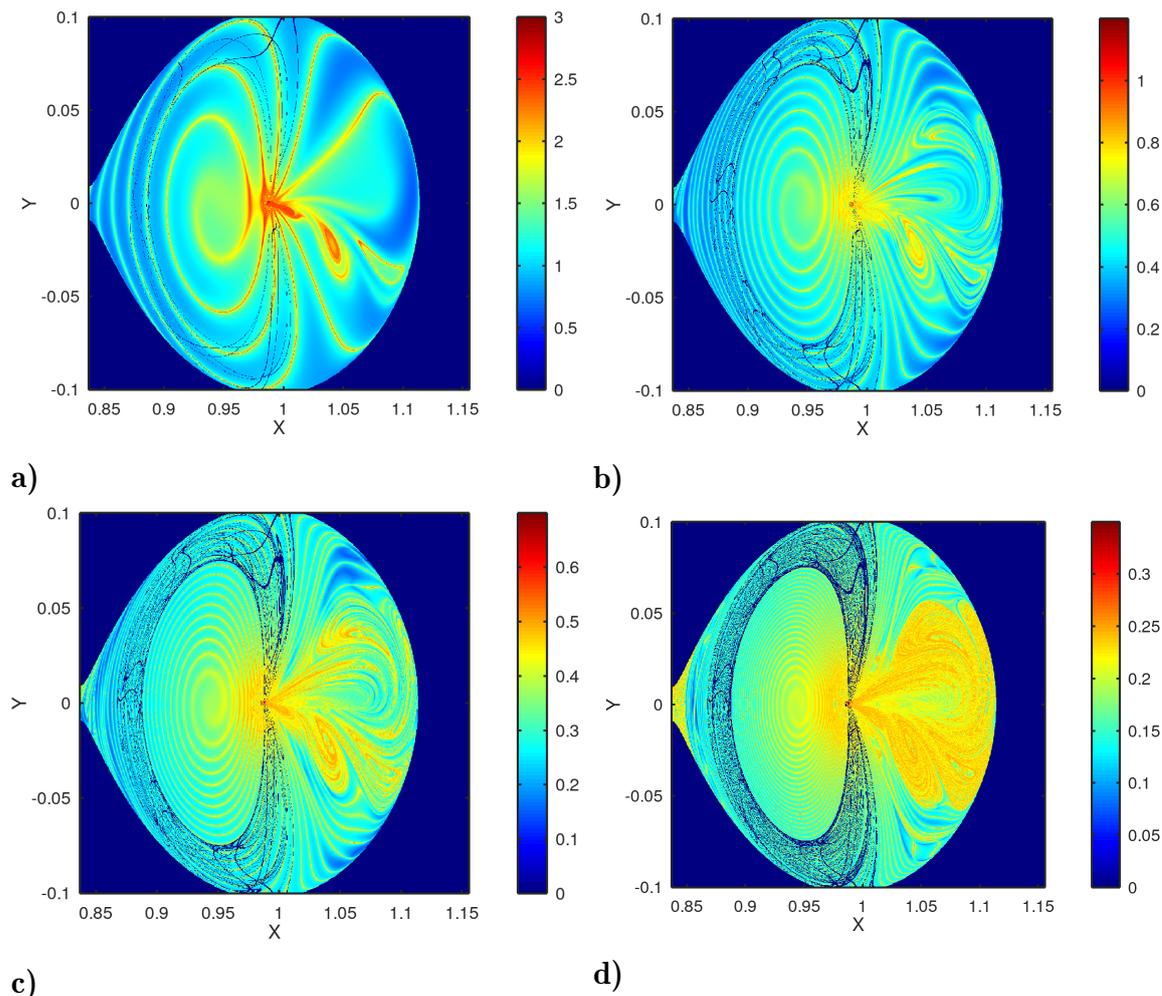


FIGURA 4.12 – Evolução do FTLE para o PR3CCP no plano  $(x, y)$ , para  $\dot{x} = 0$  e  $\dot{y} > 0$  e  $C = 3.2$  para a)  $T = 5$ , b)  $T = 15$ , c)  $T = 25$ , d)  $T = 50$

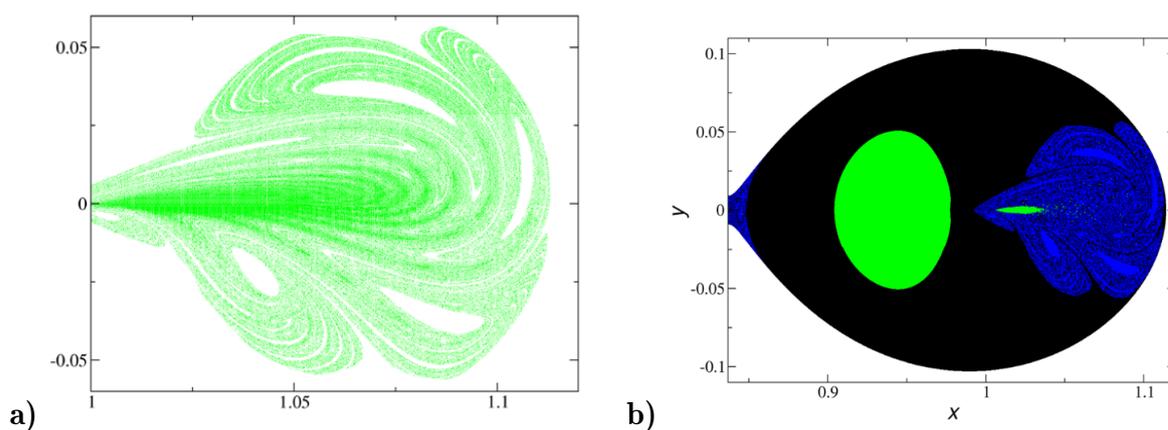


FIGURA 4.13 – Bacias de escape do Sistema Terra-Lua para  $C = 3.2$ . Em a) temos apenas a bacia limitada, ou seja, as condições iniciais de trajetórias que permanecem no domínio em torno da Lua, sem colidir com o primário e sem escapar para  $t_f = 200$  unidades de tempo. Em b) temos as três bacias de escape para  $t_f = 5000$  unidades de tempo. Neste caso, temos a bacia colisional (preto), a bacia de escape para o domínio da Terra (azul) e a bacia limitada (verde). (ASSIS; TERRA, 2014).

A Fig. 4.14 representa a intersecção das variedades estável e instável com a seção de

Poincaré, apresentadas por Assis & Terra (2014). É perceptível que os cortes de variedades se encontram nas mesmas regiões que algumas das estruturas mostradas na Fig. 4.15, que nos mostra o campo de FTLE integrado progressivamente (verde) e regressivamente (vermelho) para 15 unidades de tempo, onde a Fig. 4.15(a) é o campo gradiente do campo FTLE e Fig. 4.15 (b) o campo normalizado pelos seus máximos globais para destacar as estruturas. Obviamente, uma série de outras estruturas são visíveis nos campos FTLE, além dos primeiros cortes das variedades da órbita de Lyapunov. Isso dificulta a análise de variedades usando o FTLE.

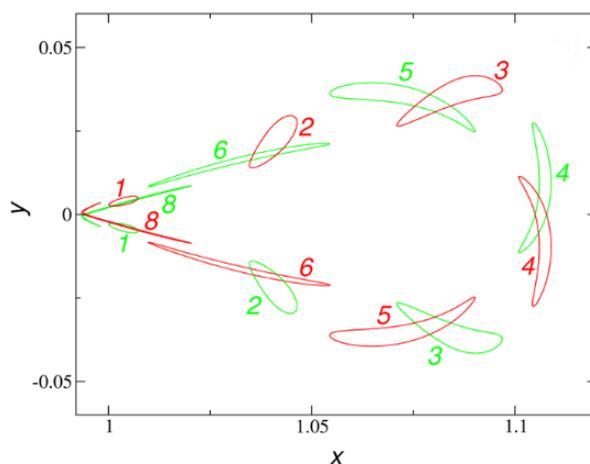


FIGURA 4.14 – Intersecção das variedades estável (verde) e instável (vermelha) da órbita de Lyapunov em torno de  $L_1$ , obtidas por a) seção de Poincaré (ASSIS; TERRA, 2014).

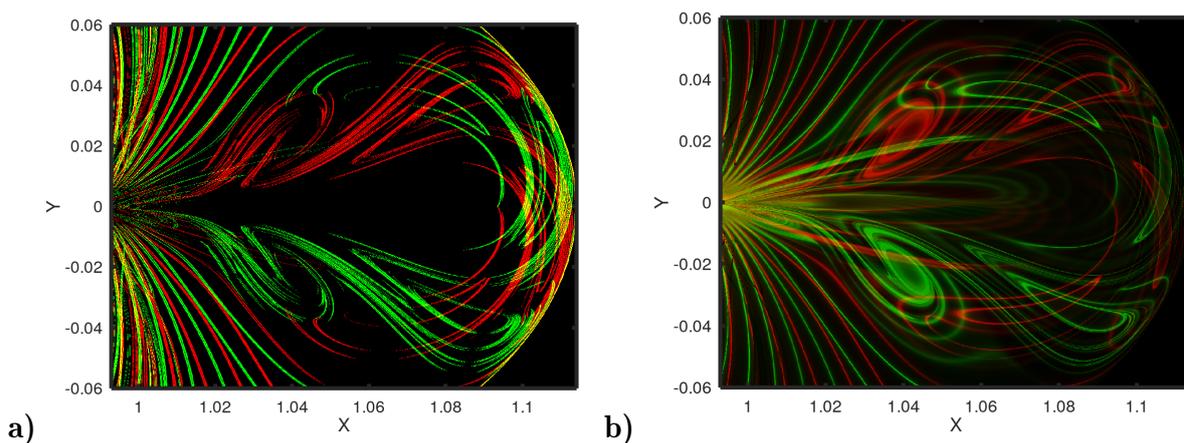


FIGURA 4.15 – Campo do FTLE para 15 unidades de tempo progressivamente (verde) e regressivamente (vermelho) e grade condições iniciais de  $1024 \times 1024$  pontos, utilizando o campo gradiente do FTLE em (a) e o campo do FTLE normalizado pelos seus máximos globais em (b)

A Fig. 4.16 (a,b,c) representa a evolução temporal do campo FTLE para a região em torno da Lua para  $C = 3.188075$ . Diferentemente do que é apresentado no caso anterior, onde o gargalo entre os domínios dos Primários ainda é pequeno, temos uma

região de equilíbrio em torno do  $L_1$  bem maior, proporcionando um canal de transporte maior entre os domínios do sistema. Novamente, as fronteiras que delimitam as bacias de escape de Assis & Terra (2014) apresentadas na Fig. 4.16 (d), coincidem com os altos valores dos campos de FTLE apresentados nos outros frames desta figura, podendo dizer que as mesma representam as variedades. É possível notar como essas estruturas se modificam devido tanto ao aumento do tempo, como ao aumento de energia do sistema quando comparadas com as Fig. 4.16. A mesma análise foi feita para a evolução temporal do campo do FTLE representado na Fig. 4.17 (a,b,c) na região em torno da Lua para  $C = 3.1841$ . Para esse outro caso, além da região de equilíbrio em torno do  $L_1$  estar totalmente aberta, temos também a região em torno do  $L_2$  levemente aberta.

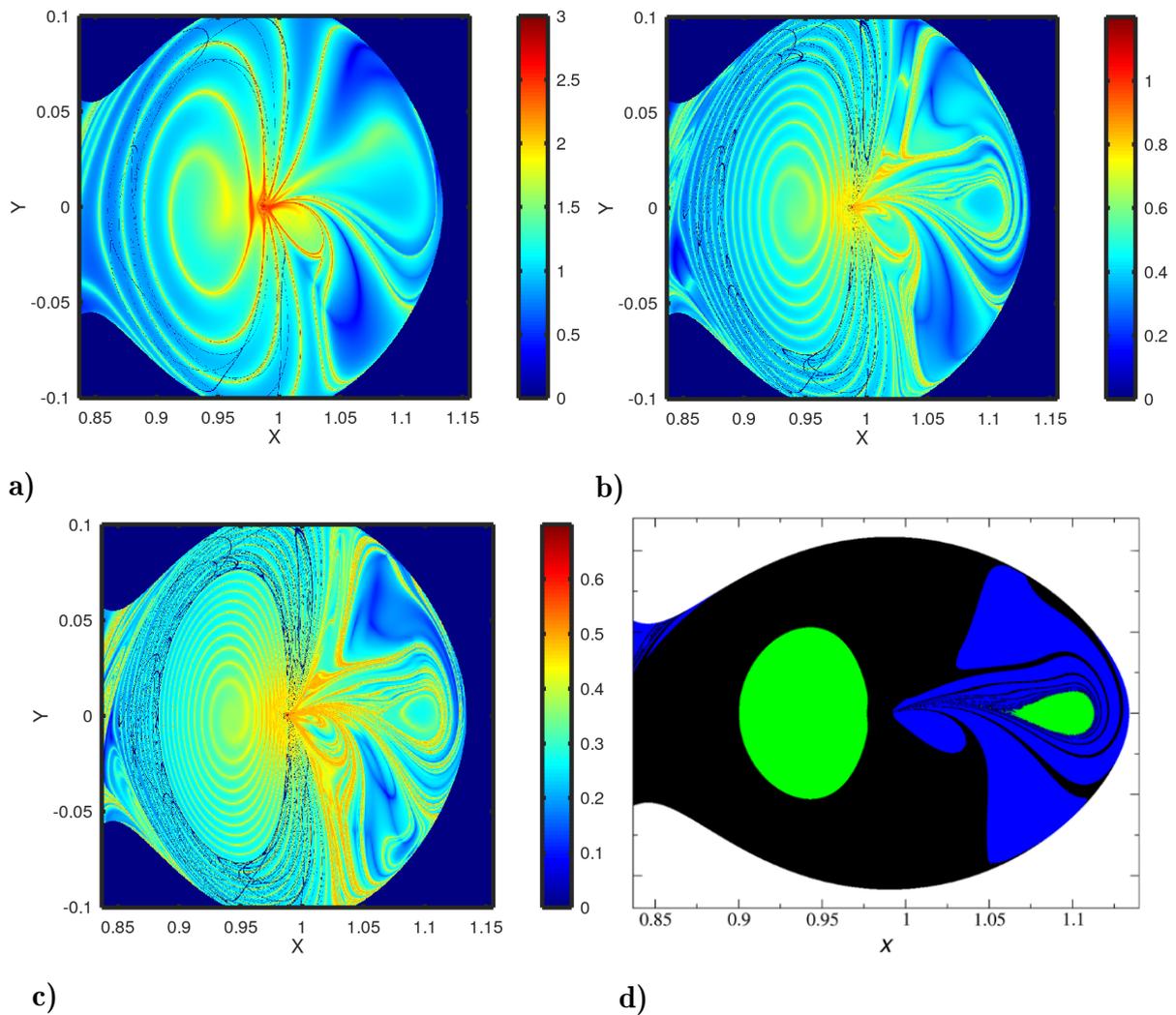


FIGURA 4.16 – Evolução do FTLE para o PR3CCP no plano  $(x, y, \dot{x} = 0, \dot{y} > 0)$  e  $C = 3.188075$  para os respectivos tempos **a)**  $T = 5$ , **b)**  $T = 15$ , **c)**  $T = 25$ ; **d)** diagrama das bacias de escape, contendo a bacia de escape para o domínio da Terra (*azul*), bacia de soluções limitadas (*verde*) e o conjunto colisional (preto) (ASSIS; TERRA, 2014)

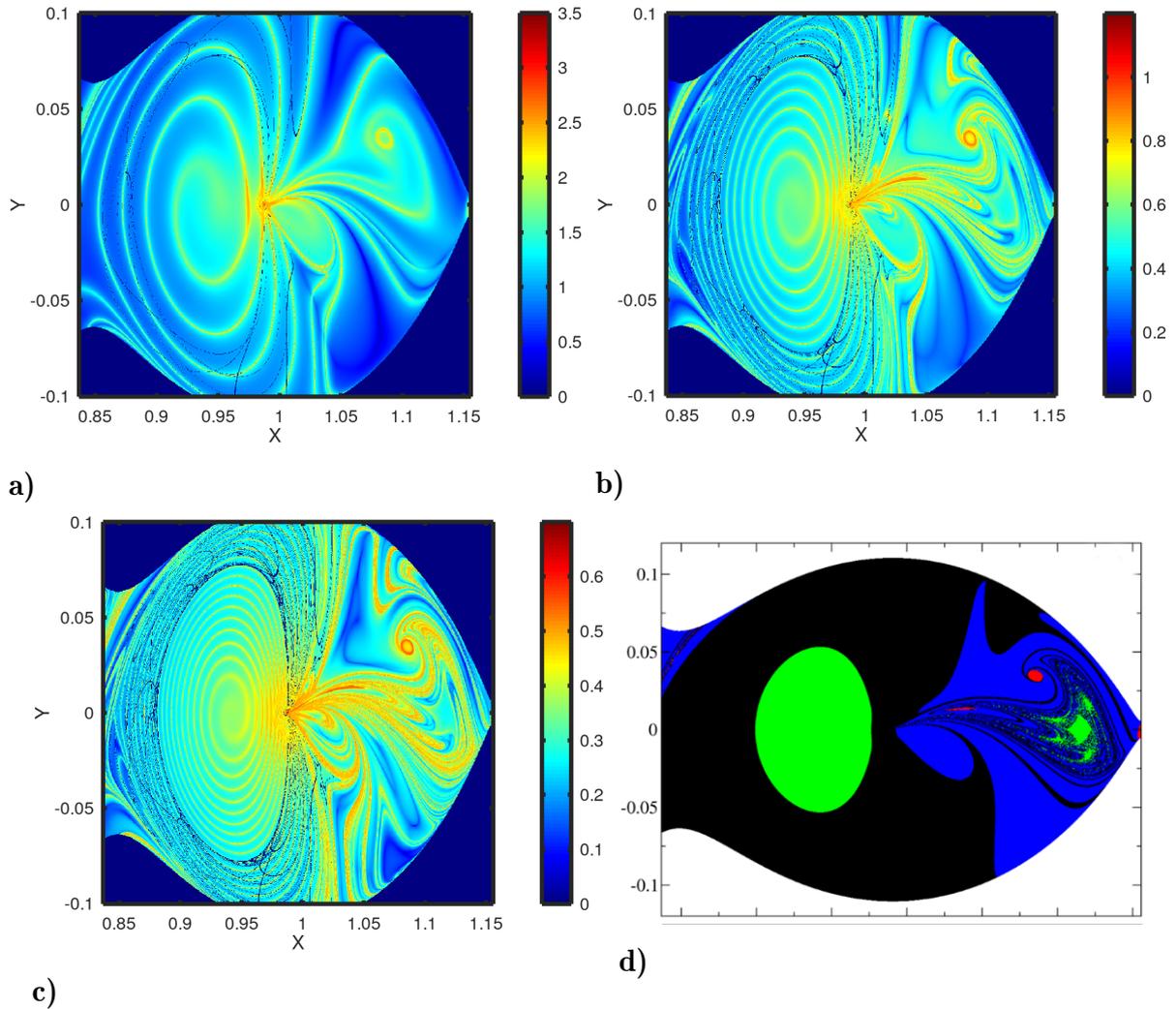


FIGURA 4.17 – Evolução do FTLE para o PR3CCP no plano  $(x, y, \dot{x} = 0, \dot{y} > 0)$  e  $C = 3.1841$  para os respectivos tempos **a)**  $T = 5$ , **b)**  $T = 15$ , **c)**  $T = 25$ ; d) diagrama das bacias de escape, contendo a bacia de escape para o domínio da Terra (*azul*), bacia de escape para o domínio exterior (*vermelho*) (escape pela região de  $L_2$ ), bacia de soluções limitadas (*verde*) e o conjunto colisional (preto) (ASSIS; TERRA, 2014)

## 4.2.2 Função- $M$ e $\hat{M}$

### 4.2.2.1 Configuração de Análise de Gawlik

Nesta seção, iremos testar as ferramentas das Funções  $-M$  e  $-\hat{M}$ , descritas, respectivamente, nas Eqs. (2.17) e (2.19), para o Problema de 3 Corpos utilizando os mesmos parâmetros descritos na seção 4.2.1. Ambos os métodos calculam o comprimento de arco de um trajetória ao longo de um determinado tempo, a diferença fundamental é que a Função- $M$  usa a norma Euclidiana enquanto a  $\hat{M}$  usa normas diferentes. Utilizou-se, inicialmente, a Função- $M$  como consta na Eq. 2.17, i.e, integrando em um intervalo de tempo  $[-\tau, +\tau]$ . A ideia de usar esse intervalo de tempo é que por meio dele já é possível detectar, simultaneamente, as variedades estáveis e instáveis, como mostrado na

Fig. 4.18, onde a integração foi feita para a)  $\tau=2$  unidades de tempo e b)  $\tau=5$  unidades de tempo. Contudo, para comparar com os resultados apresentados na seção anterior, usaremos apenas a integração progressiva, como mostrado na Fig.4.19.

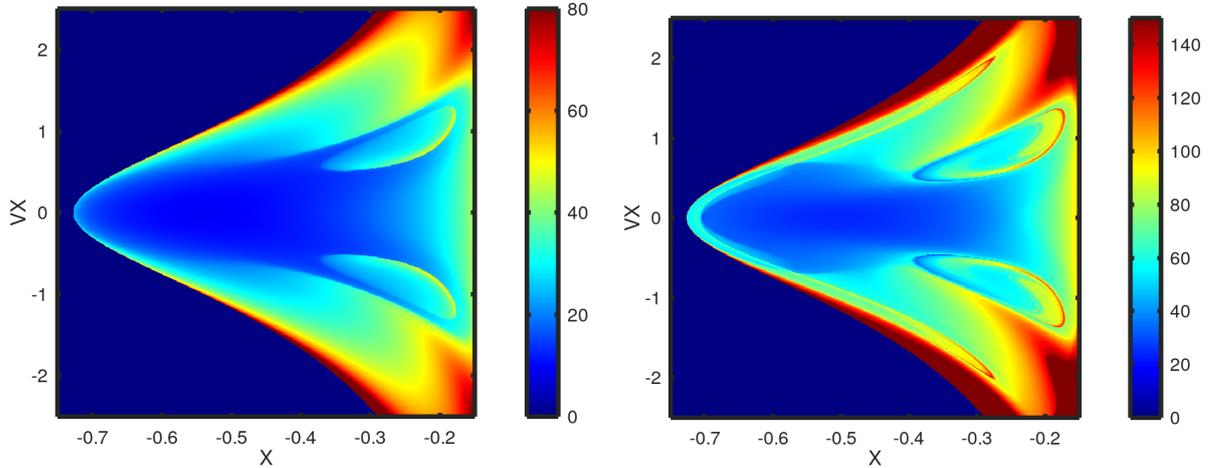


FIGURA 4.18 – Reprodução das Variedades apresentadas na Figura 4.7, desta vez usando o método da Função- $M$ , que integra de  $[-\tau, +\tau]$  nos respectivos tempos: **a)**  $\tau = 2$  e **b)**  $\tau = 5$ .

O primeiro aspecto que é importante enfatizar quando comparamos as Figs. 4.19 e 4.7 é que, diferentemente dos resultados do FTLE, onde as estruturas são linhas agindo como se fossem separatrizes, indicando taxas de afastamento ou aproximação entre pontos vizinhos, o comprimento de arco diferencia regiões onde as trajetórias de cada partícula conseguem evoluir mais ou menos em um intervalo de tempo determinado. Isso quer dizer que as regiões da Fig. 4.19 com cores tendendo ao vermelho indicam que as condições iniciais para aquela região conseguiram evoluir suas trajetórias muito mais do que as demais regiões tendendo ao azul. E a fronteira entre essas regiões coincide com a localização das variedades, se comparadas com as Fig. 4.7 e Fig. 4.10. Outro aspecto importante é o fato de que a Função- $M$  diminui o surgimento de linhas de “falsos indicativos” de variedades. Esse aspecto ficará mais claro nos exemplos que serão apresentados. Além disso, dois grandes diferenciais práticos entre os dois métodos são (i) o tempo computacional e (ii) o fato de a Função- $M$  ser muito mais simples de ser implementada em relação ao FTLE.

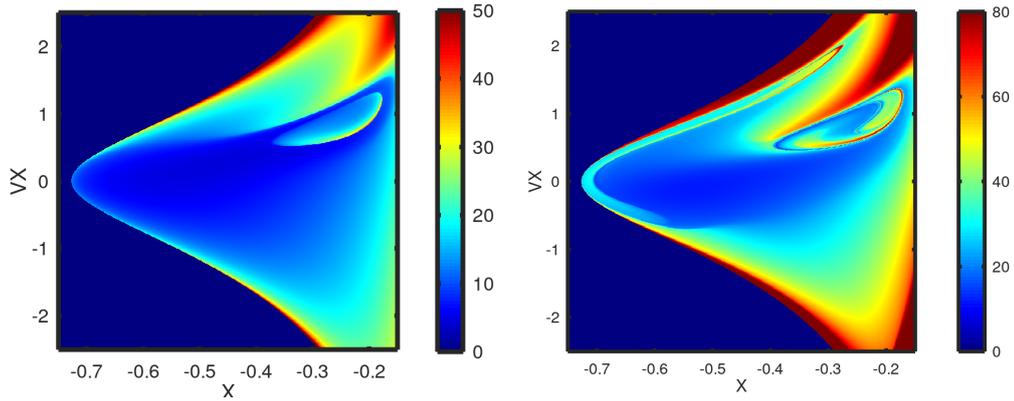


FIGURA 4.19 – Reprodução das Variedades apresentadas na Fig. 4.7, desta vez usando o método da Função- $M$ , integrando apenas para frente nos seguintes tempos: **a)**  $\tau = 2$  e **b)**  $\tau = 5$ .

Diante da constatação de que para o Problema de Três Corpos as velocidades exercem grande influência no sistema, buscou-se verificar o quão influente estas seriam na detecção das variedades usando as equações das Funções  $-M$  e  $-\hat{M}$ . Os resultados obtidos encontram-se na Fig. 4.20, onde **(a, b, c)** representam a Função- $M$ , **(d, e, f)** a Função- $\hat{M}$  com  $\hat{p} = 0.4$ , e **(g, h, i)** a Função- $\hat{M}$  com  $\hat{p} = 0.8$ . Para cada um desses métodos, calculou-se primeiramente o comprimento de arco utilizando as posições e velocidades **(a,d,g)**. Em seguida, o comprimento de arco foi calculado utilizando somente as velocidades do sistema **(b,e,h)** e, por fim, somente as posições **(c,f,i)**. É perceptível que os campos em que os comprimentos de arco foram calculado com as posições e velocidades (Figs. 4.20**(a,d,g)**) não aparentam nenhuma mudança significativa em relação aos campos construídos somente utilizando as velocidades (Fig. 4.20**(b,e,h)**), diferentemente do que acontece quando comparados com as Fig. 4.20**(c,f,i)**, o que mostra como o fator velocidade para o problema de três corpos é dominante para todo o sistema. Ainda assim, como apresentado a diante, a análise utilizando somente as posições também é de interesse.

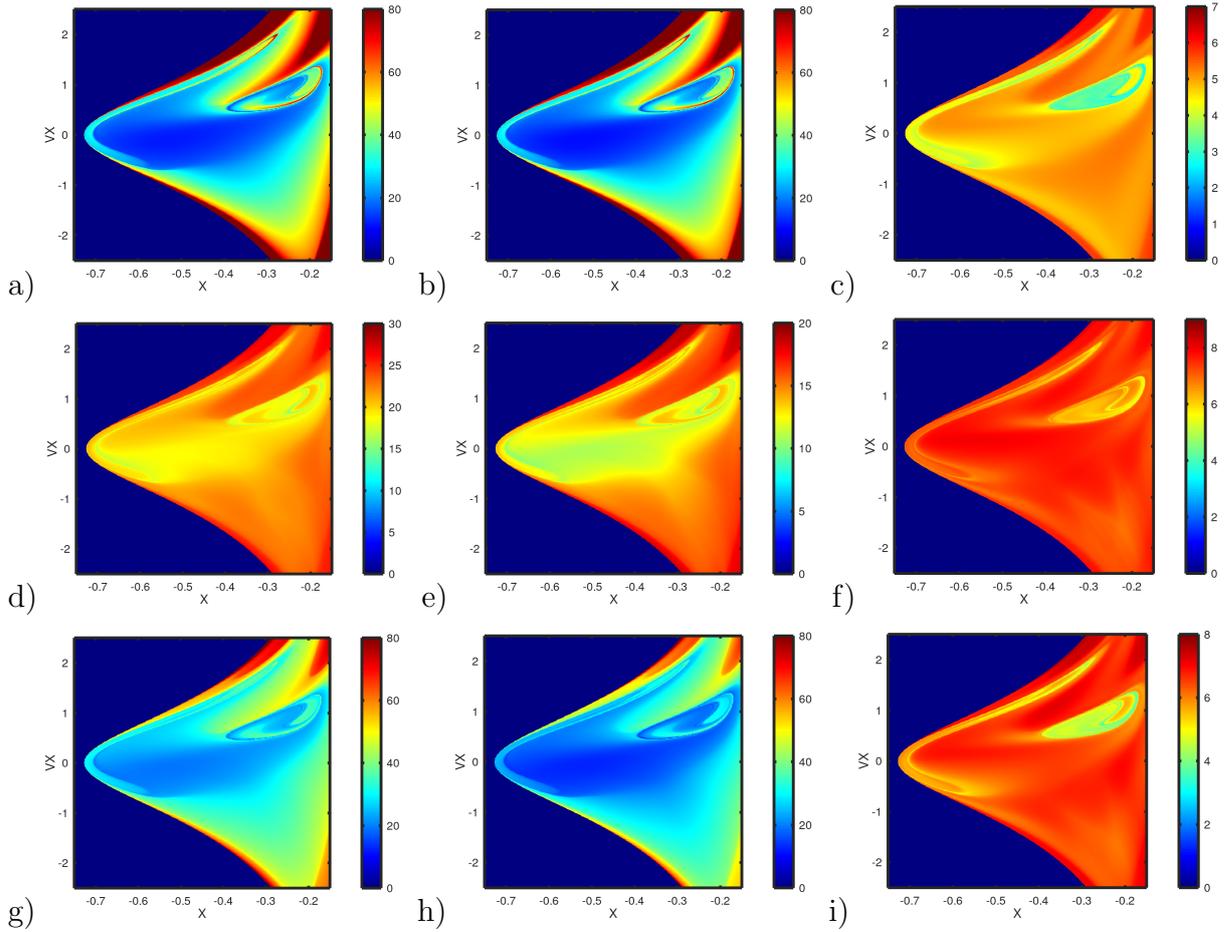


FIGURA 4.20 – Comparação entre métodos da Função- $M$  e da Função- $\hat{M}$  usando os parâmetros descritos na Configuração de Análise de Gawlik, com 5 unidades de tempo para integração. Os métodos utilizados para cada figura são, respectivamente, Função- $M$  ( $a, b, c$ ), Função- $\hat{M}$  com fator  $\hat{p} = 0.4$  ( $d, e, f$ ) e Função- $\hat{M}$  com fator  $\hat{p} = 0.8$  ( $g, h, i$ ). A primeira coluna ( $a, d, g$ ) representa o cálculo usando as posições e velocidades de cada método, sendo a segunda coluna ( $b, e, h$ ) o cálculo usando somente as velocidades e a terceira coluna ( $c, f, i$ ) somente as posições.

#### 4.2.2.2 Configuração de Análise de Assis

Repetiu-se o mesmo processo realizado na seção anterior para o problema de três corpos com os parâmetros utilizados por Assis & Terra (2014). Consequentemente, dadas as Figuras 4.20, 4.21, 4.22 e 4.23 é possível perceber que a visualização dos cortes de variedades se torna mais fácil quando calcula-se, tanto para a Função- $M$  como para a Função- $\hat{M}$ , usando somente as posições. No caso do fator  $\hat{p}$  utilizado para o cálculo das normas, verificou-se que com fator  $\hat{p} = 0.8$  não se observa diferença significativa em relação ao fator  $\hat{p} = 0.4$ . Dessa forma, limitamos nossos resultados para a Função- $M$  e a Função- $\hat{M}$  com norma  $\hat{p} = 0.4$ , usando somente as posições no cálculo do comprimento de arco para as Figuras 4.24, 4.25, 4.26, 4.27, 4.28 e 4.29 onde representa-se a evolução temporal para diferentes valores da *Constante de Jacobi*, podendo-se compará-las com o campo FTLE mostrado nas Figuras 4.12, 4.16 e 4.17 da seção anterior.

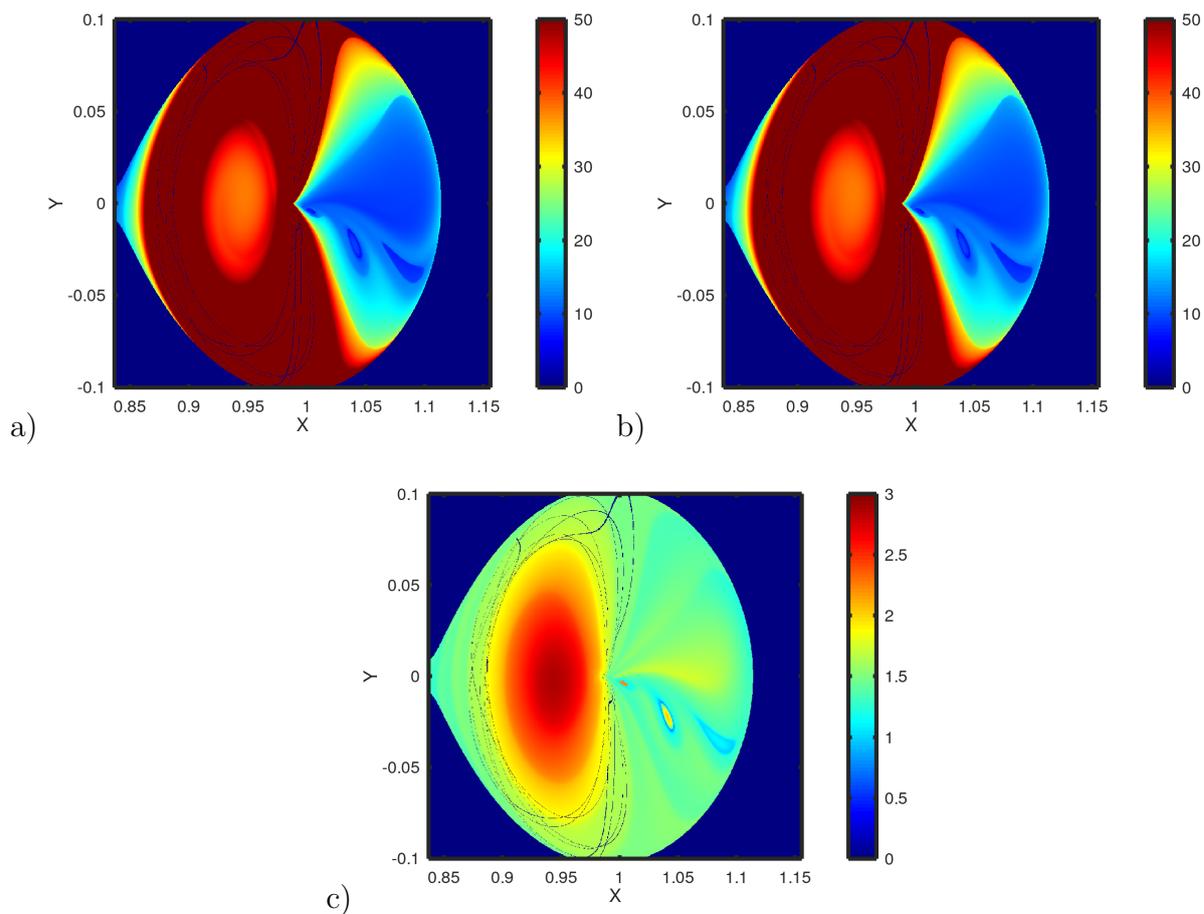


FIGURA 4.21 – Função- $M$  usando os parâmetros encontrados em (ASSIS; TERRA, 2014), para  $C=3.20$  e 5 unidades de tempo de integração. (a) Cálculo usando as posições e velocidades; (b) cálculo usando somente as velocidades; (c) cálculo usando somente as posições.

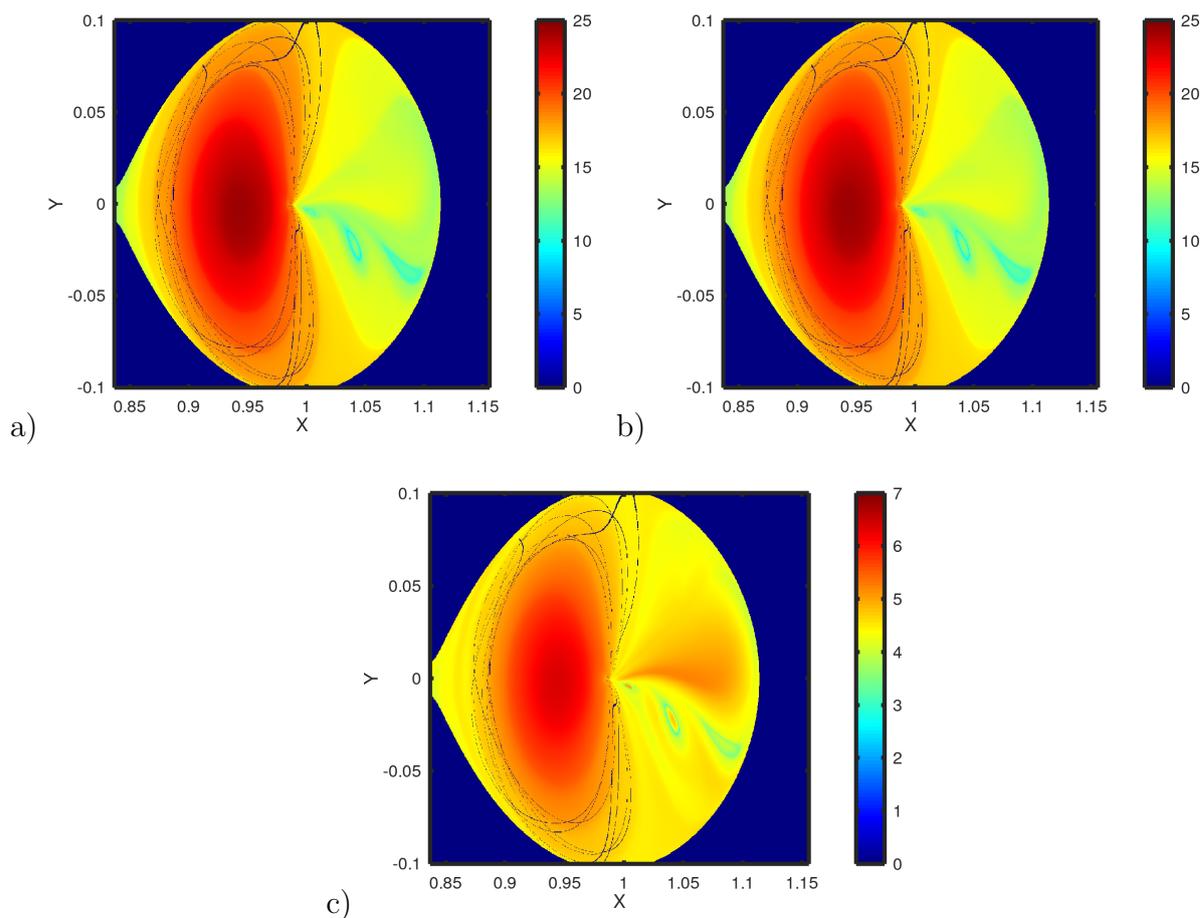


FIGURA 4.22 – Função- $\hat{M}$  com fator  $\hat{p} = 0.4$  usando os parâmetros encontrados em (ASSIS; TERRA, 2014), para  $C=3.20$  e 5 unidades de tempo de integração. (a) Cálculo usando as posições e velocidades; (b) cálculo usando somente as velocidades; (c) cálculo usando somente as posições.

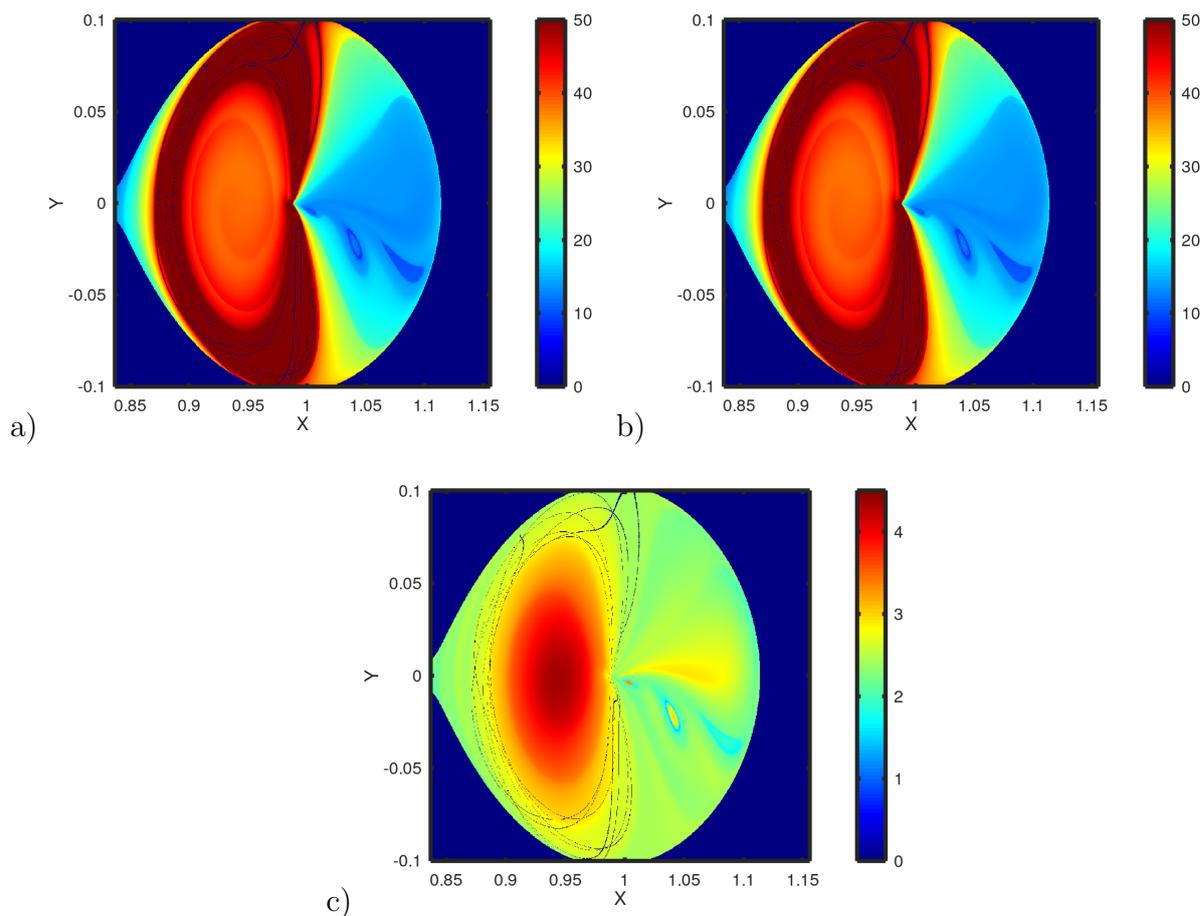


FIGURA 4.23 – Função- $\hat{M}$  com fator  $\hat{p} = 0.8$  usando os parâmetros encontrados em (ASSIS; TERRA, 2014), para  $C=3.2$  e 5 unidades de tempo de integração. (a) Cálculo usando as posições e velocidades; (b) cálculo usando somente as velocidades; (c) cálculo usando somente as posições.

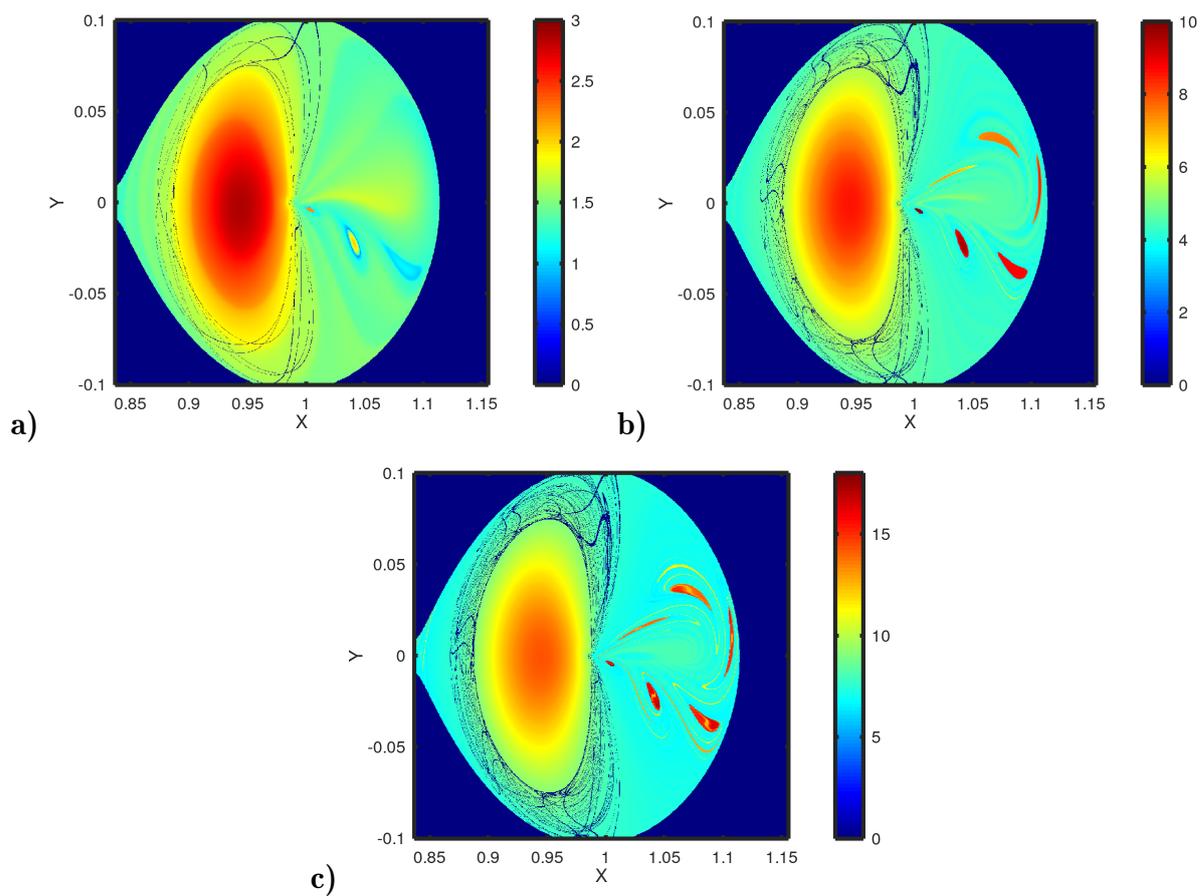


FIGURA 4.24 – Função- $M$  usando somente as posições para a seção  $(x, y)$ , com  $\dot{x} = 0$  e  $\dot{y} > 0$ , com  $C = 3.2$  fixo para os seguintes tempos: a)  $T = 5$ , b)  $T = 15$ , c)  $T = 25$ .

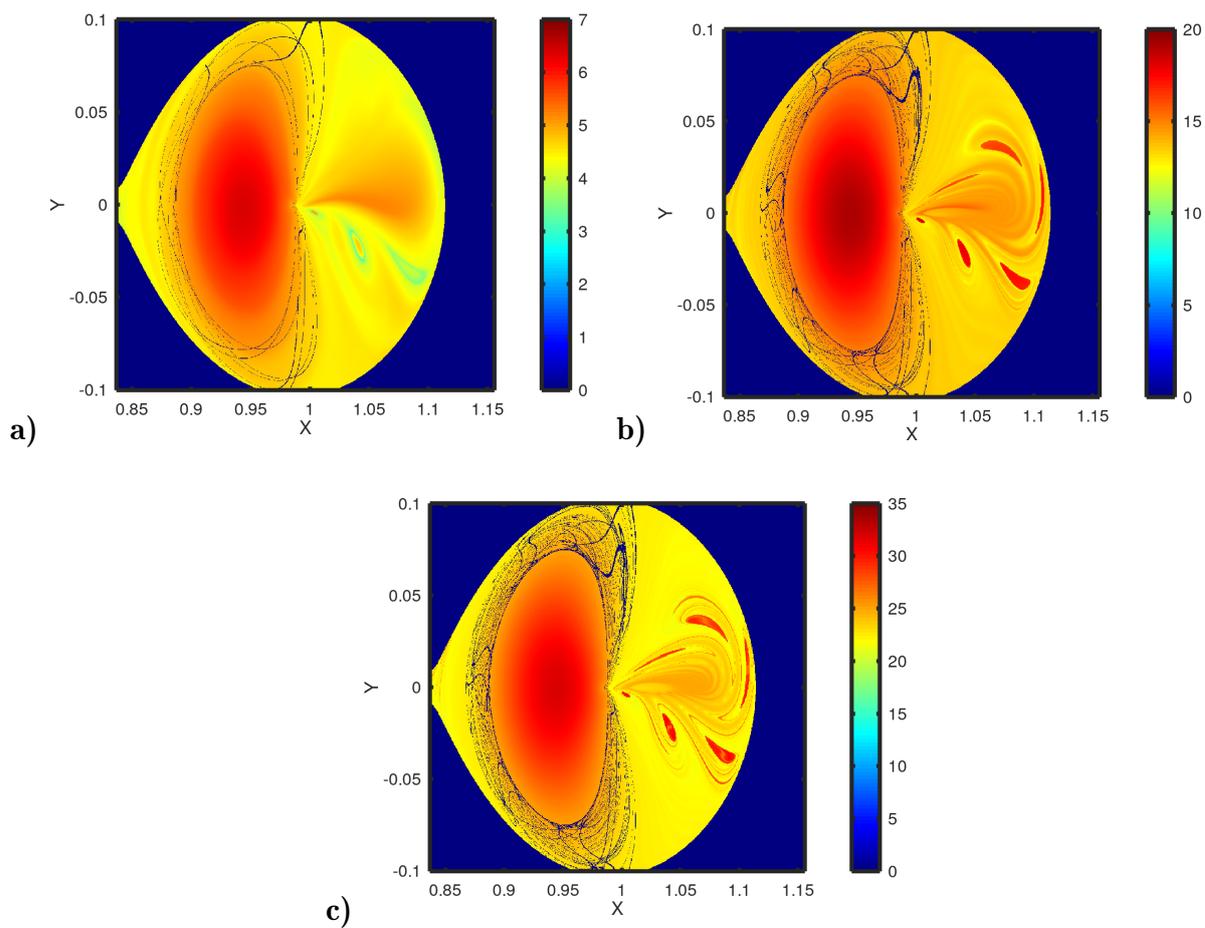


FIGURA 4.25 – Função- $\hat{M}$  com fator  $\hat{p} = 0.4$  usando somente as posições para a seção  $(x, y)$ , com  $\dot{x} = 0$  e  $\dot{y} > 0$ , com  $C = 3.2$  fixo para os seguintes tempos: a)  $T = 5$ , b)  $T = 15$ , c)  $T = 25$ .

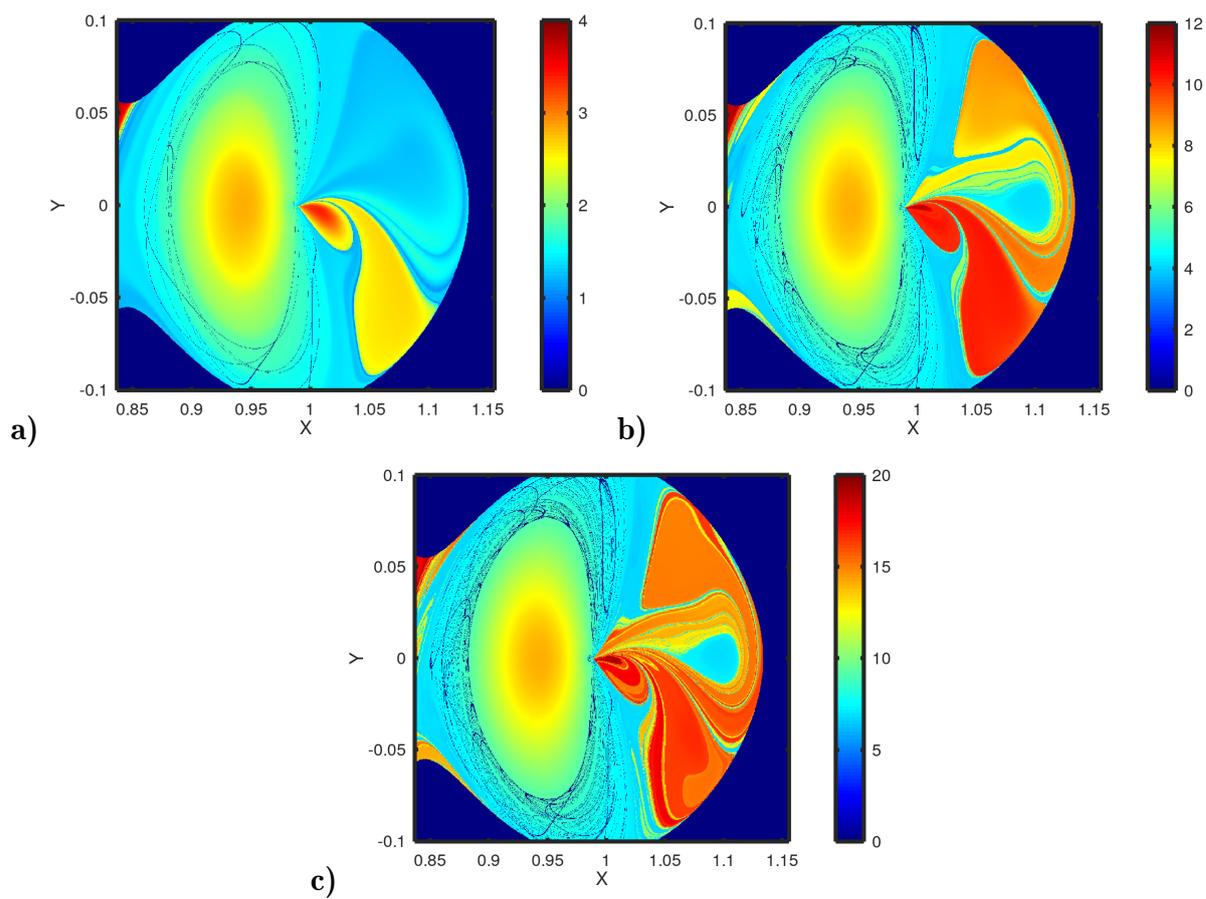


FIGURA 4.26 – Função- $M$  usando somente as posições para a seção  $(x, y)$ , com  $\dot{x} = 0$  e  $\dot{y} > 0$ , com  $C = 3.188075$  fixo para os seguintes tempos: **a)**  $T = 5$ , **b)**  $T = 15$ , **c)**  $T = 25$

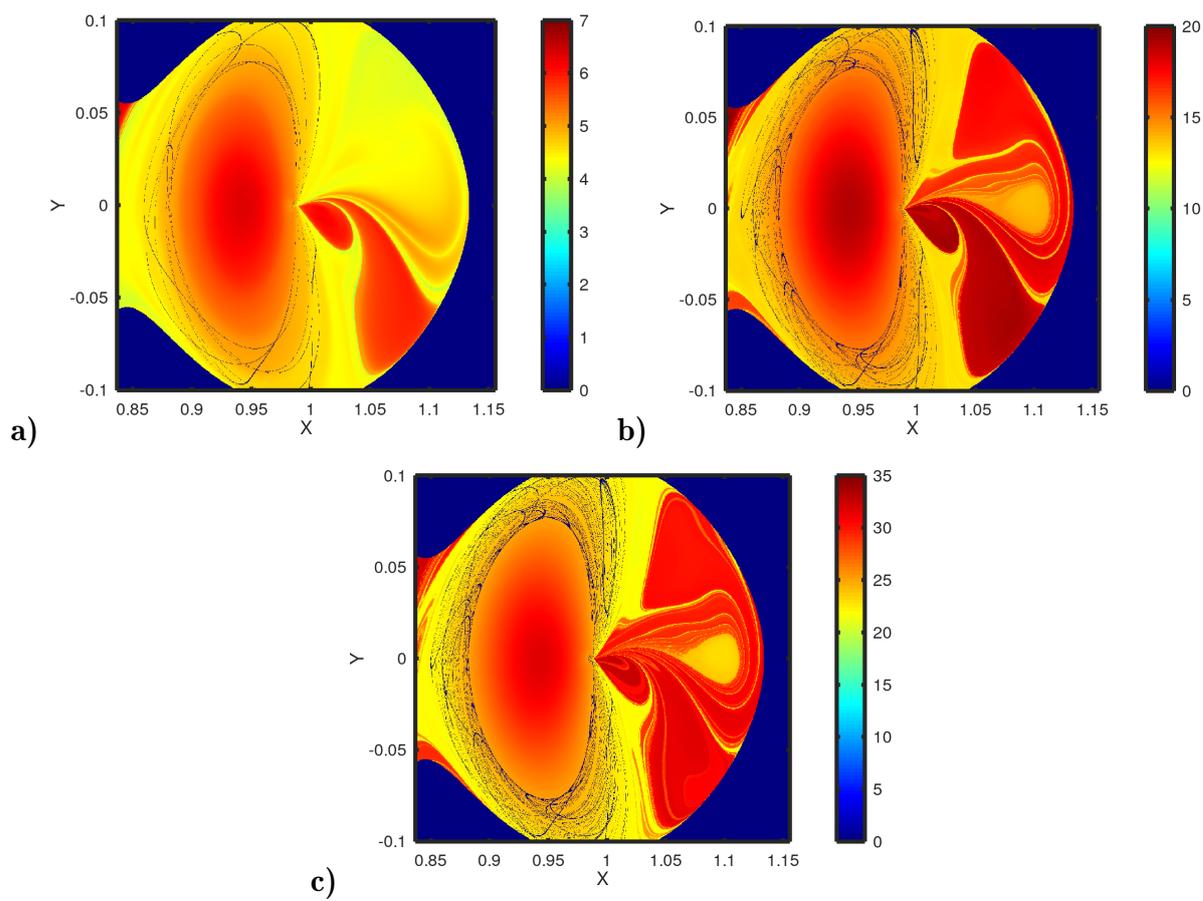


FIGURA 4.27 – Função- $\hat{M}$  com fator  $\hat{p} = 0.4$  usando somente as posições para a seção  $(x, y)$ , com  $\dot{x} = 0$  e  $\dot{y} > 0$ , com  $C = 3.188075$  fixo para os seguintes tempos: **a)**  $T = 5$ , **b)**  $T = 15$ , **c)**  $T = 25$

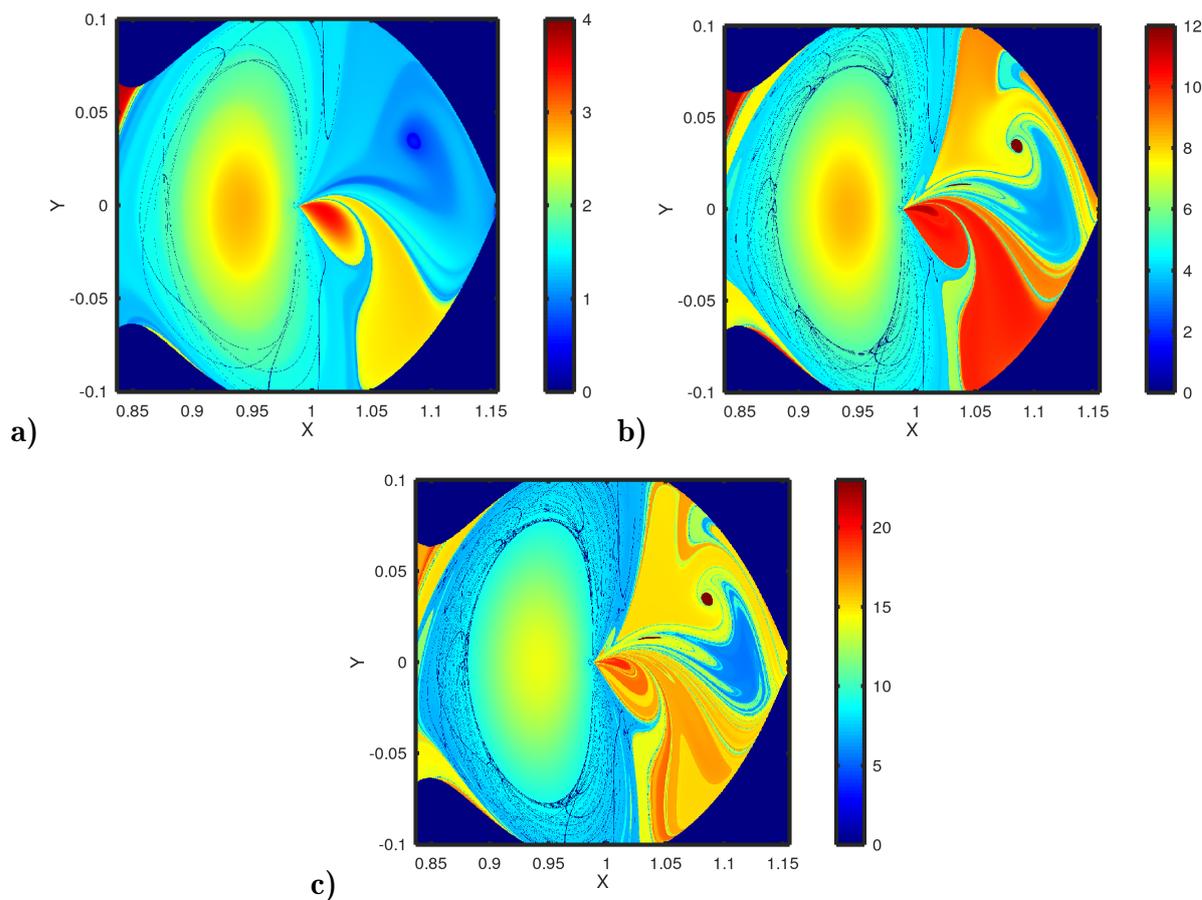


FIGURA 4.28 – Função- $M$  usando somente as posições para a seção  $(x, y)$ , com  $\dot{x} = 0$  e  $\dot{y} > 0$ , com  $C = 3.1841$  fixo para os seguintes tempos: **a)**  $T = 5$ , **b)**  $T = 15$ , **c)**  $T = 25$

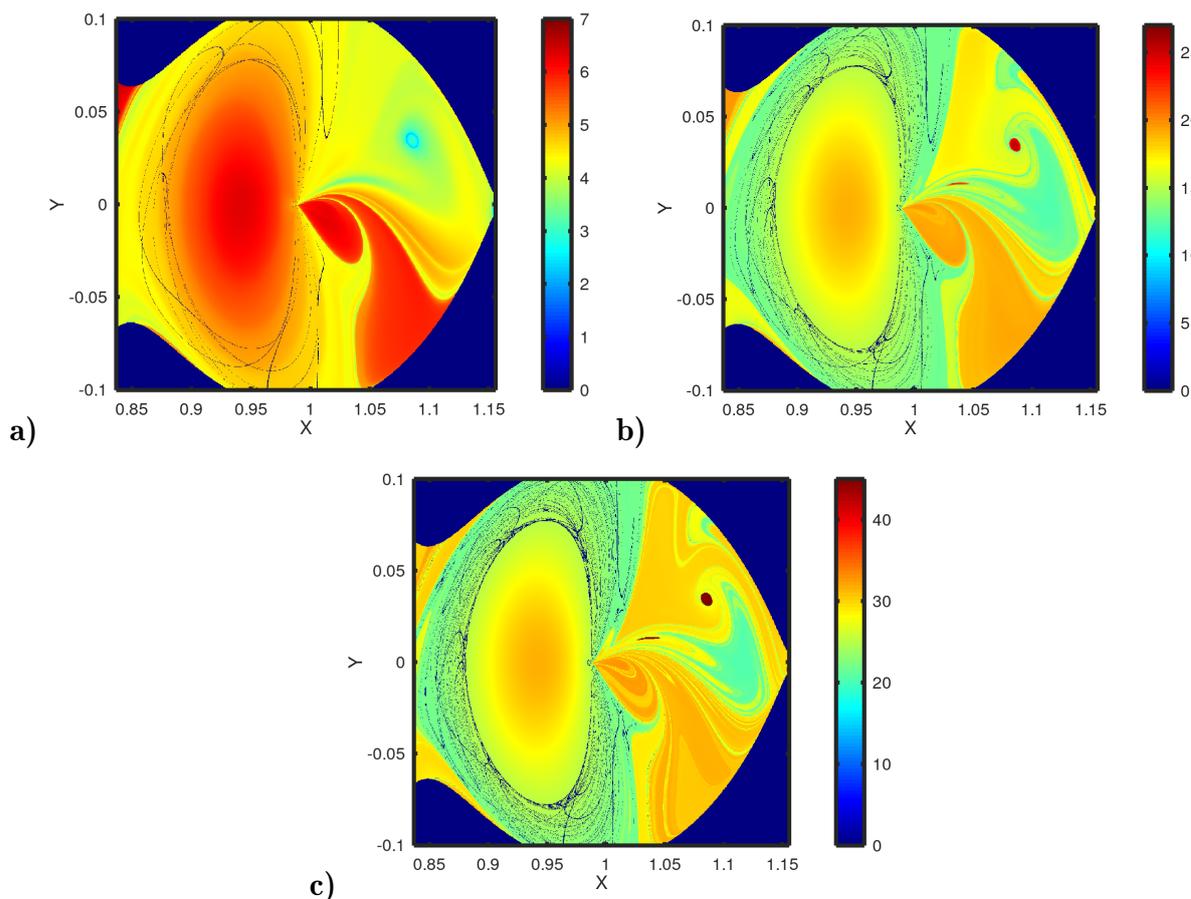


FIGURA 4.29 – Função- $\hat{M}$  com fator  $\hat{p} = 0.4$  usando somente as posições para a seção  $(x, y)$ , com  $\dot{x} = 0$  e  $\dot{y} > 0$ , com  $C = 3.1841$  fixo para os respectivos tempos **a)**  $T = 5$ , **b)**  $T = 15$ , **c)**  $T = 25$

### 4.2.3 Segmentação de estruturas Lagrangianas com a Função- $M$

A Fig. 4.30 representa as intersecções das variedades estável (*verde*) e instável (*vermelha*) calculadas utilizando a Função- $M$  para os parâmetros usados por Gawlik *et al.* (2009). A Fig. 4.30 (a) pode ser comparada com a intersecção das variedades calculadas pelo FTLE apresentada na Fig. 4.11. Da mesma maneira, na Fig. 4.30 (b) o campo da Função- $M$  usando os parâmetros utilizados por Assis & Terra (2014) pode ser comparado com a Fig. 4.15. Ambas as figuras têm seus campos normalizados pelos seus máximos globais para destacar as estruturas.

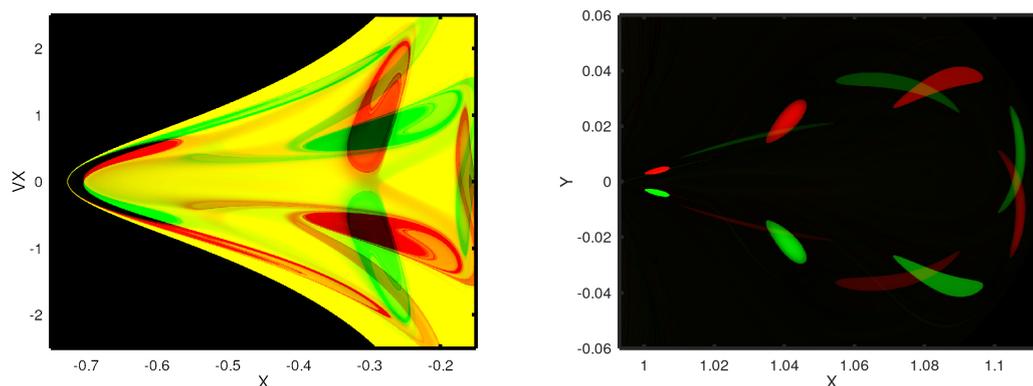


FIGURA 4.30 – (a) Intersecção das variedades estável (*verde*) e instável (*vermelho*) do modelo de Gawlik encontradas utilizando a Função- $M$  integrando progressivamente e regressivamente com 10 unidades de tempo, grade de  $1024 \times 1024$ ,  $\mu = 0.1$ ,  $C = 3.6126$  no plano  $(x, \dot{x})$  para  $y = 0$  e  $\dot{y} < 0$ . (b) Variedades do modelo de Assis com 25 unidades de tempo, em uma grade  $1024 \times 1024$ ,  $\mu = 0.0121$ ,  $C = 3.200$  no plano  $(x, y)$ , para  $\dot{x} = 0$  e  $\dot{y} > 0$ .

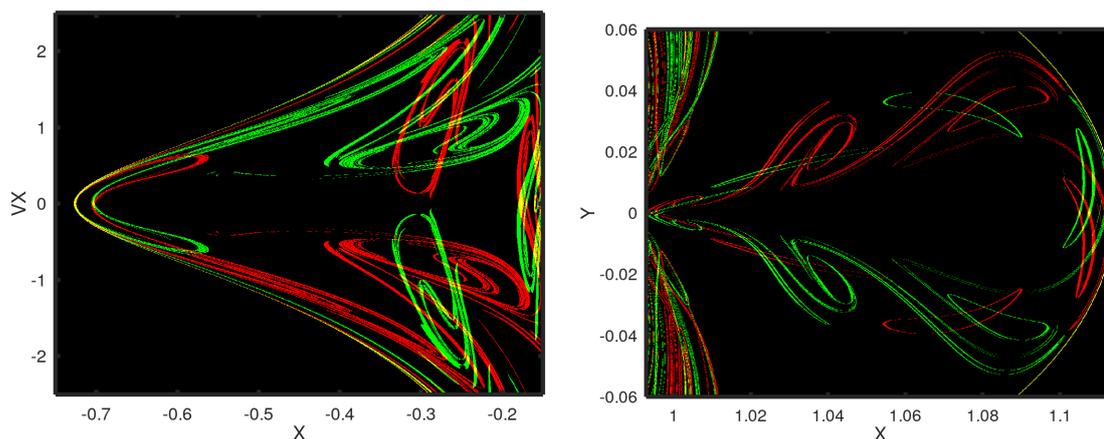


FIGURA 4.31 – Extração dos contornos do gradiente do (a) campo da Função- $M$  sobre a intersecção das variedades estável (*verde*) e instável (*vermelho*) para os parâmetros utilizados por Gawlik integrando progressivamente e regressivamente em *a*) com 10 unidades de tempo, grade de  $1024 \times 1024$ ,  $\mu = 0.1$ ,  $C = 3.6126$  no plano  $(x, y = 0, \dot{x}, \dot{y} < 0)$ . (b) O mesmo para os parâmetros utilizados por Assis em com 15 unidades de tempo, em uma grade  $1024 \times 1024$ ,  $\mu = 0.0121$ ,  $C = 3.200$  no plano  $(x, y)$ , para  $\dot{x} = 0$  e  $\dot{y} > 0$ .

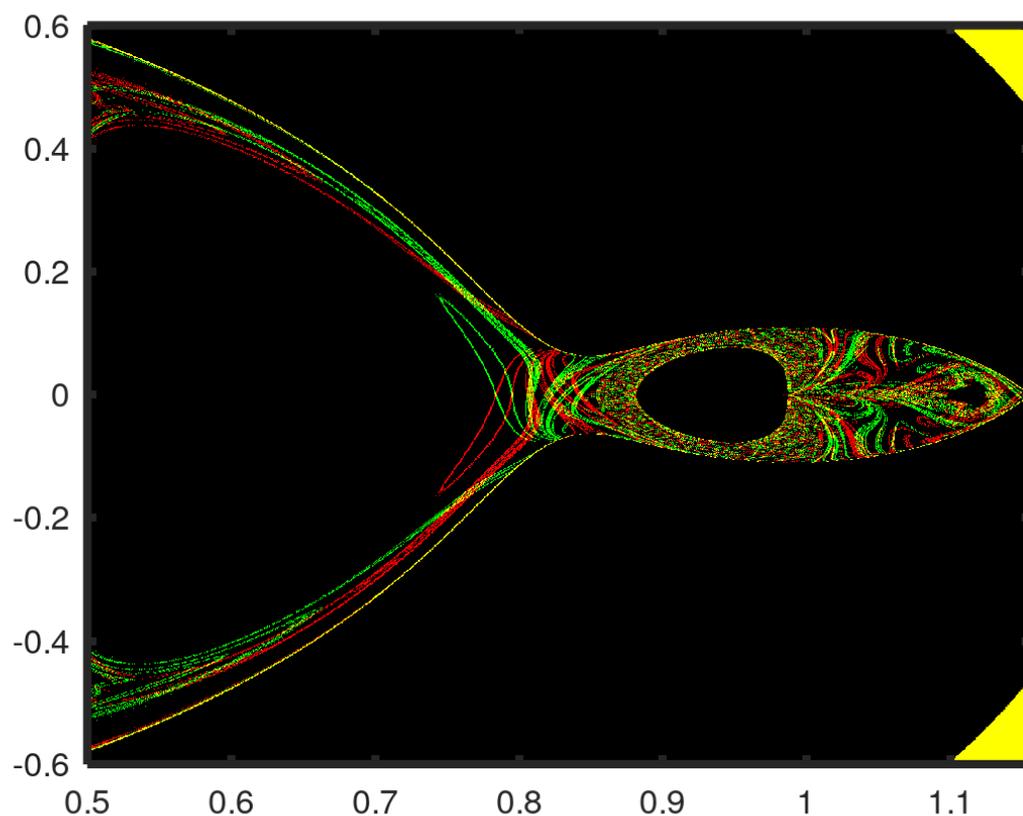


FIGURA 4.32 – Intersecção das variedades estável (*verde*) e instável (*vermelho*) para a configuração de Assis com 30 unidades de tempo, em uma grade  $1024 \times 1024$ ,  $C = 3.184164$ , no plano  $(x, y)$ , para  $\dot{x} = 0$  e  $\dot{y} > 0$ .

Por fim, pode-se dizer que tanto a Função- $M$  como a Função- $\hat{M}$  são ferramentas bem promissoras para a identificação de estruturas lagrangianas, destacando-se pelos fatos de maior simplicidade na implementação, menor tempo computacional necessário para cálculo, como também apresenta menos indicativos de falsas estruturas. Por outro lado o FTLE possui limitações em sua definição apresentados por Haller (2011), Farazmand Haller(2012), Rempel *et al.* (2013) entre outros, sendo que a separatriz no campo do FTLE podem indicar a presença de cisalhamento ou mesmo nenhuma estrutura lagrangiana. Desse modo buscam-se métodos para aprimorar a ferramenta do FTLE, e.g. apresentado por Pérez-Palau *et al.* (2015). E, ainda assim essas separatrizes no campo do FTLE vem sendo empregadas extensivamente como uma aproximação razoável das verdadeiras LCS do fluxo.

## 5 Conclusão

Neste trabalho realizou-se uma análise quantitativa de ferramentas para a detecção de variedades hiperbólicas, também chamadas de Estruturas Coerentes Lagrangianas, para o Problema Restrito de Três Corpos no caso Circular Planar, no qual os Primários estão fixos em relação a um referencial girante baricêntrico. Fez-se o uso de ferramentas já bem estabelecidas do campo da Física para a detecção dessas variedades, tais como o Expoente de Lyapunov de Tempo-Finito, que busca calcular a taxa de afastamento ou aproximação entre duas trajetórias, sendo que superfícies com máximos locais do valor dessa taxa indicam a presença de variedades. Contudo, como foi apresentado no decorrer deste trabalho, apesar do Expoente de Lyapunov de Tempo-Finito ser uma ferramenta muito empregada em vários campos da ciência, como em mecânica dos fluidos e astrodinâmica, o mesmo apresenta estruturas que não estão unicamente associadas às variedades hiperbólicas do sistema, indicando assim estruturas que estão associadas a trajetórias que se aproximam do centro dos primários (i.e., que seriam assim falsos indicativos de variedades hiperbólicas).

Em nossa abordagem, assim como no modelo original, consideramos os primários como massas pontuais, o que produziu um grande número de condições iniciais com trajetórias que passam próximas aos primários. Em particular, as trajetórias que se aproximam muito de um dos primários, apresentam variações abruptas e elevadas de velocidade, tornando a velocidade uma variável dominante ao se calcular comprimentos de arco associados a trajetórias no espaço de fases. Além disso, o uso dos primários como massa pontual proporciona altos valores associados ao FTLE, que condizem com os falso indicativos de LCS. Por outro lado, o cálculo do comprimento de arco por meio da Função- $M$  (norma euclidiana) e sua variação a Função- $\hat{M}$  apresentaram-se como bons candidatos para substituição do FTLE, evidenciando bem as regiões que possuem comportamentos diferentes uma da outra, não apresentando nenhuma estrutura que pudesse ser considerada como falso indicativo. O comprimento de arco mostrou-se um melhor indicador para as variedades estáveis e instáveis, conforme apresentado nas Figuras 4.24, 4.26 e 4.30 quando comparadas com as Figuras 4.11, 4.12, 4.15 e 4.16.

Além desses aspectos, outro ponto importante é a demanda computacional. Ao considerar os mesmos conjuntos de condições iniciais distribuídas sobre uma grade de

$1024 \times 1024$ , e para um mesmo intervalo de tempo, foi possível notar que o cálculo de comprimento de arco, sendo com a Função-M ou com  $\hat{M}$ , é muitíssimo mais rápido do que comparado ao FTLE. Pode-se citar como exemplo, a Figura 4.12 (c) que necessitou de um tempo computacional de 2700 minutos, o que corresponde a 45 horas. Diferentemente das Figuras 4.24 (c) e 4.25 (c), que calcularam o campo em 766 minutos, ou aproximadamente 12 horas e 46 minutos. Monitorou-se o tempo de execução de todas as figuras produzidas neste trabalho com o comando *time* diretamente no terminal do *Linux*, e pode perceber que a Função-M, bem como  $\hat{M}$ , é ao menos 3 vezes mais rápida em sua execução do que o FTLE. Vale ressaltar que não encontramos nenhum outro trabalho na literatura que fizesse uso da Função-M ou  $\hat{M}$  para a detecção de variedades no problema de três corpos.

Uma das possibilidades de extensão do presente trabalho é a investigação de métodos de extração dos contornos do gradiente dos campos do FTLE, Função-M e  $\hat{M}$  de modo a não apresentar descontinuidade. Outra possibilidade, pode ser a implementação de modelos mais realistas, de tal forma a considerar o caso do Problema de Três Corpos Espacial, i.e., tridimensional, além de introduzir outros tipos de perturbações no sistema para se entender melhor o papel das LCS em problemas de muitos corpos.

# Referências

- ALLIGOOD, K. T.; SAUER, T. D.; YORKE, J. A. **Chaos**. [S.l.]: Springer, 1996.
- ASSIS, S. C. de; TERRA, M. O. Escape dynamics and fractal basin boundaries in the planar earth–moon system. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, Springer, v. 120, n. 2, p. 105–130, 2014.
- BRANICKI, M.; MANCHO, A. M.; WIGGINS, S. A lagrangian description of transport associated with a front–eddy interaction: Application to data from the north-western mediterranean sea. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, Elsevier, v. 240, n. 3, p. 282–304, 2011.
- CÁMARA, A. de L.; MANCHO, A. M.; IDE, K.; SERRANO, E.; MECHOSO, C. R. Routes of transport across the antarctic polar vortex in the southern spring. **Journal of the atmospheric sciences**, v. 69, n. 2, p. 741–752, 2012.
- CONLEY, C. Low energy transit orbits in the restricted three-body problems. **SIAM Journal on Applied Mathematics**, SIAM, v. 16, n. 4, p. 732–746, 1968.
- CONLEY, C. Low energy transit orbits in the restricted three-body problems. **Journal of Differential Equations**, v. 5, p. 136–158, 1969.
- FARAZMAND, M.; HALLER, G. Computing lagrangian coherent structures from their variational theory. **Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science**, American Institute of Physics, v. 22, n. 1, p. 013128, 2012.
- GARCÍA-GARRIDO, V. J. An extension of discrete lagrangian descriptors for unbounded maps. **International Journal of Bifurcation and Chaos**, World Scientific, v. 30, n. 05, p. 2030012, 2020.
- GAWLIK, E. S.; MARSDEN, J. E.; TOIT, P. C. D.; CAMPAGNOLA, S. Lagrangian coherent structures in the planar elliptic restricted three-body problem. **Celestial mechanics and dynamical astronomy**, Springer, v. 103, n. 3, p. 227–249, 2009.
- HALLER, G. A variational theory of hyperbolic lagrangian coherent structures. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, Elsevier, v. 240, n. 7, p. 574–598, 2011.
- HALLER, G.; YUAN, G. Lagrangian coherent structures and mixing in two-dimensional turbulence. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, Elsevier, v. 147, n. 3-4, p. 352–370, 2000.
- JWST, J. W. S. T. **Animation: The James Webb Space Telescope’s Orbit**. [S.l.]: <https://youtu.be/6cUe4oMk69E>, 2021.

- KOON, W. S.; LO, M. W.; MARSDEN, J. E.; ROSS, S. D. Heteroclinic connections between periodic orbits and resonance transitions in celestial mechanics. **Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science**, American Institute of Physics, v. 10, n. 2, p. 427–469, 2000.
- KOON, W. S.; LO, M. W.; MARSDEN, J. E.; ROSS, S. D. **Dynamical systems, the three-body problem and space mission design**. [S.l.]: Springer-Verlag, 2011.
- LEKIEN, F.; LEONARD, N. Dynamically consistent lagrangian coherent structures. *In*: AMERICAN INSTITUTE OF PHYSICS. **AIP Conference Proceedings**. **Proceedings** [...]. [S.l.: s.n.], 2004. v. 742, n. 1, p. 132–139.
- MADRID, J. J.; MANCHO, A. M. Distinguished trajectories in time dependent vector fields. **Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science**, American Institute of Physics, v. 19, n. 1, p. 013111, 2009.
- MENDOZA, C.; MANCHO, A. M. Hidden geometry of ocean flows. **Physical review letters**, APS, v. 105, n. 3, p. 038501, 2010.
- MENDOZA, C.; MANCHO, A. M.; RIO, M.-H. The turnstile mechanism across the kuroshio current: analysis of dynamics in altimeter velocity fields. **Nonlinear Processes in Geophysics**, Copernicus GmbH, v. 17, n. 2, p. 103–111, 2010.
- MONTEIRO, L. H. A. **Sistemas dinâmicos**. [S.l.]: Editora Livraria da Física, 2019.
- MONTES, J.; REVUELTA, F.; BORONDO, F. Lagrangian descriptors and regular motion. **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation**, Elsevier, p. 105860, 2021.
- OTT, E. **Chaos in dynamical systems**. [S.l.]: Cambridge Univ. Press, 1993.
- PADBERG, K.; HAUFF, T.; JENKO, F.; JUNGE, O. Lagrangian structures and transport in turbulent magnetized plasmas. **New Journal of Physics**, IOP Publishing, v. 9, n. 11, p. 400, 2007.
- PENG, J.; DABIRI, J. Transport of inertial particles by lagrangian coherent structures: application to predator–prey interaction in jellyfish feeding. **Journal of Fluid Mechanics**, Cambridge University Press, v. 623, p. 75–84, 2009.
- PÉREZ-PALAU, D.; MASDEMONT, J. J.; GÓMEZ, G. Tools to detect structures in dynamical systems using jet transport. **Celestial mechanics and dynamical astronomy**, Springer, v. 123, n. 3, p. 239–262, 2015.
- QU, Q.; LIN, M.; XU, M. Lagrangian coherent structures in the planar parabolic/hyperbolic restricted three-body problem. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, Oxford University Press, v. 493, n. 2, p. 1574–1586, 2020.
- REMPEL, E. L.; CHIAN, A. C.-L.; BRANDENBURG, A.; MUÑOZ, P. R.; SHADDEN, S. C. Coherent structures and the saturation of a nonlinear dynamo. **Journal of Fluid Mechanics**, Cambridge University Press, v. 729, p. 309–329, 2013.
- SCHAUB, H.; JUNKINS, J. L. **Analytical mechanics of space systems**. [S.l.]: AIAA, 2003.

SHADDEN, S. C.; LEKIEN, F.; MARSDEN, J. E. Definition and properties of lagrangian coherent structures from finite-time lyapunov exponents in two-dimensional aperiodic flows. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, Elsevier, v. 212, n. 3-4, p. 271–304, 2005.

SOUSA-SILVA, P.; TERRA, M. O.; CERIOTTI, M. Fast earth–moon transfers with ballistic capture. **Astrophysics and Space Science**, Springer, v. 363, n. 10, p. 210, 2018.

STROGATZ, S. H. **Nonlinear dynamics and chaos with student solutions manual: With applications to physics, biology, chemistry, and engineering**. [*S.l.*]: CRC press, 2018.

SZEBEHELY, V. **Theory of Orbits**. [*S.l.*]: Academic Press, 1967.

TERRA, M.; SOUSA-SILVA, P.; ASSIS, S. Modern mission design: The fundamental theoretical framework. **Proceedings of the 8th Brazilian Conference on Dynamics, Control and Applications - DINCON 2009**, SBMAC, 2009.

## FOLHA DE REGISTRO DO DOCUMENTO

1. CLASSIFICAÇÃO/TIPO DM	2. DATA 13 de janeiro de 2022	3. DOCUMENTO Nº DCTA/ITA/DM-111/2021	4. Nº DE PÁGINAS 68
5. TÍTULO E SUBTÍTULO: Descritores Lagrangianos aplicados à Astrodinâmica: O Modelo Restrito de Três Corpos			
6. AUTOR(ES): <b>Luiz Eduardo Sivieri</b>			
7. INSTITUIÇÃO(ÕES)/ÓRGÃO(S) INTERNO(S)/DIVISÃO(ÕES): Instituto Tecnológico de Aeronáutica – ITA			
8. PALAVRAS-CHAVE SUGERIDAS PELO AUTOR: estruturas coerentes lagrangianas; problema restrito de três corpos; sistemas dinâmicos não-lineares			
9. PALAVRAS-CHAVE RESULTANTES DE INDEXAÇÃO: Problema de Três Corpos; Sistemas Dinâmicos; Mecânica Celeste; Física			
10. APRESENTAÇÃO: <span style="float: right;">(X) Nacional    ( ) Internacional</span> ITA, São José dos Campos. Curso de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Física. Área de Dinâmica Não-Linear e Sistemas Complexos. Orientador: Prof. Dr. Erico Rempel. Coorientadora: Prof <sup>a</sup> . Dr <sup>a</sup> . Maísa de Oliveira Terra. Defesa em 13/12/2021			
11. RESUMO: O principal objetivo deste trabalho é analisar ferramentas de detecção de Estruturas Coerentes Lagrangianas, buscando identificar as vantagens e desvantagens de cada uma dessas ferramentas aplicadas ao modelo dinâmico do <i>Problema Restrito de Três Corpos Circular Planar</i> . Geralmente, na literatura, o espaço de fase do problema de três corpos é estudado por meio de seções de Poincaré e bacias de escape. Vamos comparar esses resultados com os obtidos por dois descritores lagrangianos. O primeiro deles é o campo do Expoente de Lyapunov de Tempo-Finito (FTLE), uma ferramenta que já foi usada nesse contexto na literatura. O segundo descritor lagrangiano é o comprimento de arco usando a Função-M, ou sua variante, a Função- $\hat{M}$ . A investigação foi feita para a evolução temporal do sistema Terra-Lua com diferentes níveis de energia, que possibilitam canais de transporte naturais entre regiões no espaço de fase no contexto de missões espaciais. Em nossa comparação, a Função-M( $\hat{M}$ ) se mostrou mais adequada do que o FTLE nessa tarefa.			
12. GRAU DE SIGILO: <span style="display: inline-block; width: 30%; text-align: center;">(X) OSTENSIVO</span> <span style="display: inline-block; width: 30%; text-align: center;">( ) RESERVADO</span> <span style="display: inline-block; width: 30%; text-align: center;">( ) SECRETO</span>			