

Dissertação apresentada à Pró-Reitoria de Pós-Graduação do Instituto Tecnológico de Aeronáutica, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências no Programa de Pós-Graduação em Física, Área de FIS-N.

**Matheus Henrique Pavani Pacheco**

## **TEORIAS DE PERTURBAÇÃO NO ESTUDO DO DESVIO DO PERIÉLIO DE MERCÚRIO**

Dissertação aprovada em sua versão final pelos abaixo assinados:



Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Nadja Simão Magalhães

Orientadora



Prof. Dr. Rubens de Melo Marinho Junior

Coorientador

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Emília Villani

Pró-Reitora de Pós-Graduação

Campo Montenegro  
São José dos Campos, SP - Brasil  
2023

**Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)**  
**Divisão de Informação e Documentação**

Pacheco, Matheus Henrique Pavani  
Teorias de Perturbação no estudo do desvio do periélio de mercúrio / Matheus Henrique Pavani Pacheco.  
São José dos Campos, 2023.  
45f.

Dissertação de Mestrado – Curso de Física. Área de FIS-N – Instituto Tecnológico de Aeronáutica, 2023. Orientadora: Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Nadja Simão Magalhães. Coorientador: Prof. Dr. Rubens de Melo Marinho Junior.

1. Campos gravitacionais. 2. Teoria da relatividade. 3. Teoria da perturbação. 4. Mercúrio (planeta). 5. Transformada de Fourier. 6. Física nuclear. 7. Física. I. Instituto Tecnológico de Aeronáutica. II. Título.

## **REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA**

PACHECO, Matheus Henrique Pavani. **Teorias de Perturbação no estudo do desvio do periélio de mercúrio**. 2023. 45f. Dissertação de Mestrado – Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos.

## **CESSÃO DE DIREITOS**

NOME DO AUTOR: Matheus Henrique Pavani Pacheco

TÍTULO DO TRABALHO: Teorias de Perturbação no estudo do desvio do periélio de mercúrio.

TIPO DO TRABALHO/ANO: Dissertação / 2023

É concedida ao Instituto Tecnológico de Aeronáutica permissão para reproduzir cópias desta dissertação e para emprestar ou vender cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta dissertação pode ser reproduzida sem a autorização do autor.

---

Matheus Henrique Pavani Pacheco  
Rua Augusto Soares, 130 - Ap. 102B  
09608-060 – São Bernardo do Campo-SP

# TEORIAS DE PERTURBAÇÃO NO ESTUDO DO DESVIO DO PERIÉLIO DE MERCÚRIO

**Matheus Henrique Pavani Pacheco**

Composição da Banca Examinadora:

Prof. Dr.	Manuel Máximo Bastos Malheiro de Oliveira	Presidente	-	ITA
Prof <sup>a</sup> . Dr <sup>a</sup> .	Nadja Simão Magalhães	Orientadora	-	ITA
Prof. Dr.	Rubens de Melo Marinho Junior	Coorientador	-	ITA
Prof. Dr.	Pedro José Pompeia	Membro Interno	-	ITA
Prof. Dr.	Gerson Otto Ludwig	Membro Externo	-	INPE
Prof. Dr.	César Henrique Lenzi	Suplente Interno	-	ITA
Prof. Dr.	Márcio Eduardo da Silva Alves	Suplente Externo	-	UNESP

À minha esposa pelo apoio e dedicação  
nessa minha jornada de estudo e trabalho,  
sendo a minha base fundamental.

# Agradecimentos

Primeiramente, gostaria de agradecer a minha esposa pelo apoio e dedicação nessa minha jornada de estudo e trabalho.

Aos Professores da Pós-Graduação do ITA, que passaram com muita maestria, seus conhecimentos e proporcionaram disciplinas fascinantes

A Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Nadja Simão Magalhães minha orientadora, e ao Prof. Dr. Rubens de Melo Marinho Júnior pela orientação e confiança depositada na realização deste trabalho.

Aos meus amigos e colegas da Pós-Graduação, pela parceria e amizade nos momentos que mais precisei, quanto ao estudo e assuntos pessoais.

*"If I have seen farther than others,  
it is because I stood on the shoulders of giants."*

— SIR ISAAC NEWTON

# Resumo

Em Relatividade Geral, quando utilizada a aproximação por campo fraco, conseguimos determinar efeitos tais como alterações na órbita de um planeta. Uma das primeiras conquistas da própria Relatividade Geral, foi explicar o desvio anômalo do periélio de mercúrio que hoje possui valor de  $42,98''/\text{sec}$ . Para isso podemos usar as teorias de perturbação, com diferentes métodos para alcançar este resultado. Quando analisamos classicamente, é possível adicionar um termo perturbativo nas equações de movimento e comparar com a Relatividade através de uma aproximação pós newtoniana. Na perturbação realizada para determinar o desvio anômalo do periélio de Mercúrio a partir da geodésica, por exemplo, a equação de movimento é resolvida por método de aproximações sucessivas e normalmente é truncada na solução desprezando ordens superiores ou iguais a 2, porém o que considerávamos perturbação na teoria clássica, aparece naturalmente nas equações. Diante do aumento na precisão dos dados observacionais, o principal propósito desta pesquisa é investigar os valores numéricos obtidos com a precisão pelo método da propagação de erros, e comparando com outros tipos de resolução por perturbação, como usando o Vetor de Laplace-Runge-Lenz e a expansão em séries de Fourier. Além disso, existem considerações de trabalhos atuais onde se busca maiores precisões onde comparamos com os mesmos.

# Abstract

In General Relativity, when the weak field approximation is used, we can determine effects such as changes in the orbit of a planet. One of the first achievements of General Relativity itself, was to explain the anomalous deviation of the perihelion of mercury, which today has a value of  $42.98''/\text{sec}$ . For this we can use perturbation theories, with different methods to achieve this result. When we analyze classically, it is possible to add a perturbative term in the equations of motion and compare with Relativity through a post-Newtonian approximation. In the perturbation performed to determine the anomalous deviation of the perihelion of Mercury from the geodesic, for example, the equation of motion is solved by a method of successive approximations and is usually truncated in the solution disregarding orders greater than or equal to 2, but what we considered a perturbation in classical theory, appears naturally in the equations. Given the increase in the accuracy of observational data, the main purpose of this research is to investigate the numerical values obtained with the accuracy by the error propagation method, and comparing with other types of perturbation solving, such as using Laplace-Runge-Lenz Vector and Fourier series expansion. In addition, there are considerations of current work where higher accuracies are sought where we compare with them.

# Lista de Figuras

FIGURA 2.1 – Posição relativa entre Sol e mercúrio a partir do baricentro . . . . .	19
FIGURA 2.2 – O vetor LRL na órbita . . . . .	21
FIGURA 3.1 – Sonda BepiColombo lançada em 2018 . . . . .	36
FIGURA 3.2 – Divisão dos módulos . . . . .	36

## Lista de Tabelas

TABELA 3.1 – Tabela de Constantes . . . . .	34
TABELA 3.2 – Tabela de Métodos com confiança de $1\sigma$ . . . . .	35

# Lista de Abreviaturas e Siglas

GM	Gravitomagnetismo
BGM	Beyond Gravitomagnetismo
RG	Relatividade Geral

# Lista de Símbolos

$G$	Constante de Gravitação Universal
$c$	Velocidade da Luz
$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$	Símbolo de Christoffel
$M_{\odot}$	Massa do Sol

# Sumário

1	INTRODUÇÃO . . . . .	15
1.1	Objetivo . . . . .	16
1.2	Motivação . . . . .	16
1.3	Organização do trabalho . . . . .	17
2	ESTUDOS PERTURBATIVOS DO DESVIO DO PERIÉLIO . . . . .	18
2.1	O vetor de Laplace-Runge-Lenz (LRL) . . . . .	18
2.2	Método de aproximações sucessivas . . . . .	24
2.2.1	Coordenada $\theta$ ( $\alpha = 2$ ) . . . . .	25
2.2.2	Coordenada $r$ ( $\alpha = 1$ ) . . . . .	25
2.2.3	Coordenada $t$ ( $\alpha = 0$ ) . . . . .	25
2.2.4	Coordenada $\phi$ ( $\alpha = 3$ ) . . . . .	26
2.3	Séries de Fourier . . . . .	30
2.4	Gravitomagnetismo . . . . .	31
2.4.1	Gravitomagnetismo Clássico . . . . .	31
2.4.2	Beyond Gravitomagnetism (BGM) . . . . .	33
3	RESULTADOS . . . . .	34
3.1	Dados Observacionais . . . . .	34
3.2	Resultados com os diferentes Métodos . . . . .	34
3.3	Discussão dos Resultados . . . . .	35
4	CONCLUSÃO . . . . .	37
	REFERÊNCIAS . . . . .	39

---

APÊNDICE A – CÁLCULOS IMPORTANTES . . . . .	41
A.1 Incerteza para a medida do desvio do periélio (python) . . . . .	41
A.2 Método de Laplace (wxMaxima) . . . . .	42
A.3 Método de Fourier (wxMaxima) . . . . .	43
A.4 Método das aproximações Sucessivas (wxMaxima) . . . . .	44

# 1 Introdução

Desde a formulação da Relatividade Geral (RG) em 1915, diversos fenômenos da astrofísica começaram a ser preditos, ou até mesmo explicados quando levamos em consideração conhecimentos que já havíamos adquirido anteriormente com Copérnico, Kepler, Galileu e Newton.

Uma das explicações preditas, é o fato de que quando consideramos um sistema binário de dois corpos ( Sol e Mercúrio, por exemplo), onde um corpo orbita o outro, e levando em consideração que o campo gravitacional é fraco (onde métrica de Minkowski vale  $\eta_{\mu\nu} = (1, -1, -1, -1)$ ), o ponto de maior proximidade entre eles (periélio) se desloca sutilmente, e efeitos observáveis se dão após muitos séculos de órbitas completas. No caso de Mercúrio, sabemos que esse desvio teórico previsto pela RG é de, aproximadamente,  $42,98 \frac{\text{arcseg}}{\text{sec}}$ .

Uma boa maneira de enxergar como o avanço anômalo do periélio de mercúrio foi importante com a chegada da RG, é olhar para este trecho do trabalho de (MIRANDA, 2019):

Com base na bem estabelecida teoria de gravitação Newtoniana, um novo salto no estudo do sistema solar foi dado por Urbain-Jean-Joseph Le Verrier que concentrou-se no cálculo preciso das órbitas planetárias. Le Verrier previu a existência de mais um planeta no sistema solar – Netuno – encontrado posteriormente no quadrante do céu que ele, matematicamente, havia identificado.

O sucesso alcançado pela teoria Newtoniana da gravitação esbarrou na observada “anomalia” de Mercúrio. Le Verrier desenvolveu um seminal trabalho matemático, mostrando que a órbita de Mercúrio lentamente precessionava por influência do campo gravitacional do Sol e dos demais planetas em órbitas externas à Mercúrio.

Ele obteve, a partir dos seus cálculos, o valor de 526,7 segundos de arco por século, enquanto a precessão observada era de 565 segundos de arco por século. Essa diferença de 38” por século configurava-se numa “anomalia” que não podia ser explicada pela gravitação Newtoniana.

A partir do sucesso alcançado com a previsão do planeta Netuno, Le Verrier chegou a propor a existência de um novo planeta, chamado Vulcano, em órbita intermercurial. Com base nas observações do astrônomo amador Lescarbault, Le Verrier calculou a distância de Vulcano em relação ao Sol, obtendo 0,147 unidades astronômicas. O hipotético planeta possuiria período orbital de 19 dias e 17 horas.

Após diversas tentativas de observar Vulcano, a comunidade científica foi gradativamente deixando de acreditar na existência desse planeta. Simon Newcomb, em 1882, corrigiu algumas inconsistências na massa planetária e repetiu os cálculos de Le Verrier, descobrindo um deslocamento extra no periélio de Mercúrio de 43” por século. Os dados observacionais,

naquela época, mostravam que a precessão de Mercúrio era de, aproximadamente, 575” por século.

Isso abriu caminho para que Einstein introduzisse, em 1915, uma das mais belas teorias da física – a Teoria da Relatividade Geral. A força gravitacional passa a ser tratada como uma resposta à curvatura do espaçotempo, tecido que permeia todo o Universo. No mesmo artigo em que descreve a sua teoria de gravitação, Einstein mostra que a “anomalia” de 43” por século, na precessão do periélio de Mercúrio, pode ser perfeitamente explicada com base na sua teoria.

A importância de se abordar o tema do desvio do periélio, vai além dos valores matemáticos obtidos, quando levamos mais casas decimais como precisão, nos leva a entender melhor a perturbação de campo fraco e suas implicações.

## 1.1 Objetivo

O objetivo deste trabalho se concentra em comparar teorias de perturbação que resolvem (de maneiras diferentes) o quanto o periélio da órbita de Mercúrio desvia no tempo.

Lembrando que para chegar nos resultados esperados, devemos considerar o que é chamado de aproximação por campo fraco. Considerarmos que o campo gravitacional é fraco implica em podermos escrever a métrica na forma  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \epsilon h_{\mu\nu}$  onde as componentes de  $h_{\mu\nu}$  são arbitrárias mas incluímos um parâmetro de expansão  $\epsilon \ll 1$ .

## 1.2 Motivação

No artigo de (NOBILI; WILL, 1986) é possível avaliar a evolução dos resultados teóricos do desvio do periélio de Mercúrio, onde temos resultados nos anos de 1947, 1960, 1964 e 1976 onde os valores variavam entre 42,91, 43,03 até o valor final de  $42,98 \frac{\text{arcseg}}{\text{sec}}$ . Em (PARK *et al.*, 2017) é possível verificar que na página 7 os autores mostram uma tabela do desvio do periélio de mercúrio onde encontramos precisão representada em 4 casas decimais.

Posto isso, uma pergunta vem ao analisar o artigo: Se houve mudanças no valor teórico obtido (através da mudança das precisões em constantes e precisões em casas decimais), obtendo uma precisão em duas casas decimais, será que existem efeitos observáveis na órbita de mercúrio se considerarmos mudanças mais significativas? E ao vir este questionamento, veio também a ideia de construir um trabalho pautado na discussão das teorias de perturbação e confrontar os resultados e possibilidades, com um adicional de um trabalho recente de (ROCHA *et. al.*, 2021) que mostra a possibilidade de considerarmos o Beyond Gravitomagnetism para se calcular o desvio.

### 1.3 Organização do trabalho

O presente trabalho está dividido em duas etapas:

1. Apresentar os conceitos teóricos que envolvem as teorias de perturbação;
2. Mostrar resultados obtidos com ajuda do software wxMaxima.

Na primeira etapa, priorizamos os métodos de resolução por: Vetor de Laplace-Runge-Lenz, Séries de Fourier, Aproximações Sucessivas e Gravitomagnetismo, onde o objetivo é chegar na expressão do desvio do periélio, e com os dados de Mercúrio e da própria Relatividade Geral em questão e também com o auxílio da computação, cumprir a segunda etapa do trabalho.

Os resultados obtidos serão discutidos mais adiante na seção de discussão e o encerramento do trabalho se dará a partir do momento onde apresentaremos nossas conclusões.

# 2 Estudos perturbativos do desvio do periélio

O presente capítulo visa em apresentar diferentes métodos perturbativos, onde podemos confrontar de diferentes maneiras, como chegar no desvio do periélio de Mercúrio e verificar a precisão em casas decimais do mesmo.

Como última seção do capítulo, um estudo acerca do Gravitomagnetismo será apresentado para explicitar uma outra visão da RG e mais especificamente da aproximação por campo fraco.

## 2.1 O vetor de Laplace-Runge-Lenz (LRL)

O movimento de um sistema que é formado por dois corpos afetados por uma força direcionada ao longo da linha que conecta os centros dos dois corpos (isto é, uma força central) constitui um problema físico muito importante, que podemos resolver completamente.

A equação do movimento Newtoniana para dois corpos é

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (2.1)$$

onde  $\mathbf{r}$  representa a posição relativa entre dois corpos dada por

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \quad (2.2)$$

e  $\mu$  é dado por

$$\mu = \frac{k}{m_r} \quad (2.3)$$

onde  $k$  é uma constante dada por

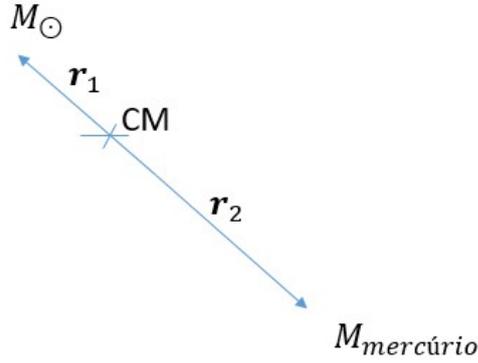


FIGURA 2.1 – Posição relativa entre Sol e mercúrio a partir do baricentro

$$k = GM_{\odot}m_{Merc} \quad (2.4)$$

e  $m_r$  é a massa reduzida dada pela equação

$$m_r = \frac{M_{\odot}m_{Merc}}{M_{\odot} + m_{Merc}} \quad (2.5)$$

sendo  $G$  a constante de gravitação,  $M_{\odot}$  a massa do Sol e  $m_{Merc}$  a massa de mercúrio. Multiplicando ambos os membros escalarmente por  $\dot{\mathbf{r}}$  temos

$$\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}} = -\mu \frac{\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \quad \therefore \quad \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 = \frac{d}{dt} \frac{\mu}{r}. \quad (2.6)$$

Disso resulta a conservação da energia total  $E_t$  pela massa reduzida  $m_r$

$$E = \frac{E_t}{m_r} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 - \frac{\mu}{r}. \quad (2.7)$$

Mas o quadrado do vetor velocidade é

$$\dot{\mathbf{r}}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2. \quad (2.8)$$

Uma vez que a energia potencial depende somente da distância da partícula da força central e não da orientação, o sistema possui simetria esférica, ou seja, a rotação do sistema em torno de qualquer eixo fixo que passa no centro da força não pode afetar as equações de movimento. Sendo assim, o momento angular  $L$  se conserva e podemos reescrever ele como um momento angular pela massa reduzida  $m_r$  dado por

$$h = \frac{L}{m_r} = r^2 \dot{\theta} \quad (2.9)$$

Substituindo na equação de energia resulta

$$E = \frac{1}{2} \left( \dot{r}^2 + \frac{h^2}{r^2} \right) - \frac{\mu}{r}. \quad (2.10)$$

Fazendo a substituição  $r = 1/u$  obtemos a equação

$$\left( \frac{du}{d\theta} \right)^2 = \frac{2E}{h^2} + \frac{2\mu u}{h^2} - u^2. \quad (2.11)$$

Derivando com relação a  $\theta$  resulta a equação de Binet:

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{\mu}{h^2}, \quad (2.12)$$

cuja solução é

$$u = \frac{1}{p} (1 + e \cos(\theta - \omega)) \quad \therefore \quad r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \omega)}, \quad (2.13)$$

com

$$p = \frac{h^2}{\mu} \quad \text{e} \quad e = \sqrt{1 + \frac{2h^2 E}{\mu^2}}, \quad (2.14)$$

onde  $p$  é o semi-latus rectum,  $e$  é a excentricidade da elipse e  $\omega$  é o argumento do periélio.

Das propriedades da elipse sabemos que

$$p = a(1 - e^2), \quad (2.15)$$

onde  $a$  é o semi-eixo maior da elipse.

Podemos obter o vetor LRL  $\mathbf{A}$  multiplicando a equação do movimento 2.1 vetorialmente à direita por  $\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$ :

$$\ddot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h} = -\mu \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{h}}{r^3}. \quad (2.16)$$

O lado esquerdo pode ser escrito como uma derivada no tempo

$$\ddot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h} = \frac{d}{dt} (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h}). \quad (2.17)$$

Do lado direito temos

$$-\mu \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{h}}{r^3} = -\mu \frac{\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}})}{r^3} = -\mu \left( \frac{\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} \mathbf{r}}{r^3} - \frac{\dot{\mathbf{r}}}{r} \right) = \mu \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{1}{r}. \quad (2.18)$$

Então, temos de (2.16):

$$\frac{d}{dt} \left( \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h} - \mu \frac{\mathbf{r}}{r} \right) = 0. \quad (2.19)$$

O derivando é definido como o vetor LRL  $\mathbf{A}$  que é constante

$$\mathbf{A} = -\mu \frac{\mathbf{r}}{r} + \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h}. \quad (2.20)$$

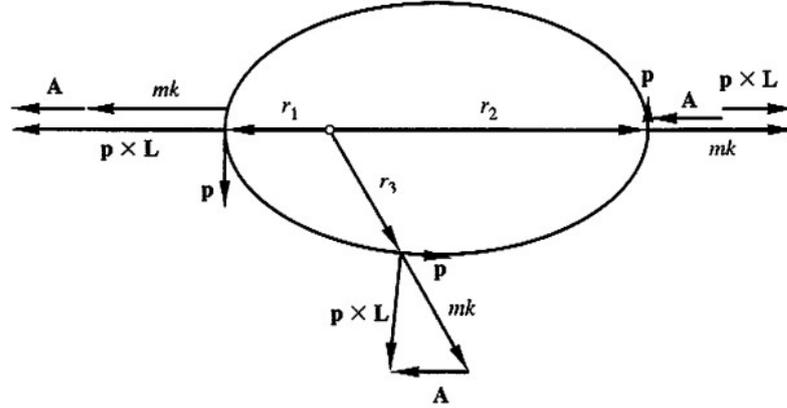


FIGURA 2.2 – O vetor LRL na órbita

Daqui também podemos obter a equação para  $r$ . De fato, multiplicando escalarmente ambos os membros por  $\mathbf{r}$

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{A} = -\mu \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}}{r} + \mathbf{r} \cdot (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h}). \quad (2.21)$$

Sendo  $\alpha$  o ângulo entre  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{A}$  temos

$$rA \cos \alpha = -\mu r + h^2. \quad (2.22)$$

Resolvendo para  $r$  vem

$$r = \frac{\frac{h^2}{\mu}}{1 + \frac{A}{\mu} \cos \alpha}, \quad (2.23)$$

donde tiramos o valor do módulo de  $A$  em função de  $e$  e  $\mu$ :

$$e = \frac{A}{\mu}. \quad (2.24)$$

Comparando com o valor de  $r$  calculado anteriormente na equação 2.13, temos que  $\alpha = \theta - \omega$ , indicando que  $\mathbf{r} \cdot \mathbf{A} = rA \cos(\theta - \omega)$ , o que, em outras palavras, significa que o vetor  $\mathbf{A}$  aponta para o periélio.

Sem perturbação, tanto o vetor  $\mathbf{A}$  quanto o vetor  $\mathbf{h}$  são constantes, mas com a presença de uma perturbação isso não acontece. O vetor  $\mathbf{A}$  vai variar no tempo e, com isso, também variará o argumento do periélio  $\omega$ . De acordo com (WEINBERG, 1972), a variação temporal do periélio é a variação temporal da componente do vetor unitário  $\hat{\mathbf{A}}$  na direção perpendicular a  $\mathbf{A}$  e a  $\mathbf{h}$ :

$$\frac{d\omega}{dt} = (\hat{\mathbf{h}} \times \hat{\mathbf{A}}) \cdot \frac{d\hat{\mathbf{A}}}{dt} = \frac{(\mathbf{h} \times \mathbf{A})}{hA^2} \cdot \frac{d\mathbf{A}}{dt}. \quad (2.25)$$

Em vez de trabalharmos com  $\frac{d\omega}{dt}$  é mais conveniente trabalharmos com  $\frac{d\omega}{d\theta}$ :

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta} \frac{h}{r^2}. \quad (2.26)$$

Assim, temos

$$\frac{d\omega}{d\theta} = \frac{\mathbf{r}^2}{h^2 A^2} (\mathbf{h} \times \mathbf{A}) \cdot \frac{d\mathbf{A}}{dt}. \quad (2.27)$$

Se tivermos uma perturbação  $\eta$  a equação do movimento 2.1 será do tipo

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \eta. \quad (2.28)$$

Derivando com relação ao tempo a expressão do vetor  $\mathbf{A}$  temos

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( -\mu \frac{\mathbf{r}}{r} + \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h} \right) = -\mu \left( \frac{\dot{\mathbf{r}}}{r} - \mathbf{r} \frac{\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}}{r^3} \right) + \ddot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h} + \dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{h}}. \quad (2.29)$$

Temos também, usando a equação do movimento, que

$$\dot{\mathbf{h}} = \frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \times \left( -\mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \eta \right) = \mathbf{r} \times \eta, \quad (2.30)$$

resultando em

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = -\mu \left( \frac{\dot{\mathbf{r}}}{r} - \mathbf{r} \frac{\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}}{r^3} \right) + \left( -\mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \eta \right) \times \mathbf{h} + \dot{\mathbf{r}} \times (\mathbf{r} \times \eta). \quad (2.31)$$

Mas

$$\frac{\mathbf{r} \times \mathbf{h}}{r^3} = \mathbf{r} \frac{\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}}{r^3} - \frac{\dot{\mathbf{r}}}{r}. \quad (2.32)$$

Finalmente temos

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \eta \times \mathbf{h} + \dot{\mathbf{r}} \times (\mathbf{r} \times \eta). \quad (2.33)$$

Para determinar  $\eta$  (BEUTLER, 2005) traz o formalismo PPN (Parametrized Post-Newtonian) que é uma versão da formulação pós-newtoniana que detalha explicitamente os parâmetros em que uma teoria geral da gravidade pode diferir da gravidade newtoniana. É usado como uma ferramenta para comparar a gravidade newtoniana e einsteiniana no limite em que o campo gravitacional é fraco e gerado por objetos que se movem lentamente em comparação com a velocidade da luz. Em geral, o formalismo PPN pode ser aplicado a todas as teorias métricas da gravitação nas quais todos os corpos satisfazem o princípio de equivalência de Einstein. A velocidade da luz permanece constante no formalismo PPN e assume que o tensor métrico é sempre simétrico.

Com essa aproximação, (BEUTLER, 2005) na equação 3.186 ele mostra a versão da equação de movimento para o problema de N-corpos ou problema de muitos corpos, que realizando algumas correções e levando em conta um problema de 2 corpos, chegamos a seguinte equação de movimento

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \frac{\mu}{c^2 r^3} \left\{ \left( \frac{4\mu}{r} - \dot{\mathbf{r}}^2 \right) \mathbf{r} + 4\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} \dot{\mathbf{r}} \right\}. \quad (2.34)$$

Comparando a equação 2.34 com a equação 2.28, o nosso  $\eta$  é

$$\eta = \frac{\mu}{c^2 r^3} \left\{ \left( \frac{4\mu}{r} - \dot{\mathbf{r}}^2 \right) \mathbf{r} + 4\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} \dot{\mathbf{r}} \right\}, \quad (2.35)$$

o que resulta em

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{\mu}{c^2 r^3} \left\{ \left( \frac{4\mu}{r} - \dot{\mathbf{r}}^2 \right) \mathbf{r} \times \mathbf{h} + 8\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h}) \right\}. \quad (2.36)$$

Para os cálculos seguintes vamos precisar dos vetores  $\mathbf{r}$  e  $\dot{\mathbf{r}}$  no referencial tendo como  $x$  a direção do periélio com vetores unitários  $\mathbf{e}_{\Pi_1}$ ,  $\mathbf{e}_{\Pi_2}$  no plano da órbita.

$$\mathbf{r} = r \cos \theta \mathbf{e}_{\Pi_1} + r \sin \theta \mathbf{e}_{\Pi_2} \quad (2.37)$$

e

$$\dot{\mathbf{r}} = \sqrt{\frac{\mu}{p}}(-\sin \theta \mathbf{e}_{\Pi_1} + (e + \cos \theta) \mathbf{e}_{\Pi_2}) \quad (2.38)$$

No próximo capítulo utilizaremos esta expressão para realizar o cálculo do desvio do periélio de Mercúrio usando este método.

## 2.2 Método de aproximações sucessivas

Nesta parte é apresentado o método de aproximações sucessivas, que é uma das possibilidades de solução do desvio do periélio de Mercúrio. Esse método faz parte das bibliografias (MOORE, 2010) e (SABBATA, 1985).

Para estudar o desvio da órbita de Mercúrio, vamos imaginar uma partícula teste se movimentando livremente em um espaço-tempo curvado por uma quantidade de matéria simetricamente esférica e estática, tal qual descrito pela métrica de Schwarzschild. Como sabemos, o movimento de uma partícula livre é descrito pela equação da geodésica:

$$\frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0 \quad (2.39)$$

onde  $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$  são os símbolos de Christoffel dados pela relação matemática

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (\partial_\mu g_{\beta\nu} + \partial_\nu g_{\beta\mu} - \partial_\beta g_{\mu\nu}), \quad (2.40)$$

e  $s$  é um comprimento de arco, ou seja, uma media da distância percorrida ao longo da geodésica.

Para perturbações fracas, a métrica de Minkowski vale  $\eta_{\mu\nu} = (1, -1, -1, -1)$ , e também estamos considerando  $c=1$ .

Estamos considerando coordenadas esféricas mais o tempo, ou seja:

$$x^0 = t, x^1 = r, x^2 = \theta, x^3 = \phi, \quad (2.41)$$

onde  $t$  é o tempo,  $r$  é o raio,  $\theta$  é o ângulo colatitude e  $\phi$  é o ângulo azimutal.

Agora precisamos calcular a Geodésica para cada coordenada, levando em conta que  $\alpha, \mu, \nu = 0, 1, 2, 3$  e que a métrica é a de Schwarzschild  $g^{\mu\nu}$  dada por

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2m}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{1 - \frac{2m}{r}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (2.42)$$

### 2.2.1 Coordenada $\theta$ ( $\alpha = 2$ )

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x^2}{ds^2} + \Gamma_{00}^2 \frac{dx^0}{ds} \frac{dx^0}{ds} + 2\Gamma_{01}^2 \frac{dx^0}{ds} \frac{dx^1}{ds} + 2\Gamma_{02}^2 \frac{dx^0}{ds} \frac{dx^2}{ds} + 2\Gamma_{03}^2 \frac{dx^0}{ds} \frac{dx^3}{ds} + \Gamma_{11}^2 \frac{dx^1}{ds} \frac{dx^1}{ds} \\ + 2\Gamma_{12}^2 \frac{dx^1}{ds} \frac{dx^2}{ds} + 2\Gamma_{13}^2 \frac{dx^1}{ds} \frac{dx^3}{ds} + \Gamma_{22}^2 \frac{dx^2}{ds} \frac{dx^2}{ds} + 2\Gamma_{23}^2 \frac{dx^2}{ds} \frac{dx^3}{ds} + \Gamma_{33}^2 \frac{dx^3}{ds} \frac{dx^3}{ds} = 0 \end{aligned} \quad (2.43)$$

Para essa coordenada, os únicos valores não nulos para os símbolos de Christoffel são  $\Gamma_{12}^2$  e  $\Gamma_{33}^2$ , logo:

$$\frac{d^2 x^2}{ds^2} + 2\Gamma_{12}^2 \frac{dx^1}{ds} \frac{dx^2}{ds} + \Gamma_{33}^2 \frac{dx^3}{ds} \frac{dx^3}{ds} = 0, \quad (2.44)$$

$$\frac{d^2 \theta}{ds^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{ds} \frac{d\theta}{ds} - \cos \theta \sin \theta \left( \frac{d\phi}{ds} \right)^2 = 0. \quad (2.45)$$

Considerando que o avanço do periélio está restrito a um plano, são fixadas as seguintes condições de contorno:

$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad (2.46)$$

e

$$\frac{d\theta}{ds} = 0. \quad (2.47)$$

### 2.2.2 Coordenada $r$ ( $\alpha = 1$ )

$$\frac{d^2 r}{ds^2} + \frac{\lambda'}{2} e^{(\lambda-\nu)} \left( \frac{dt}{ds} \right)^2 + \frac{\nu'}{2} \left( \frac{dr}{ds} \right)^2 - r e^{-\nu} \left( \frac{d\phi}{ds} \right)^2 = 0. \quad (2.48)$$

### 2.2.3 Coordenada $t$ ( $\alpha = 0$ )

$$\frac{dt}{ds} = k e^{-\lambda}. \quad (2.49)$$

onde 'k' é uma constante de integração.

### 2.2.4 Coordenada $\phi$ ( $\alpha = 3$ )

$$r^2 \frac{d\phi}{ds} = h, \quad (2.50)$$

onde  $h$  é uma constante de integração.

Para  $r$ ,  $t$  e  $\phi$  o cálculo é semelhante ao da coordenada  $\theta$ , levando em conta seus respectivos símbolos de Christoffel.

Com as geodésicas calculadas, temos que obter a equação da trajetória de uma partícula sob a ação de uma fonte gravitacional que curva o espaço-tempo de acordo com a métrica de Schwarzschild. Para tal, temos o seguinte elemento de linha:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (2.51)$$

Dividindo os dois lados por  $ds^2$  e aplicando as condições de contorno, resulta

$$1 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \frac{dt^2}{ds^2} - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 - r^2 \left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2. \quad (2.52)$$

Sabemos que  $\frac{dt}{ds} = ke^{-\lambda}$  e que o termo  $\frac{dr}{ds}$  pode ser reescrito como

$$\frac{dr}{ds} = \frac{dr}{d\phi} \frac{d\phi}{ds}. \quad (2.53)$$

Já o termo  $\frac{d\phi}{ds}$  pode ser reescrito através da geodésica da coordenada  $\phi$ :

$$\frac{d\phi}{ds} = \frac{h}{r^2}. \quad (2.54)$$

Substituindo essas relações no elemento de linha, obtemos

$$1 = k^2 \left(1 - \frac{2m}{r}\right) e^{-2\lambda} - \frac{h^2}{r^4} \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 - \left(\frac{h}{r}\right)^2. \quad (2.55)$$

Em (SABATTA, 1985) o termo  $e^\lambda$  possui o seguinte resultado:

$$e^\lambda = \left(1 - \frac{2m}{r}\right). \quad (2.56)$$

Assim,

$$k^2 - h^2 \left( \frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\phi} \right)^2 = \left( \frac{h^2}{r^2} + 1 \right) \left( 1 - \frac{2m}{r} \right), \quad (2.57)$$

$$k^2 - h^2 \left( \frac{d}{d\phi} \frac{1}{r} \right)^2 = \left( \frac{h^2}{r^2} + 1 \right) \left( 1 - \frac{2m}{r} \right). \quad (2.58)$$

Fazendo a mudança de variável  $u = \frac{1}{r}$ , resulta

$$\left( \frac{du}{d\phi} \right)^2 = \left( u^2 + \frac{1}{h^2} \right) (2mu - 1) + \frac{k^2}{h^2}. \quad (2.59)$$

Diferenciando com relação a  $\phi$ :

$$2 \frac{du}{d\phi} \frac{d^2u}{d\phi^2} = 2u \frac{du}{d\phi} (2mu - 1) + u^2 + \frac{1}{h^2} 2m \frac{du}{d\phi}, \quad (2.60)$$

onde, rearranjando a equação, obtemos finalmente

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = 3mu^2 + \frac{m}{h^2}. \quad (2.61)$$

Sabemos que sem o termo relativístico  $3mu^2$  obtemos a equação diferencial na gravitação Newtoniana:

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{m}{h^2}. \quad (2.62)$$

Para resolvermos a equação diferencial completa, utilizaremos o método de aproximações sucessivas, comumente utilizado em teorias de perturbação. Este método consiste em tomar uma solução geral como uma soma de termos sucessivos.

$$u = u^{(0)} + u^{(1)} + u^{(2)} + \dots + u^{(n)} \quad (2.63)$$

onde, para solução de  $u^{(1)}$ , utiliza-se  $u^{(0)}$ , de  $u^{(2)}$  utiliza-se  $u^{(1)}$ , seguindo sucessivamente, até a ordem em que se deseja.

Para a órbita de Mercúrio, soluções em primeira ordem normalmente são consideradas suficientes, já que quanto maior a ordem dos termos, menores se esperam que eles sejam.

Para a solução de ordem 0, tomamos:

$$\frac{d^2u^{(0)}}{d\phi^2} + u^{(0)} = \frac{m}{h^2}, \quad (2.64)$$

que é uma equação diferencial muito conhecida nas bibliografias de mecânica clássica:

trata-se da equação newtoniana da trajetória de uma partícula sob a ação de uma força central, cuja solução é

$$u^{(0)} = \frac{m}{h^2}(1 + \epsilon \cos(\phi - \phi_0)), \quad (2.65)$$

onde  $\epsilon$  representa excentricidade da elipse, dada por

$$\epsilon = \left( \frac{h^2}{r_0 m} - 1 \right), \quad (2.66)$$

e  $\phi_0$  é a posição do periélio, que fixamos em  $\phi_0 = 0$ .

Para a solução de ordem 1, tomamos:

$$\frac{d^2 u^{(1)}}{d\phi^2} + u^{(1)} = 3mu^{(0)2}, \quad (2.67)$$

$$\frac{d^2 u^{(1)}}{d\phi^2} + u^{(1)} = \frac{3m^3}{h^4}(1 + \epsilon \cos \phi)^2. \quad (2.68)$$

Como a excentricidade de mercúrio, segundo (NASA, 2020), vale 0.20563069, então (SABATTA, 1985) desconsidera os termos em segunda ordem para  $\epsilon$ , limitando a equação a

$$\frac{d^2 u^{(1)}}{d\phi^2} + u^{(1)} = \frac{6m^3}{h^4}\epsilon \cos(\phi - \phi_0) + \frac{3m^3}{h^4}. \quad (2.69)$$

Olhando para o lado direito da equação, vemos que o termo  $\frac{3m^3}{h^4}$  é suprimido pelo termo que acompanha  $\frac{6m^3}{h^4}$ , devido o fato de  $\frac{3m^3}{h^4}$  representar o mesmo termo que utilizamos para resolver  $u^{(0)}$ , e sabemos que ele na solução da equação diferencial representa a parte que descreve uma trajetória elíptica, e o que nos interessa é saber o que haverá de diferente para  $u^{(1)}$ . Portanto a equação fica da forma

$$\frac{d^2 u^{(1)}}{d\phi^2} + u^{(1)} = \frac{6m^3}{h^4}\epsilon \cos(\phi - \phi_0), \quad (2.70)$$

cuja solução é

$$u^{(1)} = \frac{3m^3}{h^4}\phi\epsilon \sin \phi. \quad (2.71)$$

Como dito anteriormente, as soluções em primeira ordem para o caso do desvio do periélio de Mercúrio, são suficientes. Assim,

$$u = u^{(0)} + u^{(1)} \implies \quad (2.72)$$

$$u = \frac{m}{h^2} \left( \frac{3m^2}{h^2} \phi \epsilon \sin \phi + 1 + \epsilon \cos \phi \right), \quad (2.73)$$

onde  $\Delta\phi = \frac{3m^2}{h^2} \phi$  veremos que representa o avanço do periélio.

O termo  $\Delta\phi \ll 1$ , como logo mostraremos, o que nos faz a chegar nas aproximações

$$\Delta\phi \sin \phi \approx \sin \Delta\phi \sin \phi, \quad (2.74)$$

$$\cos \phi \approx \cos \Delta\phi \cos \phi. \quad (2.75)$$

Assim,

$$u = \frac{m}{h^2} (\Delta\phi \epsilon \sin \phi + 1 + \epsilon \cos \phi) \quad (2.76)$$

e, finalmente, temos

$$u = \frac{m}{h^2} (\epsilon \cos(\phi - \Delta\phi) + 1). \quad (2.77)$$

Nesta equação vemos claramente que  $\Delta\phi$  é o desvio sobre o ângulo  $\phi$ . Isso é considerado o desvio do periélio.

Vamos obter agora uma expressão para o desvio do periélio de Mercúrio a partir de

$$\Delta\phi = \frac{3m^2}{h^2} \phi. \quad (2.78)$$

Para uma revolução completa, temos que  $\phi = 2\pi$ :

$$\Delta\phi = \frac{6\pi m^2}{h^2}. \quad (2.79)$$

O semi-eixo maior de uma elipse é dado por

$$a = \frac{p}{1 - \epsilon^2}, \quad (2.80)$$

onde  $L$  é o chamado “semilatus rectum” e tem como expressão

$$p = \frac{h^2}{m}. \quad (2.81)$$

Portanto, o desvio do periélio pode ser reescrito da forma

$$\Delta\phi = \frac{6\pi m^2}{h^2} = 6\pi \frac{m}{p} = \frac{6\pi GM}{c^2 a(1 - \epsilon^2)}. \quad (2.82)$$

A equação 2.77 é o resultado usual em primeira ordem para descrever a trajetória elíptica levando em conta o desvio do periélio.

No próximo capítulo trazemos o valor do desvio do periélio calculado computacionalmente.

## 2.3 Séries de Fourier

A equação diferencial para um sistema contendo uma partícula livre sujeita a uma perturbação fraca é do tipo

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{m}{h^2} + 3mu^2 \quad (2.83)$$

quando  $\eta$  é um parâmetro muito pequeno. Podemos resolver a mesma, utilizando uma expansão em série de Fourier da forma

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(k\Omega\theta) + b_k \sin(k\Omega\theta). \quad (2.84)$$

Para tal método, tomamos as seguintes condições de contorno

$$u(0) = \frac{m}{h^2}(1 + \epsilon) \quad \text{e} \quad \dot{u}(0) = 0, \quad (2.85)$$

considerando que a posição do periélio está em  $\theta = 0$ . Neste caso, os termos compreendidos pela função seno não aparecem na expansão de Fourier já que  $u(-\theta) = u(\theta)$ , limitando a série a

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(k\Omega\theta). \quad (2.86)$$

Se expandirmos  $u$  até a ordem de  $k=2$ :

$$u = a_2 \cos 2\Omega\theta + a_1 \cos \Omega\theta + a_0 \quad (2.87)$$

Para encontrar  $a_0$ ,  $a_1$  e  $a_2$  basta substituir a equação 2.87 na equação diferencial 2.83 o que resulta em

$$\begin{aligned}
& -4a_2\Omega^2 \cos(2\Omega\theta) + a_2 \cos(2\Omega\theta) - a_1\Omega^2 \cos(\Omega\theta) + a_1 \cos(\Omega\theta) + a_0 \\
= & 3a_2^2 m \cos(2\Omega\theta)^2 + 6a_1 a_2 m \cos(\Omega\theta) \cos(2\Omega\theta) + 6a_0 a_2 m \cos(2\Omega\theta) + \\
& + 3a_1^2 m \cos(\Omega\theta)^2 + 6a_0 a_1 m \cos(\Omega\theta) + \frac{m}{h^2} + 3a_0^2. \quad (2.88)
\end{aligned}$$

Se integrarmos a equação 2.88 de 0 até  $\frac{2\pi}{\Omega}$  obtemos uma equação para  $a_0$ . Se multiplicarmos a equação 2.88 por  $\cos \Omega\theta$  e a integrarmos novamente de 0 até  $\frac{2\pi}{\Omega}$ , obtemos uma equação para  $a_1$ . E por fim, se multiplicarmos a equação 2.88 por  $\cos 2\Omega\theta$  e a integrarmos novamente de 0 até  $\frac{2\pi}{\Omega}$ , obtemos uma equação para  $a_2$ .

Utilizando a primeira condição de contorno da equação 2.85 e as equações para os coeficientes de Fourier  $a_0$ ,  $a_1$  e  $a_2$  é possível encontrar os valores dos próprios coeficientes e também de  $\Omega$ .

A partir desse ponto, no próximo capítulo, utilizaremos os cálculos realizados via o software *wxMaxima* para verificar o método no problema do periélio de Mercúrio. O método que foi utilizado no programa para determinar os valores de  $a_0$ ,  $a_1, a_2$  e  $\Omega$  foi o método de Newton-Raphson.

## 2.4 Gravitomagnetismo

### 2.4.1 Gravitomagnetismo Clássico

Nesta seção, o intuito é explicar, a partir do conceito de gravitomagnetismo (GM) clássico e do “beyond-GM”, o desvio do periélio de Mercúrio.

A Teoria da Relatividade de Einstein (GR) prevê, em um movimento lento (velocidade linear da fonte) e na aproximação de campo fraco, que um corpo massivo girando lentamente (portanto, com momento angular) induz uma pequena perturbação no movimento de uma partícula que o orbita. Basicamente, a analogia entre o campo magnético gerado pelo movimento de carga e um assim chamado campo gravitacional do “tipo magnético”, gerado por uma massa em movimento, foi considerado por muitos autores (MASHHOON, 2008)

O gravitomagnetismo (GM) é um fenômeno que consiste na interação gravitacional causada pelo movimento de rotação da fonte, da mesma forma que os efeitos magnéticos são gerados do movimento de carga elétrica. A equação de GM foi obtida por Joseph Lense e Hans Thirring em 1918 quando estudaram soluções de equações de campo de Einstein usando o campo fraco e aproximação em movimentos lentos de sistemas rotativos.

Eles notaram que quando um corpo se move em torno de um objeto massivo em rotação, ele percorre uma órbita em movimento análogo ao de uma partícula carregada movendo-se próxima de uma carga em rotação. As equações que descrevem a órbita que eles obtiveram foram análogas às equações do eletromagnetismo de Maxwell, agora conhecidas como equações de Maxwell para GM.

Segundo (ROCHA *et al.*, 2021), Para o GM clássico, temos as seguintes equações:

$$\nabla \cdot E = -4\pi G \rho_m, \quad (2.89)$$

$$\nabla \times B = -\frac{4\pi G}{c} J_m + \frac{\partial E}{\partial t}, \quad (2.90)$$

$$\nabla \cdot B = 0, \quad (2.91)$$

$$\nabla \times E + \frac{\partial B}{\partial t} = 0, \quad (2.92)$$

onde  $E$  é o campo gravitoelétrico,  $B$  é o campo gravitomagnético,  $\rho_m$  é a densidade de massa e  $J_m$  é a densidade de corrente de massa.

Quando um planeta, estrela, buraco negro ou algo massivo gira, altera o espaço-tempo ao seu redor como se o arrastasse, numa ação que é chamada em inglês de “frame dragging”. Esse efeito prevê que a rotação de um objeto deve alterar espaço e tempo, dando a um objeto nas proximidades um movimento diferente do previsto pela mecânica newtoniana.

Em (ROCHA *et al.*, 2017), eles chegam na equação para o desvio do periélio utilizando o gravitomagnetismo:

$$\Delta\theta = \frac{6\pi d m_p^2 k}{l^4}. \quad (2.93)$$

Onde  $d$  é a intensidade da energia potencial entre os dipolos,  $m_p$  é a massa do planeta,  $k$  é uma constante que vale  $GM_\odot m_p$  e  $l$  é o momento angular.

Substituindo os dados de mercúrio na expressão, os autores obtiveram:

$$\Delta\theta \approx 1,27 \times 10^{-12} \frac{''}{sec}. \quad (2.94)$$

Em comparação o valor observacional de  $42,98 \frac{''}{sec}$ , o GM clássico não explica sozinho o avanço do periélio, o que nos leva a pensar que a informação possa se perder à medida que fazemos as aproximações.

### 2.4.2 Beyond Gravitomagnetism (BGM)

Por outro lado, em (ROCHA *et al.*, 2021) é discutido um outro cenário, que os autores chamaram de “Beyond gravitomagnetism”(BGM), que obtém que a métrica até a ordem  $1/c^4$  inclua um termo quadrático  $2\Phi^2/c^4$  no potencial gravitoeletrico no tempo e também métricas espaciais. Isso contrasta com a primeira aproximação pós-newtoniana, onde o termo quadrático aparece apenas na função métrica do tempo. Este termo não-linear não aparece no GM clássico, porém é essencial para atingir o resultado esperado no desvio do periélio de Mercúrio.

Quando os autores resolveram a equação da órbita de forma perturbativa a partir do elemento de linha  $ds^2$  como segue em (WEBER, 1961), obtiveram uma lagrangeana da forma:

$$L = e^\mu c^2 \dot{t}^2 - e^\nu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) \quad (2.95)$$

,

onde  $e^\mu$  e  $e^\nu$  foram obtidos no trabalho de (ROCHA *et al.*, 2021):

$$e^\mu = 1 + \frac{2\Phi}{c^2} + \frac{2\Phi^2}{c^4} \quad (2.96)$$

$$e^\nu = 1 - \frac{2\Phi}{c^2} + \frac{2\Phi^2}{c^4} \quad (2.97)$$

O fato do termo  $\frac{2\Phi^2}{c^4}$  entrar como correção nos termos exponenciais, gerou um valor no desvio do periélio de  $42,95 \frac{\text{arcseg}}{\text{sec}}$

Contudo, ao observar a equação (47) do desvio do periélio obtido pelo trabalho de (ROCHA *et al.*, 2021), vemos que ela é a mesma obtida na Relatividade Geral:

$$\Delta\phi = \frac{6\pi GM_\odot}{ac^2(1 - \epsilon^2)}. \quad (2.98)$$

## 3 Resultados

### 3.1 Dados Observacionais

Para chegarmos ao resultado, é necessário que façamos os cálculos coerentes com os dados astrofísicos mais atuais possíveis.

Para isso, utilizaremos os dados da tabela 3.1 onde se encontram também nas referências : (MERCURY, 2021), (MERCURY, 2021), (SUN, 2018), (GRAVITATIONAL, 2021) e no caso da incerteza do período, foi utilizado um programa em python para calcular .

Constantes e medidas	Valor Médio	Incerteza	Forma concisa
$G(m^3kg^{-1}s^{-1})$	$6,67430 \times 10^{-11}$	$0,00015 \times 10^{-11}$	$6,67430 \times 10^{-11}(15)$
$m_{Merc}(kg)$	$0,330103 \times 10^{24}$	$0,000021 \times 10^{24}$	$0,330103 \times 10^{24}(21)$
$M_{\odot}(kg)$	$1,98847 \times 10^{30}$	$0,00007 \times 10^{30}$	$1,9885 \times 10^{30}(7)$
$a(km)$	$57,909 \times 10^6$	$0,005 \times 10^6$	$57,909 \times 10^6(5)$
$e$	0,20563069	0,00000005	0,20563069(5)
$T(seculo)$	0,00240838	0,00000031	0,00240838(31)
$c(m/s)$	299792458	exata	299792458

TABELA 3.1 – Tabela de Constantes

### 3.2 Resultados com os diferentes Métodos

A tabela 3.2 mostra os cálculos realizados com o programa wxMaxima e python segundo as equações expressas no capítulo 2 para o desvio do periélio. Nos cálculos, foi respeitado o cálculo com algarísmos significativos segundo (VUOLO, 1996). O valor da incerteza do período orbital de mercúrio também foi obtido através de propagação de erros utilizando a linguagem python. Para o resultado obtido por aproximações sucessivas, utilizamos a linguagem python para obter a incerteza da medida com o nível de confiança de  $1\sigma$ .

Método	Equação	Resultado (arcseg/sec)
Laplace	2.38	$42,9839 \pm 0,0009$
RG (Fourier)	2.86	$42,9836 \pm 0,0007$
RG (Aproximações Sucessivas)	2.82	$42,983 \pm 0,007$
BGM (ROCHA <i>et al.</i> , 2021)	2.98	42,95
BGM (nossos dados)	2.98	$42,983 \pm 0,007$
RG(NOBILI; WILL, 1986)	Tabela 1	42,98
RG(PARK <i>et al.</i> , 2017)	Tabela 3	$42,9799 \pm 0,0009$

TABELA 3.2 – Tabela de Métodos com confiança de  $1\sigma$ 

### 3.3 Discussão dos Resultados

Através dos diferentes métodos abordados no trabalho e expostos nos resultados da tabela acima, vemos que o trabalho de (NOBILI; WILL, 1986) possuía o algoritmo duvidoso na terceira decimal.

No trabalho de (ROCHA *et al.*, 2021) é possível ver que considerando o termo de ordem  $\frac{1}{c^4}$  na métrica de Minkowski no BGM os autores obtiveram o resultado da RG. Aplicando os dados astrofísicos atualizados no resultado obtido no BGM e fazendo o cálculo computacionalmente obtivemos o valor de  $42,983 \pm 0,007 \frac{\text{arcseg}}{\text{sec}}$ , o que coincide com o método de aproximações sucessivas. Isso mostra que com os valores obtidos neste trabalho e com a equação dos autores, conseguimos melhorar o resultado numérico.

Já os métodos de Laplace, Fourier, que nós calculamos neste trabalho, ao serem executados via software e utilizando os valores astrofísicos atualizados conforme a tabela da seção 3.1, chegamos a uma precisão de 4 casas decimais onde o método de Laplace foi excedente em 0,0001 comparado com o método de Fourier.

Já em (PARK *et al.*, 2017) podemos verificar que sua tabela de resultados contidos na página 6 mostra o desvio do periélio com precisão de 4 casas decimais também no valor de  $42,9799 \pm 0,0009$  e a diferença quando comparada com nossos dados se dá pelo método utilizado pelo autor em juntar dados observacionais obtidos pela sonda MESSENGER. Já no nosso caso, fizemos o cálculo inteiramente teórico e com os dados astrofísicos atualizados.

Conforme citado em (WILL, 2018) provavelmente a missão BepiColombo possa alcançar uma precisão de  $10^{-6}$  na medida do desvio do periélio, tornando importantes esses cálculos de ordem superior.

Segundo (NASA, 2021) BepiColombo é uma missão internacional composta por duas naves espaciais que andam juntas para Mercúrio para orbitar e estudar o planeta a partir de pontos de vista únicos. A Agência Espacial Europeia (ESA) forneceu um orbitador. A Agência de Exploração Aeroespacial do Japão (JAXA) forneceu o segundo orbitador.

- A BepiColombo foi lançada em Outubro de 2018 e está programado para começar a

orbitar Mercúrio em 2025.

- O Mercury Planetary Orbiter (MPO) da ESA estudará a superfície e o interior do planeta.

- O Mercury Magnetospheric Orbiter (MIO) da JAXA irá estudar o campo magnético do planeta.

- Estas são as primeiras missões de Mercúrio para a ESA e o Japão. Apenas duas outras naves espaciais visitaram Mercúrio: A Mariner 10 e a MESSENGER da NASA.



FIGURA 3.1 – Sonda BepiColombo lançada em 2018

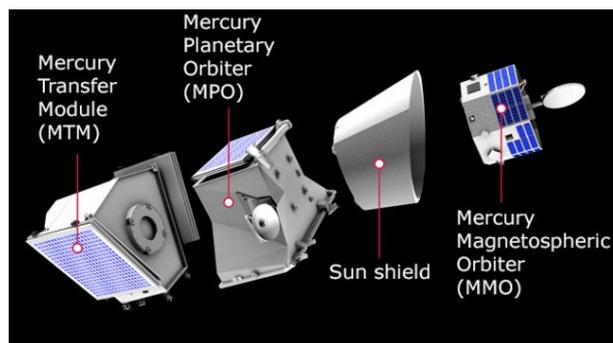


FIGURA 3.2 – Divisão dos módulos

A partir disso, é possível ver que a tecnologia em astrofísica para a coleta de dados mais precisos tornou viável obtermos resultados com mais precisão, e que isso é um assunto recente com um campo aberto para estudo teórico e prático.

## 4 Conclusão

Com os resultados obtidos entre os métodos aproximativos obtivemos valores na terceira casa decimal do desvio do periélio, o que indica um valor com uma precisão maior da que foi exposta no artigo de (NOBILI; WILL, 1986).

Os métodos aproximativos de Laplace, de Fourier e o de Aproximações Sucessivas foram executados via software e utilizando os valores astrofísicos atualizados, conforme a tabela da seção 3.1. Os métodos apresentaram os mesmos resultados na terceira casa decimal com diferença mínima na quarta casa decimal. Tal precisão só foi possível com avanço da tecnologia em astrofísica para a coleta de dados acompanhada da contribuição original deste trabalho, que foi considerar os dados astrofísicos atualizados com maior precisão levando em conta a propagação de erros, comparar os diferentes métodos perturbativos e abrir as expansões.

No trabalho de (ROCHA *et al.*, 2021) é possível ver que considerando o termo de ordem  $\frac{1}{c^4}$  na métrica de Minkowski no BGM os autores obtiveram o mesmo resultado que a própria RG já previa anteriormente. Aplicando os dados astrofísicos atualizados no resultado obtido no BGM e fazendo o cálculo computacionalmente, obtivemos o valor de  $42,983 \pm 0,007 \frac{\text{arcsec}}{\text{sec}}$ , o que coincide com o método de aproximações sucessivas. Isso mostra que com os valores obtidos neste trabalho e com a equação dos autores, conseguimos melhorar o resultado numérico.

Já em (PARK *et al.*, 2017), podemos verificar que sua tabela de resultados contidos na página 6 mostra o desvio do periélio com precisão de 4 casas decimais também no valor de  $42,9799 \pm 0,0009$  e a diferença quando comparada com nossos dados se dá pelo método utilizado pelo autor em juntar dados observacionais obtidos pela sonda MESSENGER. Já no nosso caso, fizemos o cálculo inteiramente teórico e com os dados astrofísicos atualizados.

Conforme citado em (WILL, 2018), provavelmente a missão BepiColombo possa alcançar uma precisão de  $10^{-6}$  na medida do desvio do periélio, tornando importantes esses cálculos de ordem superior.

Como possibilidade futura, será importante investigar a fundo o por que o cálculo teórico, obtido nesta dissertação com maior precisão na expansão da relatividade geral e com dados astrofísicos atualizados, não é alcançado por (PARK *et al.*, 2017), com uma

---

relevância na terceira e quarta casa decimais. Apesar de ter sido levantado métodos diferentes entre nossa dissertação e o artigo mencionado, é importante olhar as considerações teóricas com um olhar mais aprofundado.

Uma possibilidade interessante é utilizar os conceitos aqui desenvolvidos para obter resultados de maior precisão em teoria de perturbação em outros campos de aplicação, como as ondas gravitacionais.

# Referências

BEUTLER, G. **Methods of Celestial Mechanics**. 1st. ed. Berlin: Springer, 2005.

GRAVITATIONAL, S. **Heliocentric Gravitational constant**. maio 2021.

Url[https://ssd.jpl.nasa.gov/astro\\_ar.html](https://ssd.jpl.nasa.gov/astro_ar.html).

MASHHOON, B. Gravitoelectromagnetism: A brief review. **The Measurement of Gravitomagnetism: A Challenging Enterprise**, p. 1–15, abr. 2008.

MERCURY, N. **Mercury Factsheet**. maio 2021.

Url<https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/mercuryfact.html>.

MERCURY, S. **Mercury Mass**. maio 2021. Url<https://ssd.jpl.nasa.gov/>.

MIRANDA, O. D. Avanço do periélio de mercúrio – o primeiro sucesso da teoria da relatividade geral de einstein. **Conexões - Ciência e Tecnologia**, v. 13, n. 2, p. 7–20, 2019. ISSN 2176-0144. Available at:

<http://conexoes.ifce.edu.br/index.php/conexoes/article/view/1670>.

MOORE, T. A. **A General Relativity Workbook**.

*β0.92.Claremont, CA : PomonaCollege*, 2010.

NASA. **Mercury Data**. maio 2020.

Url<https://solarsystem.nasa.gov/planets/mercury/by-the-numbers/>.

NASA, S. S. **BepiColombo Mission**. out. 2021.

Url<https://solarsystem.nasa.gov/missions/bepicolombo/in-depth/>.

NOBILI, A. M.; WILL, C. M. The real value of mercury’s perihelion advance. **Nature**, v. 320, p. 39–41, mar. 1986.

PARK, R. S.; AND, A. S. K. W. M. F.; WILLIAMS, J. G.; SMITH, D. E.; ZUBER, M. T. Precession of mercury’s perihelion from ranging to the messenger spacecraft. **The Astronomical Journal**, v. 153, p. 121–127, mar. 2017.

ROCHA, F.; JR., R. M.; MALHEIRO, M. Gravitomagnetic approach for mercury perihelion advance. *In*: BIANCHI, M.; JANTZEN, R. T.; RUFFINI, R. (Ed.).

**Proceedings** [...]. Singapore: World Scientific, 2017. p. 4331–4336.

ROCHA, F.; JR., R. M.; MALHEIRO, M.; ARAÚJO, G.; LUDWIG, G. O. Beyond gravitomagnetism with applications to mercury’s perihelion advance and the bending of light. **International Journal of Modern Physics D**, v. 30, jun. 2021.

SABBATA, M. G. Venzo de. **Introduction to Gravitation**. 1st. ed. Singapore: World Scientific Publishing Co Pte Ltd., 1985.

SUN, N. **Sun Factsheet**. maio 2018.

Url <https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/sunfact.html>.

VUOLO, J. H. **Fundamentos da Teoria dos Erros**. 2nd. ed. São Paulo: Edgard Blucher LTDA., 1996.

WEBER, J. **General Relativity And Gravitational Waves**. 1st. ed. Genebra: Interscience Publishers, 1961.

WEINBERG, S. **Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General theory of relativity**. 1st. ed. United States of America: John Wiley Sons, Inc., 1972.

WILL, C. M. New general relativistic contribution to mercury's perihelion advance. **Physical Review Letters**, American Physical Society (APS), v. 120, n. 19, may 2018. Available at: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.120.191101>.

# Apêndice A - Cálculos importantes

## A.1 Incerteza para a medida do desvio do periélio (python)

```
1 # -*- coding: utf-8 -*-
2 """Incerteza.ipynb
3
4 Automatically generated by Colaboratory.
5
6 Original file is located at
7     https://colab.research.google.com/drive/1H33QOUFXBHKfQrTMP46PE3ZXShYh9h0B
8 """
9
10 from math import pi, sqrt
11
12 a = 57.909e9
13 e = 0.20563
14 c = 299792458
15 G = 6.67430e-11
16 M = 1.98847e30
17
18 s_G = 0.00015e-11
19 s_M = 0.00007e30
20 s_e = 0.00005
21 s_a = 0.005e9
22
23 T = 2*pi*sqrt((a**3)/(G*M))
24
25 print(T)
26
27 seg_day = 24*60*60
28 p_earth = 365.256
29
30 T_earth = seg_day*p_earth
31
32 t_sec = T/(T_earth*100)
33 print(t_sec) #periodo em seculos
34
```

```

35 s_t = (t_sec/2)*sqrt(9*((s_a/a)**2) + (s_G/G)**2 + (s_M/M)**2) #incerteza em s culos
36
37 s_t#incerteza em s culos
38
39 s_T = (T/2)*sqrt(9*((s_a/a)**2) + (s_G/G)**2 + (s_M/M)**2) #incerteza em segundos
40
41 #O desvio do peri lio por s culo
42 A = ((6*pi*G*M)/(T*a*(c**2)*(1-(e**2))))*((129600/pi)*15779074752)
43
44 A # Resultado
45
46 s_A = A*sqrt((s_G/G)**2 + (s_M/M)**2 + (s_a/a)**2 + ((2*e*s_e)/(1-(e**2)))**2 + (s_T/2)**2)
47
48 print(s_A) #Incerteza

```

## A.2 Método de Laplace (wxMaxima)

```

-> reset()$kill(all)$
-> load(vect);
-> vh:[0,0,h];
-> vr:[r*cos(v),r*sin(v),0];
-> vrd:sqrt(mu/p)*[-sin(v),(e+cos(v)),0];
-> vA:-mu*vr/r+express(vrd~ vh);
-> dAdt:mu/(c^2*r^3)*((4*mu/r-vrd.vrd)*express(vr~ vh)+8*vr.vrd*express(vrd~ vh));
-> dwdv:r^2/(h^2*A^2)*express(vh~ vA).dAdt,expand;
-> A:mu*e;
-> dwdv:ev(dwdv),expand;
-> r:p/(1+e*cos(v));
-> h:sqrt(mu*p);
-> dwdv:ev(dwdv),expand;
-> dwdv:ratsimp(%);
-> Delta:integrate(dwdv,v,0,2*pi);
-> Delta:Delta,rootscontract,assume(mu>0);
-> Delta:Delta,mu=G*M,p=a*(1-e^2);

```

```

-> reset()$kill(all)$
-> load(physical_constants);
-> declare_unit_conversion(Mo=19891*10^ 26*kg);
-> declare_unit_conversion(arcsec=2*%pi/(360*60*60));
-> declare_unit_conversion(century=100*year);
-> Δ:6*π*G*M/(c^ 2*a*(1-e^ 2));
-> A:Δ/T;
-> G:%G;
-> constvalue(G);
-> %,numer;
-> c:%c;
-> constvalue(c);
-> M:1'Mo;
-> M'kg;
-> a:0.3870993'AU;
-> e:0.20564;
-> T:0.2408467'year;
-> A:ev(A);
-> A:constvalue(A);
-> A'arcsec/century;

```

### A.3 Método de Fourier (wxMaxima)

```

-> reset()$kill(all)$
-> depends(u,θ);
-> assume(θ>0,Ω>0);
-> ord : 2;
-> u:sum(concat(a_,k)*cos(k*Ω*θ),k,0,ord);
-> eq0:A*(1+ε)=u,θ=0;

```

```

-> ode:diff(u,θ,2)+u=A+η*A*u^ 2;
-> ode:ode,expand;
  Achando  $a_0$ 
-> eqa0:integrate(ode,θ,0,2*π/Ω);
-> eqa0:eqa0*Ω/π,expand;
  Achando  $a_1$ 
-> eqa1:integrate(ode*cos(Ω*θ),θ,0,2*π/Ω);
-> eqa1:eqa1*Ω/π/a_1,expand;
  Achando  $a_2$ 
-> eqa2:integrate(ode*cos(2*Ω*θ),θ,0,2*π/Ω);
-> eqa2:eqa2*Ω/π,expand;
-> η:1/60;ε:8/10;A:1;
-> load(mnewton);
-> sol:mnewton([eq0,eqa0,eqa1,eqa2],[Ω,a_0,a_1,a_2],[1,1,0.1,0.01]);
-> sol:sol[1];
-> [Ω,a_0,a_1,a_2]:ev([Ω,a_0,a_1,a_2],sol);
-> u:u,sol;
-> Δ:float(2*π/Ω-2*π);
-> r:1/u;

```

#### A.4 Método das aproximações Sucessivas (wxMaxima)

```

-> reset()$kill(all)$
-> load(lrats);
-> ord:1;
-> depends(u,Θ,Θ,θ);

```

---

```

-> ode:diff(u,theta,2)+u=A+eta*A*u^ 2;
-> ode:ode,diff(Theta,theta,2)=0,diff(Theta,theta)=Omega,expand;
-> u:sum(eta^ k*concat(u_,k),k,0,ord);
-> Omega:sum(eta^ k*concat(Omega_,k),k,0,ord);
-> Omega_0:1;
-> Omega:ev(Omega);
-> for k:0 thru ord do depends(concat(u_,k),Theta);
-> ode:ode,expand,diff;
-> (ratfac:false,ratvars(eta),ratweight(eta,1),ratwtlvl:ord);
-> ode:ratexpand(ode);
-> ode0:ev(ode,eta=0);
-> sol0:ode2(ode0,u_0,Theta);
-> sol0:ic2(sol0,Theta=0,u_0=A*(1+epsilon),diff(u_0,Theta)=0);
-> ode1:coeff(ode,eta,1);
-> ode1:ode1,sol0,diff,expand;
-> ode1:trigreduce(ode1);
-> sol1:ode2(ode1,u_1,Theta),expand;
-> sol1:ic2(sol1,Theta=0,u_1=0,diff(u_1,Theta)=0),expand;
-> eqOmega1:rhs(sol1);
-> eqOmega1:coeff(eqOmega1,Theta);
-> eqOmega1:eqOmega1/A/epsilon/sin(Theta),expand;
-> solOmega1:solve(eqOmega1,Omega_1);
-> sol1:ev(sol1,solOmega1);
-> Omega:Omega,solOmega1;
-> Delta:ratsimp(2*pi/Omega-2*pi);
-> u:u,sol0,sol1,expand;

```

->  $\epsilon:8/10;A:1;\eta:1/60;$

->  $\Omega:\text{ev}(\Omega);$

->  $u:\text{ev}(u);$

->  $\Theta:\Omega*\theta;$

->  $u:\text{ev}(u);$

->  $\text{float}(\text{ev}(\Delta));$

->  $r:1/u;$

->  $\text{ratsimp}(\%);$

## FOLHA DE REGISTRO DO DOCUMENTO

1. CLASSIFICAÇÃO/TIPO <p style="text-align: center;">DM</p>	2. DATA <p style="text-align: center;">25 de janeiro de 2023</p>	3. REGISTRO N° <p style="text-align: center;">DCTA/ITA/DM-002/2023</p>	4. N° DE PÁGINAS <p style="text-align: center;">46</p>
5. TÍTULO E SUBTÍTULO: <p>Teorias de perturbação no estudo do desvio do periélio de mercúrio</p>			
6. AUTOR(ES): <p><b>Matheus Henrique Pavani Pacheco</b></p>			
7. INSTITUIÇÃO(ÕES)/ÓRGÃO(S) INTERNO(S)/DIVISÃO(ÕES): <p>Instituto Tecnológico de Aeronáutica – ITA</p>			
8. PALAVRAS-CHAVE SUGERIDAS PELO AUTOR: <p>1.Relatividade Geral. 2. Teorias de perturbação. 3.Periélio</p>			
9.PALAVRAS-CHAVE RESULTANTES DE INDEXAÇÃO: <p>Campos gravitacionais; Teoria da relatividade; Teoria da perturbação; Mercúrio (planeta); Transformada de Fourier; Física nuclear; Física.</p>			
10. APRESENTAÇÃO: <p style="text-align: right;"><input checked="" type="checkbox"/> Nacional    ( ) Internacional</p> <p>ITA, São José dos Campos. Curso de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Física. Área de Física Nuclear. Orientadora: Profª. Drª. Nadja Simão Magalhães; coorientador: Prof. Dr. Rubens de Melo Marinho Junior. Defesa em 13/01/2023. Publicada em 2023</p>			
11. RESUMO: <p>Em Relatividade Geral, quando utilizada a aproximação por campo fraco, conseguimos determinar efeitos tais como alterações na órbita de um planeta. Uma das primeiras conquistas da própria Relatividade Geral, foi explicar o desvio anômalo do periélio de mercúrio que hoje possui valor de 42,98"/sec. Para isso podemos usar as teorias de perturbação, com diferentes métodos para alcançar este resultado.Quando analisamos classicamente, é possível adicionar um termo perturbativo nas equações de movimento e comparar com a Relatividade através de uma aproximação pós newtoniana. Na perturbação realizada para determinar o desvio anômalo do periélio de Mercúrio a partir da geodésica, por exemplo, a equação de movimento é resolvida por método de aproximações sucessivas e normalmente é truncada na solução desprezando ordens superiores ou iguais a 2, porém o que considerávamos perturbação na teoria clássica, aparece naturalmente nas equações. Diante do aumento na precisão dos dados observacionais, o principal propósito desta pesquisa é investigar os valores numéricos obtidos com a precisão pelo método da propagação de erros, e comparando com outros tipos de resolução por perturbação, como usando o Vetor de Laplace-Runge-Lenz e a expansão em séries de Fourier. Além disso, existem considerações de trabalhos atuais onde se busca maiores precisões onde comparamos com os mesmos.</p>			
12. GRAU DE SIGILO: <p style="text-align: center;"><input checked="" type="checkbox"/> OSTENSIVO      ( ) RESERVADO      ( ) SECRETO</p>			