

Dissertação apresentada à Pró-Reitoria de Pós-Graduação do Instituto Tecnológico de Aeronáutica, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências no Programa de Pós-Graduação em Física, Área de Física Nuclear.

Anderson Francisco Coelho

RELATIVIDADE GERAL E TEORIAS ALTERNATIVAS APLICADAS À ASTROFÍSICA

Dissertação aprovada em sua versão final pelos abaixo assinados:



Prof. Dr. Odilon Lourenço da Silva Filho

Orientador



Prof. Dr. Pedro José Pompeia

Coorientador

Prof^ª. Dr^ª. Emília Villani

Pró-Reitor de Pós-Graduação

Campo Montenegro
São José dos Campos, SP - Brasil
2024

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
Divisão de Informação e Documentação

Coelho, Anderson Francisco
Relatividade geral e teorias alternativas aplicadas à astrofísica / Anderson Francisco Coelho.
São José dos Campos, 2024.
75f.

Dissertação de Mestrado – Curso de Física. Área de Física Nuclear – Instituto Tecnológico de Aeronáutica, 2024. Orientador: Prof. Dr. Odilon Lourenço da Silva Filho. Coorientador: Prof. Dr. Pedro José Pompeia.

1. Relatividade. 2. Estrelas de nêutrons. 3. Equações de estado. 4. Astrofísica. 5. Física Nuclear. 6. Física. I. Instituto Tecnológico de Aeronáutica. II. Título.

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

COELHO, Anderson Francisco. **Relatividade geral e teorias alternativas aplicadas à astrofísica**. 2024. 75f. Dissertação de Mestrado – Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos.

CESSÃO DE DIREITOS

NOME DO AUTOR: Anderson Francisco Coelho

TÍTULO DO TRABALHO: Relatividade geral e teorias alternativas aplicadas à astrofísica.

TIPO DO TRABALHO/ANO: Dissertação / 2024

É concedida ao Instituto Tecnológico de Aeronáutica permissão para reproduzir cópias desta dissertação e para emprestar ou vender cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta dissertação pode ser reproduzida sem a autorização do autor.



Anderson Francisco Coelho

Av. Domingos Maldonado Campoy, Ap. 503, Bl. 4
12.227-801 – São José dos Campos–SP

RELATIVIDADE GERAL E TEORIAS ALTERNATIVAS APLICADAS À ASTROFÍSICA

Anderson Francisco Coelho

Composição da Banca Examinadora:

Prof. Dr.	César Henrique Lenzi	Presidente	-	ITA
Prof. Dr.	Odilon Lourenço da Silva Filho	Orientador	-	ITA
Prof. Dr.	Pedro José Pompeia	Coorientador	-	ITA
Prof. Dr.	Franciole da Cunha Marinho	Membro Interno	-	ITA
Dr.	Sérgio José Barbosa Duarte	Membro Externo	-	CBPF

A minha namorada, Ana Beatriz, pela companhia nessa jornada, aos meus familiares por me apoiarem nesse sonho e aos amigos da Pós-Graduação do ITA pelos cafés e pelo incentivo a lutar pela ciência brasileira.

Agradecimentos

Primeiramente, a todos os meus familiares que me forneceram suporte para que esta jornada chegasse até aqui em especial meus pais Adriano e Simone. Não existem palavras capazes de expressar o sentimento de gratidão por tudo que eles fizeram por mim. Segundo, a Ana Beatriz que já é parte da minha família, e assim como todos sempre esteve ao meu lado me encorajando, me ouvindo, me incentivando e ao meu lado. Essa vitória é nossa.

Agradeço ao professor Odilon e o professor Pedro que aceitaram me orientar nesse período, graças a vocês eu pude entender o quão árduo porém gratificante é o caminho a se fazer em prol de uma pesquisa científica de excelência.

Aos professores do ITA: Brett, César, Laclan, Malheiro e Tobias que durante o mestrado cederam parte de seu tempo para nos agraciar com aulas esplendorosas e magníficas aulas em que o saber fora disseminado em formatos nunca presenciados por mim. Aos meus antigos professores de graduação: Licínio e Schmidt por terem me incentivado a seguir a carreira acadêmica.

Aos meus amigos e colegas da pós-graduação e do ITA como um todo, por todos os “rolês”, todas as histórias, todos os eventos e todas as trocas de ideias sejam aonde estivermos. Em especial: o Gabriel Coelho por estar comigo desde a graduação e me apresentar o ITA, ao Pablo pela confiança de dividirmos apartamento. Augusto, Denys, Filipe, Elisa, Estevão, Everson, Isabela, Júlio, Johnnie, Leonardo, Luan, Lucas, Natan, Renata, Pollyane pelos cafés na copa da F2-108 ou na copa da Química. Saiba que a caféina esteve presente durante todo esse processo. A Amizade e o carinho que tenho por vocês é inimaginável, obrigado por tudo.

Por fim, agradeço a CAPES pelo apoio financeiro responsável direto para realização desse trabalho e ao ITA por todo acolhimento desde o meu primeiro dia.

*“Study hard what interests you the most in the most
undisciplined, irreverent and original manner possible.”*

— RICHARD FEYNMAN

Resumo

A Relatividade Geral (RG) é o modelo vigente que corresponde a gravitação clássica desenvolvido por Albert Einstein e possui diversas aplicações astrofísicas como por exemplo as equações de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) que servem para o estudo do perfil de estrelas de nêutrons. Todavia, a RG precisa de correções com intuito de abranger mais questões acerca do Universo. Neste âmbito, a presente dissertação investiga teorias alternativas à RG, com um foco especial nas teorias $f(R)$. O estudo explora as implicações dessas teorias, tendo como foco principal na aplicação das equações TOV. O principal objeto de investigação é o modelo de Starobinsky específico dentro da classe $f(R)$. Analisamos a utilidade das equações TOV modificadas para compreender a estrutura e as propriedades físicas de objetos astrofísicos, como estrelas de nêutrons, dentro do contexto do modelo de Starobinsky. Este trabalho visa contribuir para o entendimento mais amplo das teorias $f(R)$ e a sua aplicação prática no campo da astrofísica.

Abstract

General Relativity (GR) is the current model corresponding to classical gravitation developed by Albert Einstein and has various astrophysical applications, such as the Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) equations, which are used for studying the profiles of neutron stars. However, GR requires corrections to address additional questions about the Universe. In this context, the present dissertation investigates alternative theories to GR, with a special focus on $f(R)$ theories. The study explores the implications of these theories, with a primary focus on the application of TOV equations. The main object of investigation is the specific Starobinsky model within the $f(R)$ class. We analyze the utility of modified TOV equations to understand the structure and physical properties of astrophysical objects, such as neutron stars, within the framework of the Starobinsky model. This work aims to contribute to a broader understanding of $f(R)$ theories and their practical application in the field of astrophysics.

Lista de Figuras

FIGURA 1.1 – Fluxograma do processo de resolução numérica das equações TOV. . .	18
FIGURA 1.2 – Curvas massa-raio obtidas por intermédio da solução das equações TOV para diferentes EoS. Retirado da referência (ÖZEL; FREIRE, 2016).	18
FIGURA 2.1 – Cone de luz de um observador no espaço-tempo.	23
FIGURA 2.2 – Intervalo espaço-tempo.	24
FIGURA 3.1 – Potencial de Starobinsky no <i>frame</i> de Jordan.	41
FIGURA 4.1 – Diagrama massa-raio para EoS politrópica.	51
FIGURA 4.2 – EoS obtida pela interpolação dos dados.	52
FIGURA 4.3 – Diagrama massa-raio obtido da TOV na RG via modelo RMF. . . .	53
FIGURA 4.4 – Diagrama massa-raio obtido da TOV na RG.	53
FIGURA 4.5 – Comportamento de R dentro e fora da estrela.	54
FIGURA 4.6 – Perfil de uma estrela de densidade $\rho = 2.0 \times 10^{18} kg/m^3$ na teoria $f(R)$	55
FIGURA 4.7 – Comportamento de R dentro e fora da estrela.	55
FIGURA 4.8 – Análise do perfil de uma estrela de densidade $\rho = 2.0 \times 10^{18} kg/m^3$ na teoria $f(R)$	56

Lista de Tabelas

TABELA 4.1 – Resultado da integração numérica do caso politrópico.	51
TABELA 4.2 – Resultado da integração numérica.	52
TABELA 4.3 – Resultados para $f(R)$	56

Lista de Abreviaturas e Siglas

EoS	Equação de Estado
RG	Relatividade Geral
RR	Relatividade Restrita
TOV	Tolman-Oppenheimer-Volkoff
TRG	Teoria da Relatividade Geral

Lista de Símbolos

R	Escalar de curvatura
G	Constante de gravitação universal
c	Constante de velocidade da luz
\hbar	Constante reduzida de Planck
M_{\odot}	Massa solar
M_n	Massa do nêutron
$G_{\mu\nu}$	Tensor de Einstein
$T_{\mu\nu}$	Tensor de Energia-momento
$g_{\mu\nu}$	Tensor métrico
$R_{\mu\nu}$	Tensor de Ricci
$R_{\alpha\nu\mu}^{\beta}$	Tensor de Riemann

Sumário

1	INTRODUÇÃO	15
2	RELATIVIDADE GERAL	21
2.1	Relatividade Especial	21
2.1.1	Espaço-tempo	22
2.1.2	Intervalo espaço-tempo e tempo próprio	23
2.1.3	Transformações de Lorentz	25
2.2	Construção da TRG	26
2.2.1	Princípio da equivalência	26
2.2.2	Princípio da covariância geral	26
2.3	Cálculo tensorial e geometria diferencial	26
2.4	Equações de campo	29
3	TEORIAS $f(R)$ DA GRAVIDADE	34
3.1	Equações de campo	35
3.2	Frame de Jordan	37
3.2.1	Modelo de Starobinsky	39
3.3	Estruturas estelares na teoria $f(R)$	41
4	APLICAÇÃO: EQUAÇÕES TOV	44
4.1	Desenvolvimento na Relatividade Geral	44
4.2	Desenvolvimento na Teoria $f(R)$	45
4.3	Equações de estado	48
4.4	Método numérico	48

4.5	Resultados	50
4.5.1	TOV na RG	50
4.5.2	TOV no modelo de Starobinsky	54
5	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	57
	REFERÊNCIAS	59
	APÊNDICE A – DESENVOLVIMENTO ALGÉBRICO	63
A.1	Varição do tensor de Ricci	63
A.2	Termos de Superfície	65
	APÊNDICE B – DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DE SCHWARZSCHILD E TOV	68
B.1	Unidades de Medida	68
B.2	Solução de Schwarzschild	68
B.3	TOV	72

1 Introdução

Desde os primórdios, conseguimos associar o avanço tecnológico do homem à busca do conhecimento sobre o comportamento do Universo. Podemos citar diversas épocas em que a busca pelo saber foi evidente: os povos antigos deixaram de ser nômades ao adquirirem conhecimento sobre agricultura; os povos modernos, com a invenção do *perspicillum* por Galileu Galilei, realizaram observações do cosmos, como as luas de Júpiter e as fases de Vênus, além dos terrenos montanhosos da Lua; e os contemporâneos, com a máquina construída por Charles Babbage (BRITANNICA, 2023), conseguiram realizar cálculos matemáticos complexos. Todos esses avanços têm em comum a busca por um saber que proporcione um entendimento mais profundo acerca do funcionamento do cosmos. Podemos seguir nesta linha de raciocínio e supor que as grandes descobertas da comunidade científica estejam vinculadas ao princípio da melhor compreensão do Universo, permitindo-nos investigar e, conseqüentemente, alcançar progresso científico-tecnológico, com aplicação em diversas áreas de conhecimento, desde a descoberta de vacinas para combater epidemias até a fabricação de materiais semicondutores utilizados em aparelhos eletrônicos.

A Teoria da Relatividade Geral (TRG) de Einstein, assim como suas contribuições: (EINSTEIN, 1905a), (EINSTEIN, 1905b), (EINSTEIN, 1905b) e (EINSTEIN, 1905c), foi uma ideia inovadora para a física da época. Até sua publicação em 1916 (EINSTEIN, 1916), a teoria vigente para descrever a gravidade era a proposta por Isaac Newton (NEWTON, 1687), que postulava a gravidade como uma força de ação instantânea. A TRG surgiu para solucionar problemas existentes na teoria newtoniana como, por exemplo, a órbita do planeta Mercúrio cujas observações astronômicas não eram compatíveis com a teoria. Suas ideias eram fascinantes e inovadoras para a época, pois junto com seu ensaio sobre a Relatividade Restrita (RR) trouxeram ao mundo uma nova abordagem sobre o que viria a ser o espaço e uma nova interpretação para o tempo, além de considerar a gravidade como uma manifestação da geometria do espaço e não mais como uma força.

Assim como qualquer outra teoria inovadora, a TRG também enfrentou algumas dificuldades até ser aceita pela comunidade científica. Ela precisava ser testada e comprovada, saindo do mundo do papel para ser posta à prova no mundo real. A teoria previa alguns resultados até então novos e peculiares, como o desvio para o vermelho, a precessão do

periélio de Mercúrio e a deflexão da luz pelo Sol. Ademais, ela nos apresenta a existência de objetos de extrema importância e interesse para o estudo da astrofísica, como os buracos negros.

Em 1919, a expedição de Sobral, liderada pelo astrônomo britânico Arthur Eddington, desempenhou um papel de suma importância para a comunidade científica visando testar um resultado da teoria de Einstein acerca do desvio da luz pelo Sol. Essa expedição forneceu resultados observacionais que corroboraram a TRG, tornando-se um marco na história da física e consolidando a teoria de Einstein como uma descrição precisa da gravidade em situações extremas, como no caso de campos gravitacionais intensos. Recentemente, foram divulgados resultados que reforçam ainda mais a teoria, como as imagens de campo profundo do Hubble (BORLAF, 2019) e do James Webb (TELESCOPE, 2023), a detecção de ondas gravitacionais (ABBOTT, 2019) e a primeira imagem de um buraco negro (AKIYAMA, 2019).

A astrofísica é um ramo da física e química dedicado ao entendimento dos fenômenos e funcionamento dos objetos celestes, como estrelas, planetas e galáxias que sempre despertou grande curiosidade. As pesquisas nessa área ocorrem em escalas astronômica, mas que abrangem o nível subatômico até o cosmológico, podendo ser dividida em alguns tópicos:

- **Formação e Evolução Estelar:** É a investigação dos processos que levam à formação de estrelas, como nuvens moleculares e regiões de gás e poeira, e o estudo da vida e morte das estrelas.
- **Física das Galáxias:** Análise da estrutura, dinâmica e evolução das galáxias, que são grandes sistemas compostos por estrelas, gás, poeira e possivelmente matéria escura.
- **Cosmologia:** Estudo da estrutura, origem, evolução e eventual destino do Universo como um todo. A astrofísica desempenha um papel fundamental na investigação das propriedades fundamentais do cosmos.
- **Astronomia de Partículas:** Exploração das partículas subatômicas que emanam de objetos celestes, neutrinos e partículas carregadas.
- **Exoplanetas:** Investigação de planetas que orbitam estrelas fora do nosso sistema solar. a astrofísica procura compreender as características e condições, como a habitabilidade, desses exoplanetas..
- **Astrofísica de Alta Energia:** Estudo de fenômenos astronômicos que emitem radiação eletromagnética de alta energia, como raios-X e raios gama. Alguns exemplos são buracos negros, estrelas de nêutrons e quasares.

A astrofísica frequentemente recorre a observações astronômicas, experimentos de laboratório e simulações computacionais para desenvolver modelos teóricos que visam explicar os fenômenos observados no cosmos. O avanço da tecnologia tem possibilitado descobertas notáveis e contribuído ainda mais para o nosso entendimento do cosmos podemos ter como exemplo o telescópio James Webb que é um telescópio espacial desenvolvido pela Administração Nacional da Aeronáutica e Espaço (NASA) em colaboração com a Agência Espacial Europeia (ESA) e Agência Espacial Canadense (CSA) que foi projetado para ser o sucessor do Hubble que devido a sua tecnologia pode nos fornecer dados que até então não podíamos obter (HOWELL; DOBRIJEVIC, 2023).

O estudo da relação massa-raio dentro da astrofísica é visto como um passo muito importante para que possamos buscar a melhor compreensão da estrutura e a evolução de objetos astronômicos. Tal relação é de suma importância tratando-se de estrelas e planetas, porém a mesma também se aplica a buracos negros e estrelas de nêutrons. Podemos contextualizar alguns sistemas nos quais informações de massa-raio são bem úteis:

- **Estrelas:** Essa relação está intrinsecamente ligada à sua evolução. Quando uma estrela se forma a partir de uma nuvem de gás e poeira, sua massa inicial influenciará em sua trajetória durante sua existência. Estrelas mais massivas possuem temperaturas centrais e pressões mais altas, o que leva à reações nucleares mais vigorosas e uma vida curta. Tal fenômeno implica um tamanho menor com relação a estrelas menos massivas que podem ser maiores e mais frias.
- **Buracos Negros:** A massa de um buraco negro é determinada de acordo com a quantidade de matéria nele.
- **Estrelas de Nêutrons:** São objetos extremamente densos e fascinantes, sendo a sua composição objeto de intenso estudo atualmente. Tal estudo nos permite explorar a física da matéria fortemente interagente no regime de altíssimas densidades.

Para se aprofundar em tal assunto utilizam-se de técnicas computacionais que nos permitem simular o comportamento de estrelas e obter seu perfil. Essencialmente, o estudo consiste em resolver as equações Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) (OPPENHEIMER; VOLKOFF, 1939) de forma numérica. O diagrama expresso na figura 1.1 serve como ilustração para se entender como funciona o processo de resolução das TOV.

O *input* dado para que seja possível resolver as TOV é a relação entre a pressão e a densidade de energia da matéria que compõe o objeto compacto que se deseja estudar. A depender deste objeto, tal relação pode ser dada por modelos nos quais os hádrons (mésons e bárions) são as partículas fundamentais, por modelos que têm os quarks como

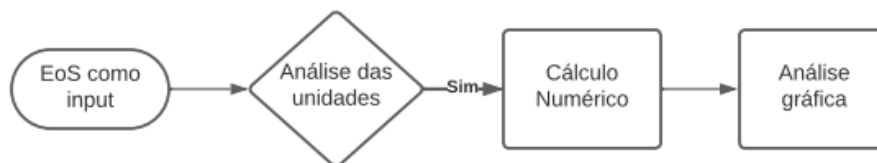


FIGURA 1.1 – Fluxograma do processo de resolução numérica das equações TOV.

graus de liberdade, ou mesmo por modelos que levem em conta hádrons e quarks na sua composição.

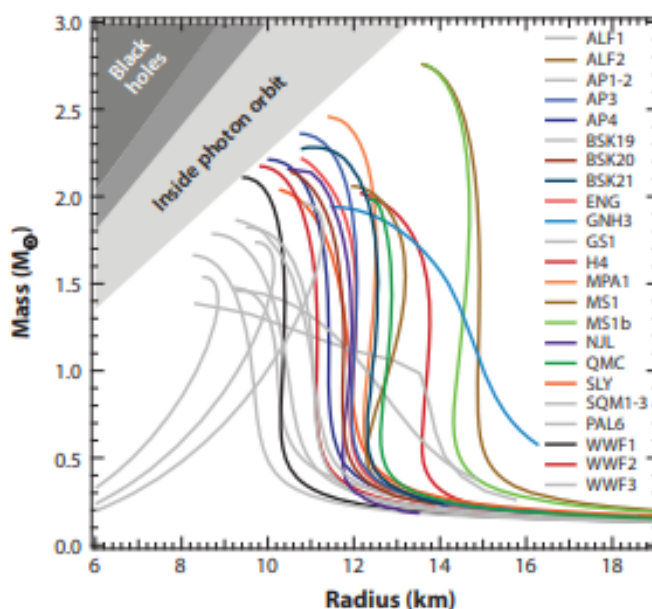


FIGURA 1.2 – Curvas massa-raio obtidas por intermédio da solução das equações TOV para diferentes EoS. Retirado da referência (ÖZEL; FREIRE, 2016).

Assim como a teoria de Newton, que durou por anos, passou por diversos processos de validação até que surgisse uma teoria que sanasse problemas deixados pela mesma como por exemplo a órbita do planeta Mercúrio, a TRG carece de alguns ajustes e conseqüentemente torna-se necessário o estudo e a formulação de teorias que sejam mais abrangentes. Nesse contexto, surgem as conhecidas teorias alternativas ou estendidas a Relatividade Geral (RG) (CAPOZZIELLO; LAURENTIS, 2011) que vem sendo amplamente estudadas nas últimas décadas. Elas consistem em uma abordagem um pouco mais ampla que a RG, algumas consideram espaços em que torção é não nula, outras abdicam da questão da metricidade entre outros tópicos diferentemente da RG. Porém, assim como a TRG fora testada e obteve resultados que são satisfatórios, essas teorias devem em certo limite retomar os resultados da RG. Podemos citar como exemplo de teorias alternativas as teorias: $f(R)$, $f(T)$ e $f(R, T)$. Que são teorias que vão além da TRG, considerando níveis maiores

com relação ao escalar de Ricci (R) e até mesmo torção (\mathcal{T}).

No presente trabalho, temos um enfoque nas teorias $f(R)$ (SOTIRIOU; FARAONI, 2010). Que consistem em modelos ajustados da RG que visam trocar a dependência do escalar de Ricci na lagrangiana da ação para uma dependência genérica $f(R)$. Assim, obtemos novas equações de campo para a teoria e conseqüentemente reinterpretações para os resultados obtidos na RG. Um exemplo de teoria $f(R)$ é o proposto por Alexei Starobinsky (STAROBINSKY, 1980), que responde questões relacionadas com o período inflacionário.

Um caso bastante interessante de se estudar e analisar dentro do quadro de teorias alternativas são as equações TOV. As equações nesse contexto tomam um diferente formato, logo, torna-se necessário seu estudo para que possamos analisar como se dão os diagramas de massa-raio de objetos nessa abordagem.

Devemos atentar que dentro da presente dissertação o objeto de estudo são estrelas de nêutrons que são remanescentes compactos de estrelas massivas que passaram por um processo de colapso gravitacional após esgotarem seu combustível nuclear. Quando uma estrela massiva esgota o combustível nuclear em seu núcleo, não há mais uma fonte de pressão para contrabalancear a gravidade. O núcleo da estrela entra em colapso rapidamente sob sua própria gravidade. Se a massa remanescente após a explosão da supernova for superior a cerca de 1,4 vezes a massa do Sol, o colapso resulta na formação de uma estrela de nêutrons. Essas estrelas são formadas durante a fase final da evolução estelar, especialmente em eventos de supernovas.

O colapso é tão intenso que os elétrons e prótons da matéria são combinados em nêutrons. O resultado é uma estrela extremamente densa e compacta composta principalmente de nêutrons. As estrelas de nêutrons têm um tamanho típico de aproximadamente 10 a 20 quilômetros de diâmetro, mas sua massa pode ser até duas vezes a massa do Sol, ou até mais. Estudar estrelas de nêutrons é fundamental para a compreensão de fenômenos astrofísicos extremos e das propriedades da matéria em condições extremas de densidade e pressão.

A dissertação está organizada no seguinte formato: no capítulo 2 será feita uma revisão sobre os conceitos principais para o desenvolvimento da RG, visto que seu papel é de suma importância para o avanço do trabalho. No capítulo 3, abordarei o desenvolvimento teórico para a construção das equações para a teoria $f(R)$ bem como o ajuste feito da mesma em um *frame* de modo a facilitar sua escrita no quesito de ordem das equações e a aplicação para um modelo específico que é o de Starobinsky. No capítulo 4, temos a aplicação astrofísica da RG e da teoria alternativa que são as equações TOV. Por fim, no capítulo 5, faremos nossas conclusões e perspectivas de aplicações futuras do estudo realizado.

O apêndice A desta dissertação apresenta o arcabouço matemático para o desenvolvi-

mento da teoria $f(R)$ e o apêndice B contém o passo a passo para se obter a solução de Schwarzschild para as equações de Einstein e o desenvolvimento das equações TOV.

2 Relatividade Geral

A teoria da Relatividade Geral, TRG, desenvolvida pelo físico teórico alemão Albert Einstein no ano de 1915 é utilizada para descrever o espaço-tempo e a gravitação. O espaço-tempo é descrito por uma variedade diferenciável M munida de um tensor métrico $g_{\mu\nu}$ e uma conexão com torção nula e compatível com a métrica. A gravidade é o resultado da curvatura da métrica, expressa por uma combinação do tensor de Ricci ($R_{\mu\nu}$) e o escalar de Ricci (R), que está associada à distribuição de matéria e energia, expressa pelo tensor $T_{\mu\nu}$, sob a variedade representada pela equação de campo de Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \quad (2.1)$$

Esta seção abordará o arcabouço matemático no qual a teoria é construída, com a derivação das equações de campo feito a partir do formalismo Lagrangiano. Antes disso, porém, é importante relembrarmos as bases da teoria da Relatividade Especial, ou restrita, abordadas a seguir.

2.1 Relatividade Especial

A teoria da relatividade Especial ou Restrita, desenvolvida por Einstein em 1905, é vista como um marco da física moderna. Tal teoria revolucionou a compreensão do espaço, tempo e movimento, introduzindo conceitos que quebraram paradigmas e serviram de base para uma nova era da física (EINSTEIN, 1905b).

Einstein propôs o *Princípio da Relatividade*, que afirma que as leis da física são as mesmas para todos os observadores inerciais, independentemente da sua velocidade relativa. Isso significa que não existe um observador privilegiado na física. Se um evento ocorre em um sistema inercial, suas leis físicas são as mesmas, seja você um observador parado ou em movimento uniforme em relação a esse sistema. Tal proposta trouxe um desafio a noção clássica de um espaço e tempo absoluto.

Outro princípio fundamental da Relatividade Especial é a *constância da velocidade da luz*. Einstein postulou que a velocidade da luz no vácuo é uma constante universal,

e que essa velocidade é a mesma para todos os observadores, independentemente de sua velocidade relativa. Isso significa que a luz viaja à mesma velocidade tanto para um observador parado quanto para um observador em movimento rápido.

2.1.1 Espaço-tempo

O espaço-tempo é uma variedade quadridimensional formada por três dimensões espaciais e uma dimensão temporal, também chamada de espaço de Minkowski. Um ponto no espaço-tempo é chamado de evento, de modo que suas coordenadas são dadas pelo quadrivetor:

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^0, x^i), \quad (2.2)$$

onde x^0 representa a coordenada temporal e x^i as coordenadas espaciais. O caminho que uma determinada partícula segue no espaço-tempo é uma curva parametrizada formada por todos os eventos que a descrevem e recebe o nome de linha de mundo. É importante ressaltar que uma partícula segue sempre para frente no tempo, enquanto é livre para se mover em todas direções no espaço.

Outro conceito dentro da relatividade é o de sistema de coordenadas inercial ou referencial inercial. Em um referencial inercial a primeira lei de Newton é válida, de modo que uma partícula neste referencial se move com velocidade constante, se não há influência de forças externas. Assim, se um referencial está em movimento retilíneo uniforme em relação a um referencial inercial então ele também é um referencial inercial, ou seja, os referenciais se movem com velocidade relativa constante entre eles.

Há uma grande diferença na forma de se enxergar o espaço e o tempo entre a teoria da relatividade especial e a newtoniana. Na mecânica newtoniana espaço e tempo são entidades separadas, e pode-se considerar que cada instante no tempo tem o seu próprio espaço de modo que não há limites para a velocidade relativa entre duas partículas. Já na relatividade especial, espaço e tempo são uma única entidade: o espaço-tempo, levando a diferentes referenciais inerciais não entrarem em consenso sobre as coordenadas x^μ de um determinado evento. É possível, porém, definir um cone de luz, expresso na figura (2.1), que determina todos os caminhos possíveis através do espaço-tempo que um raio de luz pode tomar ao passar por este evento. Sendo assim, qualquer partícula física não pode se mover mais rápido do que a luz, e sua linha de mundo sempre permanece dentro de um cone de luz.

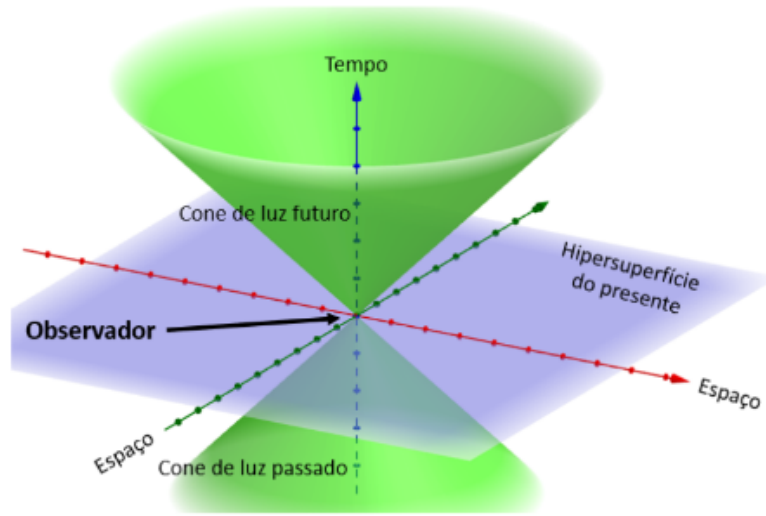


FIGURA 2.1 – Cone de luz de um observador no espaço-tempo.

2.1.2 Intervalo espaço-tempo e tempo próprio

Por mais que observadores em diferentes referenciais inerciais não concordem sobre a simultaneidade de dois eventos no espaço-tempo, ainda assim eles concordam que seu intervalo espaço-tempo é o mesmo. O intervalo espaço-tempo é uma grandeza invariante sob uma transformação de coordenadas inerciais e que descreve a separação entre dois eventos no espaço-tempo, definido por

$$(\Delta s)^2 = -(c\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 = -(c\Delta t')^2 + (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2, \quad (2.3)$$

em que c é a constante de velocidade da luz. Para simplificar os cálculos tomaremos o que é conhecido como unidades naturais, de tal modo que $c = 1$.

O espaço de Minkowski é um espaço-tempo plano que possui métrica $\eta_{\mu\nu}$, de modo que,

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.4)$$

e o elemento de linha pode ser expresso de maneira compacta como:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (2.5)$$

Nota-se que os intervalos podem assumir 3 tipos de valores: nulo, positivos e negativos.

Levando em conta dois eventos P e Q, a saber na figura 2.2, o intervalo espaço-tempo entre eles será do tipo tempo se $(\Delta s)^2 < 0$. Isto significa que o evento Q está dentro do cone de luz do evento P. O intervalo é do tipo luz se $(\Delta s)^2 = 0$, e o evento Q está na superfície do cone de luz do evento P, e é do tipo espaço se $(\Delta s)^2 > 0$, e o evento Q está fora do cone de luz do evento P. Como a velocidade da luz é a a velocidade máxima de interação entre partículas, eventos fora do cone de luz de P não possuem relação causal com este evento, enquanto eventos dentro do cone de luz estão casualmente relacionados ao evento P de alguma maneira. Os eventos dentro do cone de luz futuro de P formam seu futuro absoluto, enquanto eventos no seu cone de luz passado formam seu passado absoluto (CARROLL, 2003).

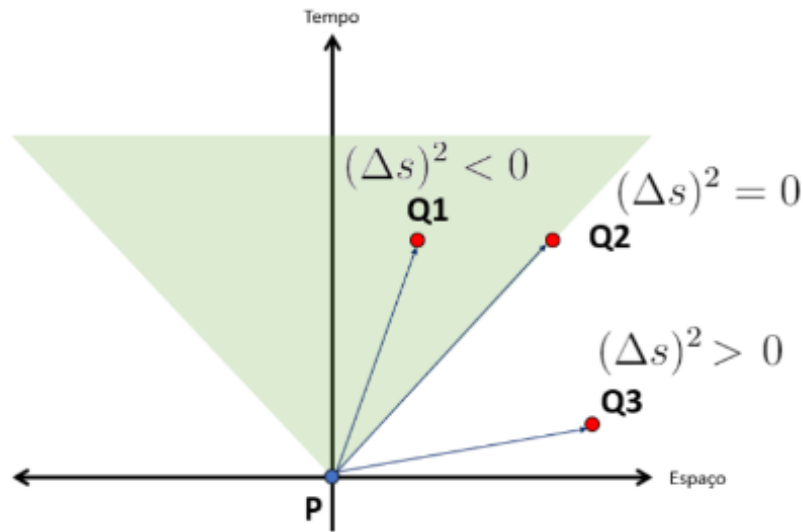


FIGURA 2.2 – Intervalo espaço-tempo.

No caso do intervalo do tipo tempo é sempre possível adotar um novo referencial inercial que esteja em repouso em relação a um determinado evento, isto é, $\Delta x'^i = 0$. Desta forma:

$$(\Delta s)^2 = -(\Delta t')^2, \quad (2.6)$$

em que $\Delta t'$ é chamado *tempo próprio*, tal que,

$$(\Delta \tau)^2 = -(\Delta s)^2. \quad (2.7)$$

O tempo próprio pode ser entendido como o tempo transcorrido entre dois eventos medidos por um observador que se move em linha reta entre eles, ou seja, os eventos compartilham as mesmas coordenadas espaciais e estão separados apenas no tempo. Com efeito, qualquer partícula física possui tempo próprio positivo, enquanto a luz possui $(\Delta \tau)^2 = 0$. O tempo próprio é o equivalente relativístico do tempo global da mecânica newtoniana assim como

o conceito de posição é substituído pela quadriposição. Já o comprimento de uma curva no espaço-tempo pode ser facilmente encontrado integrando o elemento de linha ao longo da trajetória,

$$ds = \frac{ds}{d\lambda} d\lambda = \sqrt{\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} d\lambda$$

$$S = \int \sqrt{\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} d\lambda, \quad (2.8)$$

e para caminhos do tipo tempo é apropriado utilizar o tempo próprio:

$$\tau = \int \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} d\lambda, \quad (2.9)$$

que é sempre positivo, pois $\eta_{00} = -1$. Para caminhos do tipo luz $\tau = 0$, o que implica em

$$\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0. \quad (2.10)$$

2.1.3 Transformações de Lorentz

Uma transformação de Lorentz realiza a mudança de um sistema de coordenadas inercial x^μ para um sistema igualmente inercial x'^μ tal que

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_{\nu} x^\nu. \quad (2.11)$$

Essa transformação não deixa a diferença dx^μ inalterada, pois ela também é multiplicada pela matriz Λ . Todavia o intervalo espaço-tempo é invariante sob uma transformação de coordenadas inerciais, de modo que:

$$ds^2 = \eta_{\rho\sigma} dx^\rho dx^\sigma = \eta_{\mu'\nu'} dx'^{\mu'} dx'^{\nu'}. \quad (2.12)$$

Logo,

$$\eta_{\rho\sigma} dx^\rho dx^\sigma = \eta_{\mu'\nu'} \Lambda^{\mu'}_{\rho} \Lambda^{\nu'}_{\sigma} dx^\rho dx^\sigma, \quad (2.13)$$

ou então,

$$\eta_{\rho\sigma} = \eta_{\mu'\nu'} \Lambda^{\mu'}_{\rho} \Lambda^{\nu'}_{\sigma}. \quad (2.14)$$

Todas as matrizes que satisfazem a equação (2.14) são transformações de Lorentz e constituem um grupo de simetria chamado grupo de Lorentz (NAKAHARA, 2003). As leis da eletrodinâmica são invariantes sob estas transformações, assim como a velocidade da

luz. Todavia, as leis da mecânica newtoniana, não.

Bem como o intervalo espaço-tempo, o tempo próprio também é invariante sob transformações de Lorentz

$$(d\tau)^2 = -\eta_{\rho\sigma} dx^\rho dx^\sigma = -\eta_{\rho\sigma} \Lambda^\rho{}_\mu \Lambda^\sigma{}_\nu dx^\mu dx^\nu = -\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = (d\tau')^2. \quad (2.15)$$

2.2 Construção da TRG

A formulação da equação de Einstein se baseia em alguns princípios que devem ser ressaltados, bem como nos objetos matemáticos essenciais que a compõem.

2.2.1 Princípio da equivalência

A ideia de Einstein é que era impossível a distinção entre um campo gravitacional e um sistema acelerado. A conclusão trouxe uma ideia inovadora na época. Em síntese, tal princípio nos mostrou uma igualdade, até então inovadora, entre a massa inercial (m_i) e a massa gravitacional (m_g).

2.2.2 Princípio da covariância geral

A ideia por trás desse princípio é que não existem campos vetoriais preferenciais, ou bases de campos vetoriais preferenciais pertencentes somente à estrutura da variedade que possam aparecer nas leis físicas. Em suma, as coordenadas são apenas um meio para descrever a natureza e não existem a priori, sendo assim, não tem papel ativo na formulação das leis físicas fundamentais. Dentro da RG, tal princípio estabelece que a métrica e suas derivadas são as únicas quantidades inerentes ao espaço-tempo que podem aparecer nas leis físicas.

Entendemos por esse princípio que os tensores são objetos matemáticos adequados para descreverem fenômenos físicos, visto que independem de um sistema de coordenadas. Logo, se uma equação que fora construída apenas com tensores é válida em um determinado sistema de coordenadas, então ela é válida em qualquer outro.

2.3 Cálculo tensorial e geometria diferencial

A fim de se construir a teoria precisamos levar em consideração o cálculo tensorial e a geometria diferencial, que juntos conseguem descrever a RG. De início, definimos um

invariante de suma importância que é o elemento de linha,

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.16)$$

em que $g_{\mu\nu}$, conhecido como tensor métrico ou simplesmente métrica, é um objeto covariante de dois índices que age sob uma variedade e nos fornece informações acerca da geometria de um sistema. Vale ressaltar que, a título de estudos da RG, exigimos da variedade em que estamos trabalhando que a mesma seja diferenciável.

Outro conceito de suma importância é o de derivada. Diferentemente do que ocorre quando estamos no espaço Euclidiano, em uma variedade o vetor quando paralelamente transportado pode não manter suas características, como por exemplo, de direção. Para corrigir esse problema, introduzimos um objeto chamado de conexão afim que é descrito pela seguinte expressão:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\beta = \{\beta_{\mu\nu}\} - K_{\mu\nu}^\beta + V_{\mu\nu}^\beta, \quad (2.17)$$

em que o primeiro termo é conhecido como símbolos de Christoffel, ou conexão de Levi-Civita. Já o segundo termo é denominado *tensor de contorção*, que é uma combinação da parte antissimétrica da conexão¹. O último termo é um tensor definido através das derivadas covariantes do tensor métrico.

No contexto de grande parte das teorias de gravitação, adotam-se a condição de metricidade,

$$\nabla_\mu g_{\mu\nu} = 0, \quad (2.18)$$

e neste caso, a conexão é dita compatível com a métrica. Na RG, em particular, adota-se a condição de que o espaço não possui torção, o que implica em

$$K_{\mu\nu}^\beta = 0, \quad (2.19)$$

sendo assim a conexão se reduz aos símbolos de Christoffel que são descritos pela seguinte expressão:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\beta = \frac{1}{2} g^{\beta\alpha} (\partial_\mu g_{\nu\alpha} + \partial_\nu g_{\alpha\mu} - \partial_\alpha g_{\mu\nu}) = \Gamma_{\nu\mu}^\beta. \quad (2.20)$$

Nota-se que dentro da RG, a conexão é simétrica com relação aos índices covariantes.

Por conseguinte, definimos a *derivada covariante* sobre um tensor misto A_α^β como sendo:

$$\nabla_\mu A_\alpha^\beta = \partial_\mu A_\alpha^\beta + \Gamma_{\mu\rho}^\beta A_\alpha^\rho - \Gamma_{\mu\alpha}^\gamma A_\gamma^\beta. \quad (2.21)$$

¹Qualquer objeto com índices pode ser decomposto em uma parte simétrica e uma parte antissimétrica.

O tensor de Riemann determina como o vetor A^μ varia no processo de transporte paralelo através de um caminho fechado γ definido com a integral de linha

$$\begin{aligned}\Delta A_\mu &= \oint_\gamma \delta A_\mu = \oint_\gamma \Gamma_{\alpha\mu}^\beta A_\beta dx^\alpha, \\ \oint_\gamma V_\mu dx^\mu &= \int_F df^{\mu\nu} \partial_\mu V_\nu = \frac{1}{2} \int_F df^{\mu\nu} (\partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu), \text{ onde}\end{aligned}\tag{2.22}$$

na segunda linha, vemos uma generalização quadridimensional do teorema de Stokes de um vetor V_μ . Ademais, $df^{\mu\nu} = -df^{\nu\mu}$ é o elemento infinitesimal de superfície e a integral de superfície em F tem contorno γ . Assim, a primeira equação se torna:

$$\Delta A_\mu = \frac{1}{2} \int df^{\mu\nu} [\partial_\alpha (\Gamma_{\nu\mu}^\beta A_\beta) - \partial_\nu (\Gamma_{\alpha\mu}^\beta A_\beta)].\tag{2.23}$$

Impondo o fato de que a derivada covariante seja nula, devido ao fato do transporte paralelo ser sobre geodésicas, temos que

$$\partial_\mu A_\nu = \Gamma_{\mu\nu}^\alpha A_\alpha.\tag{2.24}$$

Reescrevendo (2.23),

$$\begin{aligned}\Delta A_\mu &= \frac{1}{2} \int df^{\alpha\nu} [\partial_\alpha \Gamma_{\nu\mu}^\beta - \partial_\nu \Gamma_{\alpha\mu}^\beta + \Gamma_{\nu\mu}^\rho \Gamma_{\alpha\rho}^\beta - \Gamma_{\alpha\mu}^\rho \Gamma_{\nu\rho}^\beta] A_\beta, \\ &= \frac{1}{2} R_{\alpha\nu\mu}^\beta A_\beta \Delta f^{\alpha\nu}, \text{ no qual}\end{aligned}\tag{2.25}$$

o resultado da integral é a área $\Delta f^{\alpha\nu}$ da superfície. No resultado, fora definido o tensor de curvatura de Riemann² tal que:

$$R_{\alpha\nu\mu}^\beta = \partial_\alpha \Gamma_{\nu\mu}^\beta - \partial_\nu \Gamma_{\alpha\mu}^\beta + \Gamma_{\nu\mu}^\rho \Gamma_{\alpha\rho}^\beta - \Gamma_{\alpha\mu}^\rho \Gamma_{\nu\rho}^\beta.\tag{2.26}$$

Uma alternativa de se obter o tensor de curvatura é calculando o comutador entre duas derivadas covariantes, tal que : $\nabla_\beta \nabla_\alpha A^\mu \neq \nabla_\alpha \nabla_\beta A^\mu$.

O tensor de Riemann traz consigo algumas propriedades interessantes, são elas:

1. $R_{\mu\nu\alpha\beta} = R_{\mu\nu[\alpha\beta]}$,
2. $R_{\mu\nu\alpha\beta} = R_{[\mu\nu]\alpha\beta}$,
3. $R_{\mu\nu\alpha\beta} = R_{\alpha\beta\mu\nu}$,
4. $R_{\nu\alpha\beta}{}^\mu + R_{\alpha\beta\nu}{}^\mu + R_{\beta\nu\alpha}{}^\mu = 0$,

²Um resultado bastante prático é obtido quando o tensor de Riemann é nulo, tal resultado nos permite afirmar que o espaço no qual estamos trabalhando é plano.

$$5. \nabla_\rho R_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta} + \nabla_\mu R_{\nu\rho}{}^{\alpha\beta} + \nabla_\nu R_{\rho\mu}{}^{\alpha\beta} = 0,$$

em que a notação $[\alpha\beta]$ indica que a troca dos índices α e β é feita com um sinal de menos, ou seja, $R_{\mu\nu\alpha\beta} = R_{\mu\nu\beta\alpha}$. Ademais, podemos aferir outras duas informações bastante úteis, que são as contrações

$$R_{\mu\nu} = R_{\alpha\mu\nu}{}^\alpha = R_{\nu\mu}, \quad (2.27)$$

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = R^\mu{}_\mu, \quad (2.28)$$

que recebem o nome, respectivamente, de tensor de Ricci e escalar de curvatura.

Definidos esses elementos cruciais para a construção da teoria, o próximo passo consiste em prover as equações de campo para a RG.

2.4 Equações de campo

O formalismo lagrangiano pode ser aplicado em diversas áreas da física, desde a descrição de movimentos de partículas em sistemas clássicos ou quânticos até em sistemas astrofísicos e cosmológicos. As equações de campos da RG, assim como qualquer outra teoria de campos, podem ser obtidas do formalismo lagrangiano. A formulação da RG, via lagrangiana, fora desenvolvida por Hilbert.

De acordo com o formalismo da RG, a densidade lagrangiana deve ser um escalar sob transformações gerais de coordenadas e o elemento de volume deve ser invariante sob transformações de coordenadas. Porém, para um espaço que apresenta curvatura acontece um problema

$$d^4x' = \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| d^4x, \quad (2.29)$$

ou seja, o volume infinitesimal não é um invariante, e sim uma densidade tensorial de peso 1. Portanto, é necessário um fator multiplicativo junto da densidade para recuperar a invariância. Para tal efeito é conveniente adotar $\sqrt{-g}$, em que g é o determinante da métrica. Assim, a expressão para uma ação mais geral possui o formato:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}. \quad (2.30)$$

A título de estudo, é comum dividir a ação em dois termos. Um que leve em conta a

parte gravitacional, \mathcal{L}_g , e outro que represente a matéria, \mathcal{L}_m ,

$$\begin{aligned} S &= S_g + S_m \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} (\mathcal{L}_g + \mathcal{L}_m). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Para tratar a parte gravitacional, Hilbert propôs uma densidade lagrangiana como sendo do tipo,

$$\mathcal{L}_g = -\frac{R}{2\kappa} = -\frac{1}{2\kappa} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}, \quad (2.32)$$

em que κ é a constante de acoplamento gravitacional. Logo, se tomarmos a variação

$$\begin{aligned} \delta S_g &= \delta \left(-\frac{1}{2\kappa} \int d^4x g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x \right) \\ &= -\frac{1}{2\kappa} \int d^4x [g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \delta(\sqrt{-g}) + R_{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta(g^{\mu\nu}) + \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta(R_{\mu\nu})]. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Levando em conta o resultado:

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}, \quad (2.34)$$

temos uma expressão que se reduz a

$$\delta S_g = -\frac{1}{2\kappa} \int d^4x \left[\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} + \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta(R_{\mu\nu}) \right]. \quad (2.35)$$

Verifica-se que o terceiro termo se reduz a um divergente e pelo teorema de Gauss, esse termo se transforma em um termo de superfície que tomamos como nulo. Mais detalhes podem ser vistos (SABBATA; GASPERINI, 1985), raciocínio análogo da mecânica clássica. Então, a expressão para δS_g se reduz a

$$\delta S_g = -\frac{1}{2\kappa} \int d^4x \left[\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \right]. \quad (2.36)$$

Feito o processo da parte gravitacional, podemos trabalhar a parte de matéria, a saber,

$$\begin{aligned} \delta S_m &= \int d^4x \delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_m) \\ &= \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_m)}{\delta g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (2.37)$$

em que se define o tensor Energia-Momento como sendo

$$T_{\mu\nu} \equiv \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (2.38)$$

tensor este que é simétrico com relação a seus índices covariantes,

$$T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}.$$

A fim de se obter as equações de campo, juntam-se as expressões (2.36), (2.37) e a definição (2.38), e então aplica-se o princípio de mínima ação, ou seja, fazemos

$$\delta S = -\frac{1}{2\kappa} \int d^4x \left[\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \right) \sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu} - \kappa T_{\mu\nu}\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu} \right] = 0, \quad (2.39)$$

$$(2.40)$$

o que resulta em

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa T_{\mu\nu}. \quad (2.41)$$

Expressões que são identificadas como as equações de campo de Einstein, sem o acoplamento da constante cosmológica Λ . Dessas, podemos, facilmente, verificar o fato de que, $R = -\kappa T$, e conseqüentemente reescrever

$$R_{\mu\nu} = \kappa \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T \right). \quad (2.42)$$

Para determinar a constante κ , é necessário aguardar que as equações acima se reduzam à equação de Poisson nos limites não relativísticos e de campo gravitacional fraco,

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho. \quad (2.43)$$

Uma partícula sob a ação de um campo gravitacional descreve uma trajetória geodésica no espaço-tempo descrita por:

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = 0. \quad (2.44)$$

Considerando que no limite não relativístico a velocidade desta partícula pode ser considerada como sendo praticamente nula, a equação acima se reduz a:

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} \mu \\ 00 \end{matrix} \right\} \frac{dx^0}{ds} \frac{dx^0}{ds} \approx 0. \quad (2.45)$$

No entanto, neste limite, o elemento de linha é:

$$ds^2 \approx (cdt)^2 = (dx^0)^2, \quad (2.46)$$

assim, equação da geodésica se torna

$$\frac{d^2 x^\mu}{dt^2} = -c^2 \{\mu_{00}\}. \quad (2.47)$$

Assumindo o limite de campo gravitacional fraco a métrica se torna:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (2.48)$$

em que $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ e os termos de ordem maiores ou iguais a h^2 são desprezados. Nesse regime, se adotarmos que o campo gravitacional seja estático, temos:

$$\{\mu_{00}\} = -\frac{1}{2}\eta^{\mu j}(\partial_j h_{00}), \quad (2.49)$$

logo,

$$\frac{d^2 x^\mu}{dt^2} = -c^2 \left[-\frac{1}{2}\eta^{\mu j}(\partial_j h_{00}) \right] \rightarrow \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = -\frac{c^2}{2}\vec{\nabla}h_{00}. \quad (2.50)$$

Sabemos que a equação de movimento de Newton para uma partícula sob efeito do campo gravitacional é dada por

$$\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = -\vec{\nabla}\phi. \quad (2.51)$$

Vemos que as equações (2.50) e (2.51) se equivalem se adotarmos

$$h_{00} = \frac{2}{c^2}\phi. \quad (2.52)$$

Analisando nos limites que citamos, a componente R_{00} do tensor de Ricci se equivale a:

$$R_{00} = \frac{1}{2}\nabla^2 h_{00}. \quad (2.53)$$

Tendo em vista o tensor energia-momento nos mesmos limites podemos observar que

$$T = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu} = g^{00}T_{00} \simeq \eta^{00}T_{00} = \rho c^2. \quad (2.54)$$

Com isso, podemos determinar a constante κ olhando somente para a componente tem-

poral da equação de Einstein,

$$R_{00} = \kappa \left(T_{00} - \frac{1}{2} g_{00} T \right) \simeq \kappa \left(T_{00} - \frac{1}{2} \eta_{00} T \right) = \kappa \frac{1}{2} \rho c^2, \quad (2.55)$$

portanto,

$$\frac{1}{c^2} \nabla^2 \phi = \kappa \frac{1}{2} \rho c^2, \quad (2.56)$$

logo, para recuperarmos a equação de Poisson, podemos identificar que

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}. \quad (2.57)$$

As equações de campos podem ser encontradas na literatura de uma outra forma, a saber,

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (2.58)$$

em que se é introduzido o tensor simétrico de Einstein, dado por

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R, \quad (2.59)$$

que nada mais é que a combinação do tensor de Ricci com o escalar de curvatura.

As equações de campo de Einstein sem adição da constante Λ , embora pareçam simples, constituem um conjunto não-linear na métrica com 10 equações diferenciais parciais, que nos permite prever como o espaço-tempo se curva na presença de matéria; em curtas palavras, através da distribuição da matéria via tensor energia-momento podemos obter a métrica desse espaço. Logo, podemos identificar que a gravidade é manifestada por intermédio da curvatura na métrica no espaço-tempo, enquanto a distribuição de matéria-energia está associada ao tensor energia-momento.

As discussões e expressões obtidas nessa seção servirão mais adiante para que possamos desenvolver os cálculos dentro do contexto das teorias alternativas da gravidade.

Os resultados expressos e desenvolvidos nesse capítulo podem ser verificados nas seguintes referências: (CARROLL, 2003), (GLEDENNING, 2012), (RYDER, 2009) e (SABBATA; GASPERINI, 1985).

3 Teorias $f(R)$ da gravidade

Embora seja brilhante e possua resultados incríveis e fascinantes, como o desvio para o vermelho, a precessão do periélio de Mercúrio e a deflexão da luz pelo Sol, a teoria desenvolvida por Einstein ainda possui algumas questões em aberto:

1. **Energia escura e matéria escura:** A Relatividade Geral descreve a gravitação, mas há evidências observacionais de que a maior parte da matéria no universo é “invisível” e não consiste em átomos, conhecida como matéria escura. Além disso, a energia escura, uma forma misteriosa de energia que está acelerando a expansão do universo, é um enigma não resolvido.
2. **Buracos negros:** Embora a existência de buracos negros seja prevista pela RG, muitos conhecimentos acerca de seu comportamento estão em aberto.
3. **Unificação das teorias:** A busca por uma teoria que englobe tanto a RG, que trabalha com a gravitação, quanto a Teoria Quântica de campos que descreve o comportamento de partículas em nível subatômico, conhecida popularmente como a busca por uma Teoria Quântica de Gravitação.
4. **Ondas gravitacionais:** Embora as ondas gravitacionais tenham sido observadas e confirmadas, ainda há muito a ser aprendido sobre essas perturbações no espaço-tempo, bem como o desenvolvimento de técnicas mais sofisticadas de detecção, para que possamos testar a RG em condições mais rigorosas.
5. **Cosmologia e a origem do universo:** A RG é fundamental na cosmologia, mas questões sobre a natureza da singularidade inicial do Big Bang, a inflação cósmica e a estrutura a grande escala do universo ainda estão sendo investigadas.

Portanto, se faz necessário um estudo e elaboração de uma teoria que abranja uma parte ainda maior se não por completo acerca do universo. Nesse contexto, surgem as teorias modificadas que visam sanar os problemas que ainda prevalecem na RG.

Neste capítulo, iremos focar no desenvolvimento das equações de campo, via formalismo Lagrangeano, para uma teoria $f(R)$ da gravidade, analogamente ao que fora feito anteriormente no capítulo 2.

3.1 Equações de campo

Dentro da física teórica, quando o objetivo é estudar alguma teoria de campos, frequentemente, esbarramos nas conhecidas equações de campos, que consistem em uma série de equações diferenciais e com elas podemos determinar a dinâmica do seu sistema. As soluções para as mesmas são campos que representam a natureza (LANDAU; LIFSHITZ, 1975). Por se tratar de uma série de equações diferenciais, existem famílias de soluções cada qual representa um caso específico. Geralmente, as equações de campo são postuladas, como é o caso das Equações de Einstein e da Equação de Schrödinger, mas podem ser obtidas por intermédio de resultados experimentais. Para uma teoria ser aceita, as equações obtidas devem estar de acordo com a previsão experimental.

Para a derivação das equações de campo da teoria $f(R)$, faremos cálculos análogos aos que foram feitos anteriormente, porém, para a parte gravitacional, iremos escolher uma função genérica que dependa do escalar de curvatura, conseqüentemente, modificaremos a densidade Lagrangeana para o formato $\mathcal{L}_g = -f(R)/2\kappa$, e, portanto, temos para esse caso,

$$S_{\text{mod}} = -\frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} f(R). \quad (3.1)$$

Tomando a variação com relação à métrica, obtemos

$$\delta S_{\text{mod}} = -\frac{1}{2\kappa} \int d^4x (f(R)\delta\sqrt{-g} + \sqrt{-g}f_R\delta R), \quad (3.2)$$

em que f_R , corresponde a derivada de $f(R)$ com relação a R .

O processo consiste em utilizar a definição (2.34), já vista anteriormente, e definir o que vem a ser δR .

$$\delta R = R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}. \quad (3.3)$$

Podemos reescrever o termo $g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}$ como sendo,

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} &= g^{\mu\nu} (\nabla_\rho \delta \Gamma_{\nu\mu}^\rho - \nabla_\nu \delta \Gamma_{\rho\mu}^\rho) \\ &= \nabla_\sigma (g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\nu\mu}^\sigma - g^{\mu\sigma} \delta \Gamma_{\rho\mu}^\rho) \\ &= \nabla_\sigma (g_{\beta\gamma} \nabla^\sigma (\delta g^{\beta\gamma}) - \nabla_\gamma (\delta g^{\sigma\gamma})) \\ &= g_{\beta\gamma} \nabla_\sigma \nabla^\sigma (\delta g^{\beta\gamma}) - \nabla_\sigma \nabla_\gamma (\delta g^{\sigma\gamma}) \\ &= g_{\mu\nu} \square (\delta g^{\mu\nu}) - \nabla_\mu \nabla_\nu (\delta g^{\mu\nu}), \end{aligned} \quad (3.4)$$

em que introduzimos o operador d'Alembertiano, $\square = \nabla_\mu \nabla^\mu$, tal que,

$$\square = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} \partial^\mu), \quad (3.5)$$

os detalhes desse processo podem ser visto no apêndice A.1.

Voltando a (3.2), temos, portanto, uma expressão do tipo

$$\delta S_{\text{mod}} = -\frac{1}{2\kappa} \int d^4x \left[f(R) \delta \sqrt{-g} + \sqrt{-g} f_R (R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + g_{\mu\nu} \square (\delta g^{\mu\nu}) - \nabla_\mu \nabla_\nu (\delta g^{\mu\nu})) \right], \quad (3.6)$$

e que se acoplando o termo de matéria e reescrevendo os últimos dois termos utilizando o teorema de Gauss, detalhes podem ser vistos no apêndice A.2, temos a ação total modificada que é reduzida a

$$\delta S_{\text{Tmod}} = -\frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} \left(f_R R_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} \square f_R - \nabla_\mu \nabla_\nu f_R - \frac{1}{2} f(R) g_{\mu\nu} - \kappa T_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu}. \quad (3.7)$$

Aplicando o princípio de mínima ação, chega-se às equações de campo para uma teoria $f(R)$ da gravidade,

$$f_R R_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} \square f_R - \nabla_\mu \nabla_\nu f_R - \frac{1}{2} f(R) g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (3.8)$$

equações que não são tão fáceis de se trabalhar devido ao fato de serem de 4^a ordem. Sua consistência é facilmente checada levando em conta $f(R) = R$, pois os dois termos centrais do lado esquerdo da equação se anulam, e assim as equações da RG são retomadas.

Na RG, o escalar de Ricci é definido pelo traço do tensor energia-momento $R = -\kappa T$. Porém, no contexto das teorias $f(R)$, ele é uma variável dinâmica e possui uma equação que o governa que é obtida por intermédio do traço da equação (3.8), ou seja,

$$3\square f_R(R) + 3f_R(R) - 2f(R) = \kappa T. \quad (3.9)$$

Nota-se que a equação que liga o escalar R a parte de matéria, R e T , é de segunda ordem em R , implicando que as equações de campo na teoria $f(R)$ admitem uma maior variedade de soluções do que a TRG de Einstein. O fato de se admitir mais soluções não está diretamente ligado a ela ser a opção correta para corrigir a RG, porém algumas dessas soluções podem vir a sanar problemas encontrados dentro da teoria de Einstein.

3.2 *Frame* de Jordan

Teorias escalares tensoriais, das quais a teoria Brans-Dicke é um exemplo, são teorias alternativas à TRG para descreverem classicamente a gravidade (FARAONI; GUNZIG, 1999). Essas formulações podem ser feitas de duas formas, segundo o *paper* de Brans-Dicke (BRANS; DICKE, 1961), existem a versão no *frame* de Jordan e a versão no *frame* de Einstein. A ideia por trás dessas teorias é que a interação gravitacional se dá por intermédio de um campo escalar ϕ junto ao tensor métrico e aparecem nos mais diversos contextos dentro da física teórica: a teoria de supercordas e a teoria da supergravidade, como a descrição efetiva do modelos dos *braneworlds*, nas tentativas de descrever a inflação e a energia escura, e é claro nas teorias modificadas de $f(R)$ (JÄRV *et al.*, 2007).

Quando formulada no *frame* de Jordan acopla-se, não minimamente, um campo ϕ ao escalar de Ricci e não à matéria, assim o termo cinético do campo escalar envolve uma função arbitrária $f(\phi)$. Dessa forma podemos escrever a teoria numa forma que remete a TRG.

Essa escolha pode simplificar a descrição matemática das teorias e torná-las mais simples de se manusear, mas ao preço de tornar os acoplamentos de matéria dependentes do campo escalar. Podemos resumir as razões de se trabalhar nesse *frame*:

1. Forma matemática simplificada: As equações de campo das teorias $f(R)$ possuem uma forma matemática mais simples quando comparadas ao *frame* geométrico utilizado na RG, por exemplo, as derivadas no *frame* de Jordan são de 2^a ordem enquanto no geométrico 4^a, ou seja, tal escolha introduz um grau de liberdade à teoria de forma semelhante ao que ocorre na passagem do formalismo Lagrangiano para o Hamiltoniano.
2. Conexão com a Relatividade Geral: É possível escrever as equações de tal forma que, em certas condições, elas se reduzam à RG.
3. Tratamento da matéria: Permite uma descrição mais direta de como a matéria acopla à gravidade modificada nas teorias $f(R)$. O acoplamento entre a matéria e a gravidade é um aspecto crítico na construção de teorias de gravidade modificada.

No entanto, é essencial notar que a escolha do *frame* de Jordan é uma conveniência matemática e não tem uma interpretação física intrínseca. As teorias alternativas da gravidade podem ser formuladas em diferentes *frames*, e cada qual a escolha específica pode afetar a descrição matemática e a interpretação física das teorias. Portanto, a escolha é facultativa a qual *frame* é o mais adequado para o assunto que almeja-se trabalhar.

Quando estamos no *frame* de Jordan, introduzimos um campo escalar χ , que não

depende da métrica,

$$f(R) = f(\chi) - f'(\chi)(\chi - R), \quad (3.10)$$

de forma que a ação equivalente da parte gravitacional toma o seguinte formato

$$S = -\frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{g} [f(\chi) - f'(\chi)(\chi - R)], \quad (3.11)$$

com $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$. Se aplicarmos o princípio variacional com relação ao campo obtemos

$$\begin{aligned} \delta_\chi S &= -\frac{1}{2\kappa} \delta_\chi \int d^4x \sqrt{g} (f(\chi) - f'(\chi)(\chi - R)) \\ &= -\frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{g} [\delta_\chi f(\chi) - (\delta_\chi f'(\chi))(\chi - R) - f'(\chi) \delta_\chi(\chi - R)] \\ &= -\frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{g} \delta_\chi [f''_\chi(\chi)(R - \chi)]. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Tomando o princípio de mínima ação obtemos os seguintes resultados,

$$f''_\chi(\chi)(R - \chi) = 0 \rightarrow \begin{cases} f''_\chi = 0 \\ R - \chi = 0 \therefore R = \chi, \end{cases} \quad (3.13)$$

e caso a segunda premissa seja válida obtemos a mesma expressão (3.1).

Podemos redefinir o campo χ por ϕ , no qual $\chi = \chi(\phi)$, de tal forma que

$$\phi \equiv \frac{df(\chi)}{d\chi}. \quad (3.14)$$

Com essas definições a ação (3.11) torna-se,

$$S = -\frac{1}{2\kappa} \delta_\chi \int d^4x \sqrt{g} (\phi R + f(\chi(\phi)) - \phi \chi(\phi)). \quad (3.15)$$

Ao definirmos uma função potencial tal que,

$$U(\phi) \equiv \phi \chi(\phi) - f(\chi(\phi)), \quad (3.16)$$

a ação no *frame* de Jordan é reescrita em um formato mais simples, a saber,

$$S = -\frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{g} (\phi R - U(\phi)). \quad (3.17)$$

Adotando o princípio variacional a fim de se obter as equações de campo da teoria

$f(R)$ no *frame* de Jordan, temos que a variação da ação com relação à métrica,

$$\begin{aligned}\delta_g S &= -\frac{1}{2\kappa} \delta \int d^4x \sqrt{g} (\phi R - U(\phi)) \\ &= -\frac{1}{2\kappa} \int d^4x [(\delta\sqrt{g})(\phi R - U(\phi)) + \sqrt{g}\delta(\phi R - U(\phi))] \\ &= -\frac{1}{2\kappa} \int d^4x [(\delta\sqrt{g})(\phi R - U(\phi)) + \sqrt{g}(\delta\phi R + \phi\delta R - \delta U(\phi))].\end{aligned}\quad (3.18)$$

Utilizando os resultados dados nas equações: (3.3) e (3.4), temos que a variação para parte gravitacional,

$$\delta_g S = -\frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \left[\phi \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} U(\phi) + (g_{\mu\nu} \square - \nabla_\mu \nabla_\nu) \phi \right]. \quad (3.19)$$

Ainda, acoplado o termo de matéria, obtemos a seguinte equação de campo

$$G_{\mu\nu} = \frac{\kappa}{\phi} T_{\mu\nu} + \frac{1}{\phi} (\nabla_\mu \nabla_\nu \phi - g_{\mu\nu} \square \phi) - \frac{1}{2\phi} g_{\mu\nu} U(\phi). \quad (3.20)$$

Seguindo o mesmo raciocínio, porém, aplicando a variação com relação ao campo ϕ , obtemos

$$\begin{aligned}\delta_g S &= -\frac{1}{2\kappa} \int d^4x [(\delta\sqrt{g})(\phi R - U(\phi)) + \sqrt{g}(\delta\phi R + \phi\delta R - \delta U(\phi))] \\ &= -\frac{1}{2\kappa} \int d^4x \left[\sqrt{g} \left(\delta\phi R - \frac{\partial}{\partial\phi} U(\phi) \delta\phi \right) \right] \\ &= -\frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{g} \delta\phi \left(R - \frac{\partial}{\partial\phi} U(\phi) \right) \quad \text{e, finalmente,}\end{aligned}\quad (3.21)$$

aplicando o princípio de mínima ação, chegamos a

$$R - \frac{d}{d\phi} U(\phi) = 0 \therefore R = \frac{d}{d\phi} U(\phi), \quad (3.22)$$

sendo essas as equações de campo acopladas para a teoria $f(R)$ da gravidade no *frame* de Jordan, (3.20) e (3.22), respectivamente.

3.2.1 Modelo de Starobinsky

Como já fora dito no presente trabalho, a TRG aparenta ser um sucesso ao descrever sistemas de campo forte encontrado em colisões de buracos negros (ABBOTT, 2016). Porém, quando esbarramos em problemas como a expansão acelerada tardia do universo a TRG não é tão eficiente a não ser que adicionemos uma constante cosmológica ou uma

componente “escura”(JIMÉNEZ *et al.*, 2022). Como fora visto, a TRG é uma teoria que parte de uma densidade lagrangiana linearmente proporcional ao escalar de Ricci, um passo imediato a se fazer seria propor uma teoria que seja proporcional ao Ricci porém não linearmente. Um dos modelos mais famosos e prestigiados dentro do âmbito de uma teoria $f(R)$ da gravidade é o modelo proposto por Alexei Starobinsky (STAROBINSKY, 1980), tal modelo propõe o seguinte formato para a função genérica

$$f(R) = R + \alpha R^2. \quad (3.23)$$

O modelo de Starobinsky está de acordo com os dados *Planck 2018* para época inflacionária via análises anisotrópicas da radiação cósmica de fundo (AKRAMI, 2020). Além do mais os modelos $f(R)$ preveem com clareza a existência de objetos compactos de massa $2.59M_{\odot}$ como os detectados nos eventos GW190814 pelo LIGO/Virgo (ABBOTT, 2020).

Podemos realizar o proposto na seção [3.2], e chegar numa expressão para as equações de campo para o modelo de Starobinsky no *frame* de Jordan. Inicialmente,

$$\phi = \frac{\partial f(R)}{\partial R} = 1 + 2\alpha R, \quad (3.24)$$

consequentemente, o potencial (3.16) é dado por:

$$U(\phi) = \frac{1}{4\alpha} (\phi - 1)^2. \quad (3.25)$$

Podemos observar o comportamento do potencial com relação ao campo na figura 3.1 em que a medida que o módulo de α aumenta a abertura da concavidade também aumenta, frisando que no ponto em que o campo $\phi = 1$ obtemos o caso da RG que já conhecemos.

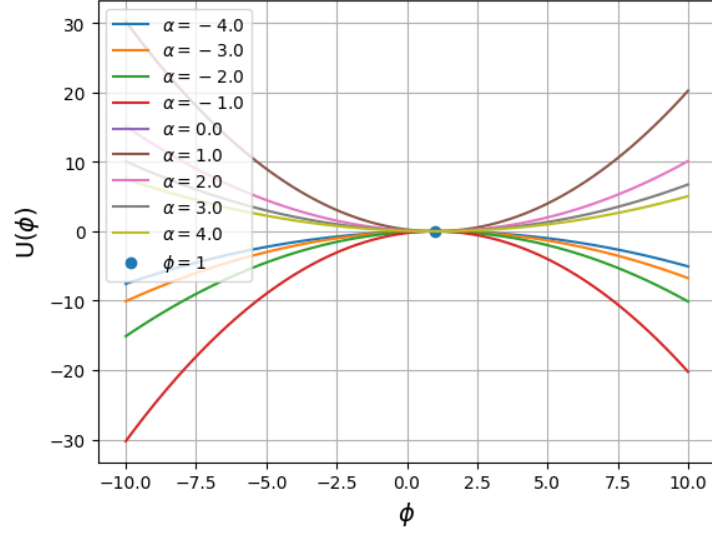
Assim, as equações de campos para o modelo de Starobinsky no *frame* de Jordan se tornam

$$G_{\mu\nu} = \frac{k}{\phi} T_{\mu\nu} + \frac{1}{\phi} (\nabla_{\mu} \nabla_{\nu} \phi - g_{\mu\nu} \square \phi) - \frac{g_{\mu\nu}}{8\phi} \frac{(\phi - 1)^2}{\alpha} \quad (3.26)$$

$$R = \frac{\phi - 1}{2\alpha}. \quad (3.27)$$

O modelo de Starobinsky é o modelo mais simples da inflação, com $\alpha = \frac{1}{GM_p^2}$ em que M_p é a massa de Planck, com previsões precisas para os observáveis inflacionários e não possui parâmetros livres, ou seja, a sua previsão é consistente.

As contas elaboradas nessa seção foram baseadas nos artigos (CAPOZZIELLO; LAURENTIS, 2011), (FELICE; TSUJIKAWA, 2010) e (SOTIRIOU; FARAONI, 2010).

FIGURA 3.1 – Potencial de Starobinsky no *frame* de Jordan.

3.3 Estruturas estelares na teoria $f(R)$

A fim de descrevermos o comportamento de objetos estelares dentro da teoria alternativa, podemos considerar um sistema esfericamente simétrico com movimento somente na direção radial. Realizando um processo análogo ao que fora realizado no apêndice B. Com a diferença que consideraremos a derivada temporal, partindo da métrica esférica,

$$ds^2 = -e^{2\psi} dt^2 + e^{2\lambda} dx^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (3.28)$$

logo os símbolos de Christoffel não nulos serão:

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^0 &= \dot{\psi}, & \Gamma_{00}^1 &= e^{2\psi-2\lambda}\psi', & \Gamma_{01}^0 &= \psi', & \Gamma_{01}^1 &= \dot{\lambda}, \\ \Gamma_{11}^0 &= e^{2\lambda-2\psi}\dot{\lambda}, & \Gamma_{11}^1 &= \lambda', & \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{r}, & \Gamma_{13}^3 &= \frac{1}{r}, \\ \Gamma_{22}^1 &= -\frac{r}{e^{2\lambda}}, & \Gamma_{23}^3 &= \cot\theta, & \Gamma_{33}^1 &= -\frac{r}{e^{2\lambda}}\sin^2\theta, & \Gamma_{33}^2 &= -\frac{\sin(2\theta)}{2}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Ademais, para se obter as equações, precisamos das definições de objetos matemáticos pra a teoria. Inicialmente, calculamos o resultado para o escalar de Ricci, $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$, a saber,

$$R = \frac{2}{e^{2\psi}} \left(\ddot{\lambda} + \dot{\lambda}^2 - \dot{\lambda}\dot{\psi} \right) - \frac{2}{e^{2\lambda}} \left(\psi'' + \psi'^2 - \lambda'\psi' \right) + \frac{4}{re^{2\lambda}} \left(\lambda' - \psi' \right) + \frac{2}{r^2} \left(1 - \frac{1}{e^{2\lambda}} \right), \quad (3.30)$$

bem como as expressões para as componentes do tensor de Ricci:

$$R_{00} = -\ddot{\lambda} - \dot{\lambda}^2 + \dot{\psi}\dot{\lambda} + \exp[2(\psi - \lambda)] \left(\psi'' + \psi'^2 - \lambda'\psi' + \frac{2\psi'}{r} \right), \quad (3.31)$$

$$R_{11} = \exp[2(\lambda - \psi)] \left(\ddot{\lambda} + \dot{\lambda}^2 - \dot{\lambda}\dot{\psi} \right) - \psi'' + \lambda'\psi' + \frac{2\lambda'}{r} - \psi'^2, \quad (3.32)$$

$$R_{22} = \exp(-2\lambda) [-1 - r\psi' + r\lambda'] + 1, \quad (3.33)$$

$$R_{33} = \sin^2 \theta R_{22}. \quad (3.34)$$

É importante ressaltar algumas observações, dentro da TRG o único campo dinâmico é a métrica, todavia, no contexto das teorias $f(R)$ tanto a métrica quanto o escalar de Ricci são campos dinâmicos descritos pelas equações diferenciais (3.8) e (3.9).

A equação (3.8) pode ser reescrita no formato misto, tal que,

$$f_R R_\mu{}^\nu + \delta_\mu^\nu \square f_R - \nabla_\mu \nabla^\nu f_R - \frac{1}{2} f(R) = \chi T_\mu{}^\nu, \quad (3.35)$$

assim, já temos definidos objetos que serão úteis para a construção das equações para teoria, porém, ainda precisamos de mais alguns. Partindo da métrica, obtemos resultados interessantes como o d'Alembertiano:

$$\begin{aligned} \square f_R &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu [\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu] f_R \\ &= \frac{1}{e^{2\psi}} \left[(\dot{\psi} - \dot{\lambda}) \dot{f}_R - \ddot{f}_R \right] + \frac{1}{e^{2\lambda}} \left[\left(\psi' - \lambda' + \frac{2}{r} \right) f'_R + f''_R \right]. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Podemos obter também as expressões para o produtos das derivadas covariantes expressas pelo seguinte formato, $\nabla_\mu (\partial^\nu f_R) = \partial_\mu (\partial^\nu f_R) + \Gamma_{\mu\lambda}{}^\nu (\partial^\lambda f_R)$, devido ao fato de f_R ser um escalar:

$$\nabla_0 (\partial^0 f_R) = \frac{1}{e^{2\psi}} \left(\dot{\psi} \dot{f}_R - \ddot{f}_R \right) + \frac{1}{e^{2\lambda}} \psi' f'_R, \quad (3.37)$$

$$\nabla_1 (\partial^1 f_R) = \frac{1}{e^{2\lambda}} (f''_R - \lambda' f'_R) - \frac{1}{e^{2\psi}} \dot{\lambda} \dot{f}_R, \quad (3.38)$$

$$\nabla_2 (\partial^2 f_R) = \frac{f'_R}{r e^{-2\lambda}}, \quad (3.39)$$

$$\nabla_3 (\partial^3 f_R) = \frac{f'_R}{r e^{-2\lambda}}. \quad (3.40)$$

Adicionando e definindo algumas notações úteis:

$$\begin{aligned} \dot{f}_R &= \frac{\partial f_R}{\partial x^0} = \frac{df_R}{dR} \frac{\partial R}{\partial x^0} = \dot{R} f_{RR}, & f'_R &= \frac{\partial f_R}{\partial r} = \frac{df_R}{dR} \frac{\partial R}{\partial r} = R' f_{RR}, \\ \ddot{f}_R &= \frac{\partial}{\partial x^0} \left(\dot{R} f_{RR} \right) = \ddot{R} f_{RR} + \dot{R}^2 f_{RRR}, & f''_R &= \frac{\partial}{\partial r} (R' f_{RR}) = R'' f_{RR} + R'^2 f_{RRR}, \\ \dot{f}'_R &= \frac{\partial}{\partial x^0} (R' f_{RR}) = \dot{R}' f_{RR} + \dot{R} R' f_{RRR}. \end{aligned}$$

Podemos finalmente, com essas expressões, calcular as componentes (3.35), considerando o caso em que o tensor energia-momento seja de um fluido perfeito cuja definição é dada por,

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P) U_\mu U_\nu - P g_{\mu\nu}. \quad (3.41)$$

Temos a primeira componente 00 como sendo,

$$\begin{aligned} -\frac{f_R}{r^2} + \frac{f_R}{r^2} \partial_r (r e^{-2\lambda}) - \frac{\dot{\lambda} \dot{R} f_{RR}}{e^{2\psi}} + \frac{1}{e^{2\lambda}} \left[\left(\frac{2}{r} - \lambda' \right) R' f_{RR} + R'' f_{RR} + R'^2 f_{RRR} \right] \\ + \frac{1}{2} (R f_R - f(R)) = -\kappa \rho, \end{aligned} \quad (3.42)$$

e a segunda 11:

$$\begin{aligned} -\frac{f_R}{r^2} + \frac{f_R}{e^{2\lambda}} \left(\frac{2\psi'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) + \frac{\dot{\psi} \dot{f}_R}{e^{2\psi}} - \frac{1}{e^{2\psi}} \left(\ddot{R} f_{RR} + \dot{R}^2 f_{RRR} \right) + \frac{1}{e^{2\lambda}} \left[\left(\frac{2}{r} + \psi' \right) R' f_{RR} \right] \\ + \frac{1}{2} (R f_R - f(R)) = \kappa P, \end{aligned} \quad (3.43)$$

já a expressão para o Ricci (3.9) se reduz a

$$\frac{3}{e^{2\psi}} \left[(\dot{\psi} - \dot{\lambda}) \dot{f}_R - \ddot{f}_R \right] + \frac{3}{e^{2\lambda}} \left[\left(\psi' - \lambda' + \frac{2}{r} \right) f'_R + f''_R \right] + R f_R - 2f(R) = \kappa (-\rho + 3P), \quad (3.44)$$

sendo essas as expressões que descrevem objetos esféricos para a teoria $f(R)$. Veremos a utilidade delas mais adiante, quando chegarmos à parte de aplicação das equações TOV, as quais iremos referenciar como TOV modificadas.

4 Aplicação: equações TOV

A TRG possui diversas aplicações voltadas à astrofísica. Dentre as aplicações podemos citar as equações de *Tolman-Oppenheimer-Volkoff*, ou simplesmente, TOV. Historicamente, recebeu esse nome em homenagem aos físicos que as desenvolveram, Richard Chace Tolman que fez uma análise algébrica das métricas esfericamente simétricas e a dedução final da equação como ela é conhecida fora apresentada por Julius Robert Oppenheimer e George Michael Volkoff no famoso artigo “*On Massive Neutron Cores*” (OPPENHEIMER; VOLKOFF, 1939).

As equações TOV são um conjunto de equações diferenciais que juntas servem para descrever o equilíbrio hidrostático no interior de estrelas compactas, determinar a relação entre massa e raio e a estabilidade de uma estrela de nêutrons. Por sua vez, também servem para descrever a estrutura interna e as propriedades das estrelas de nêutrons que são objetos extremamente densos e a sua composição vem sendo objeto de intenso estudo. Tal estudo nos permite explorar a física da matéria fortemente interagente no regime de altíssimas densidades.

Resumidamente, são ferramentas essenciais para a astrofísica e ajudam na compreensão acerca das estrelas de nêutrons e outros objetos astrofísicos extremamente densos. Elas fornecem revelações sobre a física nuclear, o equilíbrio de forças bem como a estabilidade desses objetos, além de ajudar a estabelecer limites na massa e tamanho das estrelas de nêutrons. Cabe ressaltar, que o presente trabalho envolve o estudo de estrelas de nêutrons, porém, as equações TOV também servem para modelar estrelas de quarks, que são estrelas hipotéticas compostas principalmente por quarks ao invés de nêutrons (IVANENKO; KURDGELAIDZE, 1965).

4.1 Desenvolvimento na Relatividade Geral

A fim de se obter as expressões para as TOV dentro da TRG, partimos das equações de Einstein considerando a estrela como um objeto que possui uma distribuição esfericamente simétrica, estática e que age como um fluido perfeito. Com o intuito de não tornar a seção muito extensa, podemos ver com detalhes o desenvolvimento das equações no apêndice B.

Em unidades naturais, elas possuem o seguinte formato:

$$\frac{dP(r)}{dr} = -[P(r) + \rho(r)] \left(\frac{4\pi r^3 P(r) + m(r)}{r^2 - 2m(r)r} \right), \quad (4.1)$$

e

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r). \quad (4.2)$$

Onde P é a pressão no interior da estrela, r é a coordenada radial, m é a massa contida dentro de uma esfera de raio r e ρ é a densidade de energia. Tais expressões descrevem a massa e pressão de objetos astrofísicos que possuem simetria esférica, estáticos e isotrópicos, e que estão em equilíbrio gravitacional.

Para se obter soluções numéricas para as equações TOV, devemos fornecer como *input* as equações de estado $P = P(\rho)$, que relacionam a pressão e a densidade de energia e conseqüentemente determinam o comportamento termodinâmico do objeto, para que assim então seja possível obter soluções que descrevem a estrela. Para a aplicação do método é preciso de condições iniciais $M(0) = 0$ e $P(0) = P_c$, onde $M(0)$ é massa da estrela na origem e P_c é a pressão da estrela na origem, a iteração deve ser realizada até o momento em que $P(r = R) = 0$, onde R determina o raio da estrela. No exterior da estrela, $r > R$, devemos obter a solução de Schwarzschild e para isso

$$\exp[\nu(R)] = \exp[-\lambda(R)] = 1 - \frac{2M}{R}. \quad (4.3)$$

4.2 Desenvolvimento na Teoria $f(R)$

A fim de se obter as equações TOV para a teoria $f(R)$, basta que tomadas as equações (3.42), (3.43) e (3.44), adotemos o caso estático, ou seja, equações que não dependem da parte temporal. Assim ficamos com as novas expressões no formato:

$$\begin{aligned} -\frac{f_R}{r^2} \frac{d}{dr} [r(1 - e^{-2\lambda})] + \frac{1}{e^{2\lambda}} \left[\left(\frac{2}{r} - \lambda' \right) R' f_{RR} + R'' f_{RR} + R'^2 f_{RRR} \right] \\ + \frac{1}{2} (R f_R - f(R)) = -\kappa \rho, \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\frac{f_R}{r^2} \left[\frac{2r}{e^{2\lambda}} \psi' - \left(1 - \frac{1}{e^{2\lambda}} \right) \right] + \frac{1}{2} (R f_R - f(R)) + \frac{1}{e^{2\lambda}} \left[\left(\frac{2}{r} + \psi' \right) R' f_{RR} \right] = \kappa P, \quad (4.5)$$

$$R'' = \frac{e^{2\lambda}}{3f_{RR}} \left(-\kappa \rho + 3\kappa P - R f_R + 2f(R) - 3 \frac{R'^2 f_{RRR}}{e^{2\lambda}} \right) + \left(\lambda' - \psi' - \frac{2}{r} \right) R', \quad (4.6)$$

juntamente com a equação de conservação do tensor energia-momento vista no apêndice B,

$$\frac{dP}{dr} = -(\rho + P)\psi'. \quad (4.7)$$

De posse dessas expressões, podemos isolar as equações de acordo com as variáveis que se desejam resolver,

$$\psi' = \frac{1}{2r(2f_R + rR'f_{RR})} [e^{2\lambda}r^2(2\kappa P + f(R) - Rf_R) + 2f_R(e^{2\lambda} - 1) - 4rR'f_{RR}], \quad (4.8)$$

$$\lambda' = \frac{1}{[2r(2f_R + rR'f_{RR})]} \left\{ \exp(2\lambda) [r^2(2k\rho + f) - f_R(r^2R + 2)] + 2r^2R'^2f_{RRR} + 2rf_{RR}(2R' + rR'') + 2f_R \right\}, \quad (4.9)$$

$$R'' = \frac{f_R}{f_{RR}} \left[\frac{1}{r} \left(3\psi' - \lambda' + \frac{2}{r} \right) - \exp(2\lambda) \left(\frac{R}{2} + \frac{2}{r^2} \right) \right] + \left(\frac{1}{r} + \lambda' \right) R' - R'^2 \frac{f_{RRR}}{f_{RR}}. \quad (4.10)$$

Como se trata de um sistema de equações diferenciais, precisamos de condições para que possamos resolvê-lo numericamente. O sistema é composto por três equações de primeira ordem e uma de segunda ordem. Dessa forma precisamos de cinco condições para resolver o sistema. Além do mais, semelhantemente ao que precisamos para resolver a TOV na RG, precisamos de uma EoS que relacione a pressão e a densidade de energia dentro da estrela.

Para solucionar, impomos as seguintes condições:

$$\psi(0) = 0, \quad \lambda(0) = 0, \quad R(0) = R_c, \quad R'(0) = 0, \quad (4.11)$$

para uma dada densidade central de energia $\rho(0) = \rho_c$. Fora da estrela, as soluções são dadas somente pelas expressões (4.2), (4.9) e (4.10), onde a pressão é nula. Assim, precisamos ligar as condições na superfícies da estrela, $r = R_{star}$, de modo a garantir a suavidade da solução,

$$\begin{aligned} \psi_d(R_{star}) &= \psi_f(R_{star}), & \lambda_d(R_{star}) &= \lambda_f(R_{star}), \\ R_d(R_{star}) &= R_f(R_{star}), & R'_d(R_{star}) &= R'_f(R_{star}), \end{aligned} \quad (4.12)$$

em que os índice d representam as soluções dentro da estrela e f as soluções fora. Podemos

definir a $m(r)$ dentro de um raio r de acordo com a relação oriunda da RG

$$e^{-2\lambda} = 1 - \frac{2Gm}{c^2 r}. \quad (4.13)$$

Ademais, temos condições advindas do quesito de planicidade assintótica, i.e.,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} R(r) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} m(r) = \text{constante}. \quad (4.14)$$

Como exemplo de aplicação da teoria alternativa, podemos aplicar o modelo de Starobinsky, que nos fornece as seguintes equações de campo:

$$f(R) = R + \alpha R^2, \quad f_R = 1 + 2\alpha R, \quad f_{RR} = 2\alpha, \quad (4.15)$$

de tal forma que as equações (4.2), (4.9) e (4.10) se tornam:

$$\psi' = \frac{1}{4r [1 + 2\alpha R + \alpha r R']} \left\{ \exp(2\lambda) [r^2 (2\kappa P + \alpha R^2)] + 2(1 + 2\alpha R) (\exp(2\lambda) - 1) - 8\alpha r R' \right\}, \quad (4.16)$$

$$\lambda' = \frac{1}{4r [1 + 2\alpha R + \alpha r R']} \left\{ \exp(2\lambda) [2r^2 (k\rho - \alpha R^2)] + 2(1 + 2\alpha R) (1 - \exp(2\lambda)) + 8\alpha r R' + 4\alpha r^2 R'' \right\}, \quad (4.17)$$

$$R'' = \frac{e^{2\lambda}}{6\alpha} [\kappa(3P - \rho) + R] + \left(\lambda' - \psi' - \frac{2}{r} \right) R'. \quad (4.18)$$

A fim de se obter a relação massa-raio podemos redefinir (4.13) como sendo:

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho + \frac{\alpha r^2}{2G} \left\{ -\frac{2R}{r^2} \frac{d}{dr} [r (1 - e^{-2\lambda})] + \frac{R^2}{2} + \frac{2}{e^{2\lambda}} \left[\left(\frac{2}{r} - \lambda' \right) R' + R'' \right] \right\} \quad (4.19)$$

que, se compararmos com a (4.2), notamos a presença de um termo a mais que desempenha um papel muito importante quando pretendemos determinar a massa de uma estrela no modelo de Starobinsky.

Os resultados obtidos acima estão de acordo com a referência (FEOLA *et al.*, 2020).

4.3 Equações de estado

Como já dito anteriormente, as EoS exercem papel de suma importância na implementação numérica das equações TOV. Essas equações são expressões matemáticas responsáveis por descrever a relação entre diferentes variáveis termodinâmicas de um sistema físico em equilíbrio. Elas estão presentes em diversas áreas da física, como a física estatística, da matéria condensada, nuclear e a própria astrofísica.

Dentro do âmbito da física nuclear e da astrofísica as EoS são utilizadas para descrever a relação entre pressão, densidade e energia em sistemas como por exemplo estrelas de nêutrons, que são objetos compactos formados após o colapso gravitacional de estrelas massivas. Esse colapso é tão intenso que sua gravidade é capaz de combinar elétrons e prótons em seu interior de uma maneira tão esmagadora que se formam nêutrons. Nesse quesito tornam-se cruciais para entender a estrutura interna e as propriedades intrínsecas desse objeto compacto.

Existem diversos modelos de EoS cada qual com um certo nível de complexidade de acordo com as suas considerações (SCHNEIDER *et al.*, 2019). Um exemplo comum de EoS dentro do contexto da astrofísica são as politrópicas, que consistem em uma simples relação entre a pressão e a densidade de energia. Tal modelo pode ser escrito de maneira genérica como:

$$P = K\rho^\Gamma \quad (4.20)$$

sendo K uma constante de proporcionalidade, Γ é o chamado índice adiabático e ρ é a densidade de energia (WOJNAR, 2023).

4.4 Método numérico

Como já visto, as equações (4.1) e (4.2) constituem um sistema de equações diferenciais ordinárias de 1^a ordem. Numericamente, existem algumas possíveis maneiras de se solucionar problemas desse tipo (PRESS *et al.*, 2007):

- **Método de Euler:** Método mais simples que consiste em aproximar a solução para a equação diferencial ordinária por intermédio de uma série de pequenos passos usando a inclinação da reta tangente na solução.
- **Métodos de Runge-Kutta:** Mais comum de se utilizar em problemas semelhantes as equações TOV devido à sua precisão e eficiência. Consiste em calcular a solução em cada ponto com base em uma combinação ponderada de inclinações em diferentes pontos intermediários dentro de um dado intervalo.

- **Método de Verlet:** Mais utilizado em problemas envolvendo a física molecular e simulações de dinâmica molecular, sua eficácia é extremamente alta para sistemas que sejam conservativos.
- **Métodos de Passo Múltiplo:** Uma combinação de métodos que utilizam informações anteriores para calcular a solução no ponto seguinte, para tal exige que se possua vários pontos iniciais.
- **Método de Diferenças Finitas:** Consiste em escrever as equações em um formato discreto utilizando diferenças finitas para derivada, sendo aplicado a problemas de malhas espaciais e temporais.
- **Método de Elementos Finitos:** Semelhante ao método anterior, porém é utilizado para resolver equações que estejam em domínios complexos e irregular, convertendo o problema em um sistema de equações algébricas.
- **Método de Colocação Espectral:** Utiliza-se de funções espectrais, como os polinômios de Chebyshev, para representar a solução em termos de coeficientes desconhecidos, possui uma alta precisão e uma rápida convergência.

Para resolver as TOV, optamos pelo método de Runge-Kutta de 4^a ordem devido a sua simplicidade e rápida implementação. Para, a obtenção dos resultados foram utilizadas 3 linguagens de programação para diferentes casos: Python e Mathematica com códigos criados pelo autor e Fortran criado pelo orientador a título de comparação das soluções encontradas.

Nesta dissertação utilizamos como EoS a politrópica descrita na equação (4.20) e também uma parametrização do modelo RMF (Relativistic Mean-Field) (DUTRA *et al.*, 2014). No contexto do modelo de RMF, os núcleos são tratados como sistemas de prótons e nêutrons interagindo através da troca de mésons. Essa teoria incorpora conceitos da relatividade restrita e utiliza uma equação de estado relativística para descrever as propriedades dos núcleos.

O modelo de RMF é conhecido por fornecer resultados consistentes com várias observações experimentais relacionadas à estrutura nuclear, como energias de ligação nucleares, momentos magnéticos e distribuições de densidade nuclear. Essa abordagem é frequentemente usada em estudos teóricos da estrutura nuclear em contextos que envolvem altas energias ou densidades nucleares.

4.5 Resultados

Com o desenvolvimento teórico introduzido nos capítulos e seções anteriores podemos obter resultados para as equações TOV para as duas teorias tanto na RG quanto na teoria modificada.

4.5.1 TOV na RG

De posse das equações (4.1) e (4.2) podemos resolvê-las numericamente para o caso politrópico. A EoS escolhida fora a seguinte (READ *et al.*, 2009):

$$P(\rho) = \begin{cases} K_0 \rho^{\Gamma_0}, & \rho < \rho_p, \\ K_1 \rho^{\Gamma_1}, & \rho \geq \rho_p. \end{cases} \quad (4.21)$$

que é chamada politrópica por partes, onde o termo ρ_p é uma densidade limite na qual a EoS escolhida alterna entre diferentes estados. Ademais, a relação $\rho(P)$ é dada pela inversa nos mesmos limites, i. e.,

$$\rho(P) = \begin{cases} \left(\frac{P}{K_0}\right)^{\frac{1}{\Gamma_0}}, & P < P_p, \\ \left(\frac{P}{K_1}\right)^{\frac{1}{\Gamma_1}}, & P \geq P_p, \end{cases} \quad (4.22)$$

onde P_p é um valor calculado baseado no valor de ρ_p e K_0 .

O primeiro ponto a se avaliar são os valores das constantes K_0 e K_1 bem como a unidade de medida. No código criado, K_0 é calculado em termos de \hbar , que está em J.s, e m_n , que está em kg, importados da biblioteca *scipy.constants* do *python* seguindo o raciocínio imposto no artigo (WOJNAR, 2023), assim,

$$K_0 = 5380.30 \quad J/kg^{2/3},$$

a escolha de ρ_p fora tal que

$$\rho_p = 5e17 \quad kg/m^3,$$

e o valor de P_p é dado pela expressão:

$$P_p = K_0 \rho_p^{\Gamma_0},$$

bem como valor de K_1 é dado pela expressão:

$$K_1 = \left(\frac{P_p}{\rho_p}\right)^{\Gamma_1}.$$

Os resultados foram obtidos variando-se o parâmetro Γ_1 . Fixando o valor de $\Gamma_0 = \frac{5}{3}$, que indica um gás de nêutrons degenerados não relativístico, obtemos os diferentes resultados para o diagrama massa-raio, como podemos ver na figura 4.1, e com o auxílio da tabela 4.1 podemos evidenciar os valores encontrados para massa máxima e raio da estrela,

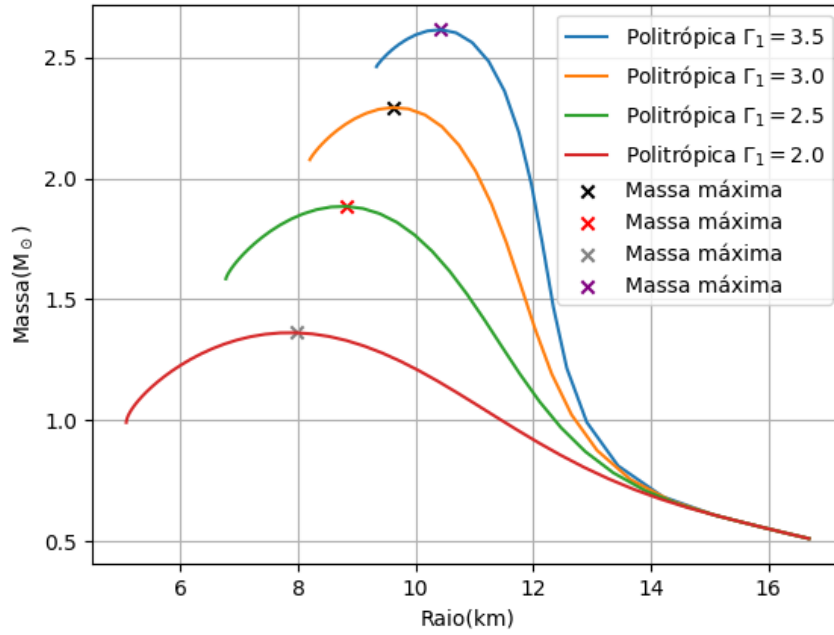


FIGURA 4.1 – Diagrama massa-raio para EoS politrópica.

TABELA 4.1 – Resultado da integração numérica do caso politrópico.

Parâmetro	Massa(M_{\odot})	Raio(km)
$\Gamma_1=2.0$	1.36	7.97
$\Gamma_1=2.5$	1.88	8.83
$\Gamma_1=3.0$	2.29	9.61
$\Gamma_1=3.5$	2.61	10.43

A título de comparação, resolvemos as equações TOV para o modelo RMF para o qual a EoS é não-analítica (DUTRA *et al.*, 2014). Para tal finalidade, foi preciso realizar uma interpolação cujo resultado está mostrado na figura 4.2.

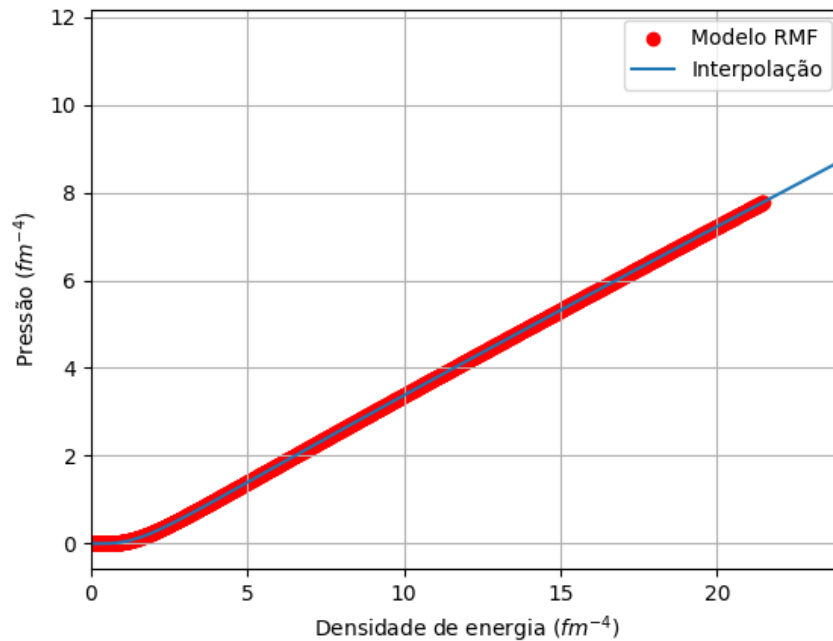


FIGURA 4.2 – EoS obtida pela interpolação dos dados.

Com essa interpolação para a EoS podemos utilizá-la juntamente com as equações TOV e obter o perfil massa-raio para a estrela, expressos na figura 4.3 e na tabela 4.2:

TABELA 4.2 – Resultado da integração numérica.

Parâmetro	Unidade	Valor Calculado
Massa máxima	M_{\odot}	2.05
Raio da massa máxima	km	11.58

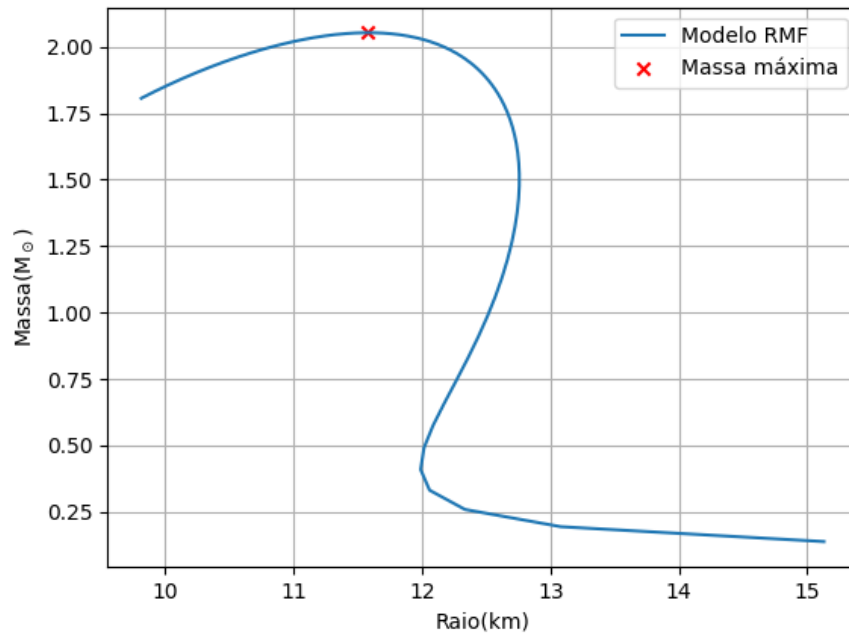


FIGURA 4.3 – Diagrama massa-raio obtido da TOV na RG via modelo RMF.

Por fim, podemos comparar os resultados para o caso politrópico e o caso mais realístico descrito pelo modelo RMF, em que temos uma nítida diferença a qual podemos evidenciar,

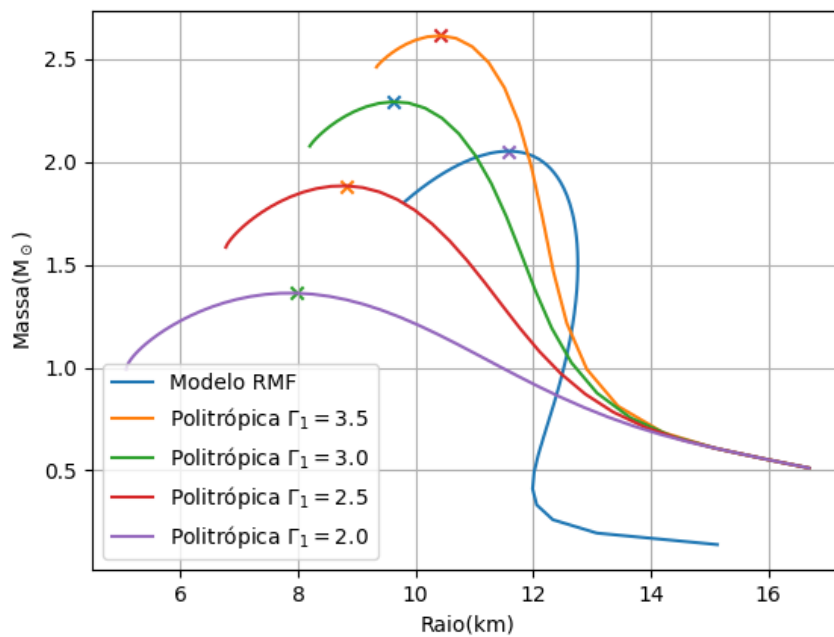


FIGURA 4.4 – Diagrama massa-raio obtido da TOV na RG.

Os resultados obtidos nessa seção estão de acordo com a literatura e podemos ver que os resultados se assemelham com as referências: (DUTRA *et al.*, 2021), (LENZI *et al.*, 2023), (LUNNEY, 2020), (MARIANI; LUGONES, 2023), (ÖZEL; FREIRE, 2016) e (STEINER *et al.*, 2013)

4.5.2 TOV no modelo de Starobinsky

Para a teoria modificada a implementação apenas para o caso politrópico a qual teremos a seguinte EoS,

$$P = K\rho^2, \quad (4.23)$$

em que adotaremos os valores de $K = 10^8 m^2$ e $\rho = 2.0 \times 10^{18} kg/m^3$, tais quais foram escolhidos de modo que os resultados sejam nas unidades métricas e assim o valor que encontraremos para o raio já esteja em km . Outro valor de extrema importância é

$$r_g = \frac{GM_\odot}{c^2} \approx 1.477km,$$

visto que o utilizamos para calcular os valores de α para o modelo de Starobinsky.

É interessante, ressaltarmos a solução da solução de Schwarzschild (SCHWARZSCHILD, 1916), se tratando da RG, temos que imediatamente após atingir a superfície da estrela, ou seja, quando realizamos o processo de integração até R_{star} que determina o tamanho da estrela, temos o valor de R tem que ser zero após atingir o raio da estrela. Todavia, se tratando de teorias $f(R)$, já sabemos que R é uma variável dinâmica do nosso sistema governada pela equação (4.18), sendo assim quando realizamos o processo de integração mesmo após atingir o raio da estrela, ele não é zero, ele vai a zero mas não é zero imediatamente após atingir a superfície da estrela, como podemos ver na figura 4.5.

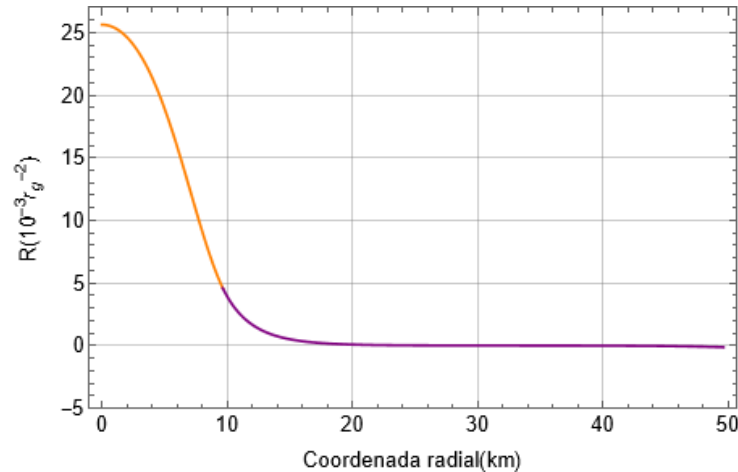


FIGURA 4.5 – Comportamento de R dentro e fora da estrela.

Quando analisamos o perfil massa-raio, figura 4.6, também temos um resultado curioso, que nos mostra que mesmo após atingirmos o R_{star} ainda há uma pequena contribuição de massa, ou seja, na RG, se previa que após alcançar o raio da estrela a massa se torna constante, o que não acontece dentro da teoria $f(R)$, assim podemos ter a definição de

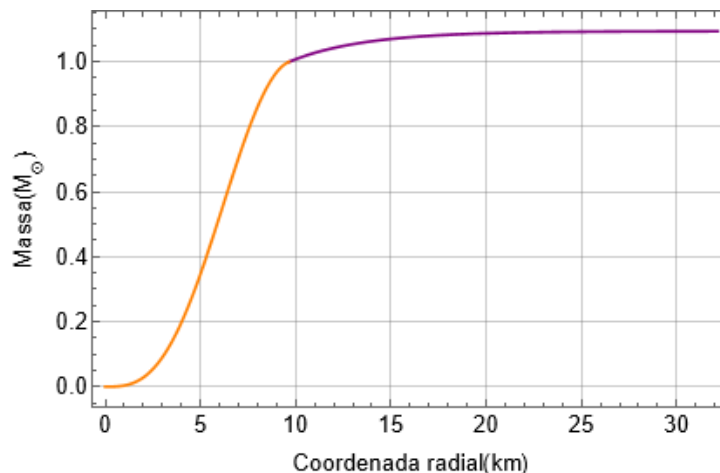


FIGURA 4.6 – Perfil de uma estrela de densidade $\rho = 2.0 \times 10^{18} \text{ kg/m}^3$ na teoria $f(R)$.

duas massas, uma que é a massa da estrela cercada pelo raio máximo e a outra que é uma massa que vai além do tamanho da estrela. Concluimos que se tratando de teorias $f(R)$, Schwarzschild não é uma solução para elas.

Diferentemente do que fora feito na seção anterior, iremos fixar nossa EoS politrópica para os valores já explicitados, e variaremos somente os valores de α . Para que assim possamos comparar os resultados para R , figura 4.7, e do perfil massa-raio na figura 4.8

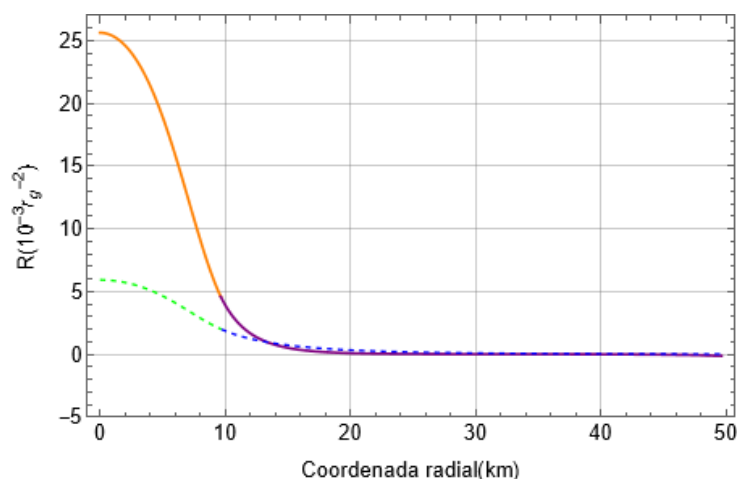


FIGURA 4.7 – Comportamento de R dentro e fora da estrela.

Podemos condensar os resultados na tabela 4.3, onde dividimos a massa em dois possíveis valores: m que é a massa medida no raio da estrela e M' que seria a massa longínqua:

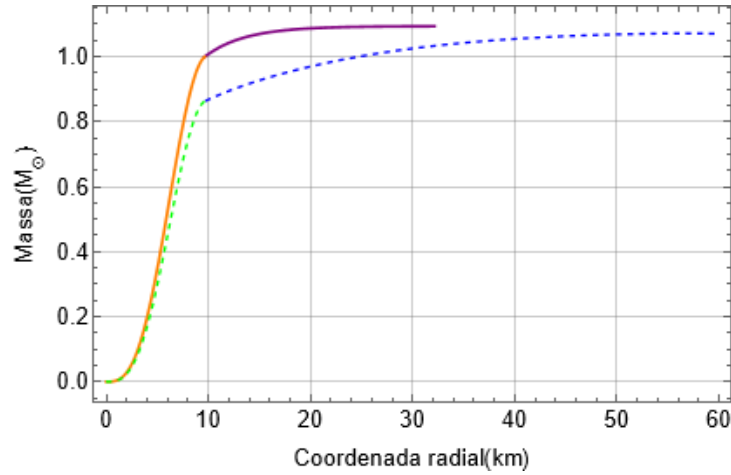


FIGURA 4.8 – Análise do perfil de uma estrela de densidade $\rho = 2.0 \times 10^{18} \text{kg/m}^3$ na teoria $f(R)$.

TABELA 4.3 – Resultados para $f(R)$.

α	Raio(km)	$m(M_{\odot})$	$M'(M_{\odot})$
0	9.67	1.12	1.12
1	9.65	1.00	1.09
10	9.70	0.86	1.07

Assim, percebemos que à medida que α aumenta, a diferença entre a massa na superfície e a massa longínqua também cresce. Na RG, a diferença entre as massas não existe.

O resultado da integração numérica realizado nessa seção coincide com o resultado proposto por (PRETEL, 2021) e com as ideias presentes em (FEOLA *et al.*, 2020), (PRETEL *et al.*, 2020) e (JIMÉNEZ *et al.*, 2022)

5 Conclusões e Perspectivas

Ao longo desta dissertação, buscamos responder a questões fundamentais relacionadas ao comportamento de objetos compactos na astrofísica, focando especificamente nas estrelas de nêutrons e seu perfil massa-raio. Exploramos o universo das equações TOV, aplicando-as tanto à Teoria da Relatividade Geral (TRG) quanto a teorias modificadas, destacando o modelo de Starobinsky.

Nossos resultados revelaram uma conexão entre a massa de uma estrela e o modelo de Equação de Estado (EoS) adotado. Por exemplo, os casos politrópicos geram massas que variam com os parâmetros Γ e ρ_p . No entanto, ao lidar com dados advindos do modelo RMF, observamos variações em relação às curvas politrópicas mas que mesmo assim nos fornecem resultados dentro do esperado. É crucial destacar que, apesar das diferenças, ambas abordagens fornecem resultados semelhantes em relação ao raio da estrela. Ao explorar as equações TOV em contextos de teorias alternativas, como o modelo $f(R) = R + \alpha R^2$, notamos que a massa do objeto está ligada ao modelo de EoS, mas o parâmetro α desempenha um papel crucial: à medida que α aumenta, a diferença entre a massa imediatamente após a estrela e a massa em pontos após a estrela também cresce. Quando analisamos o perfil da estrela, temos que mesmo após seu término ainda há um acréscimo de massa, ou seja, ao acoplar um termo αR^2 , nos trás grandes questionamentos físicos sobre o que vem a ser esse acréscimo de massa.

Esta pesquisa visa auxiliar estudantes iniciantes na compreensão do comportamento de estrelas de nêutrons na TRG e proporcionar uma análise dos perfis massa-raio em teorias modificadas, que buscam corrigir a RG em determinados pontos, como é o caso do modelo de Starobinsky, que aborda o período inflacionário do Universo. Vale ressaltar, que a análise realizada na teoria $f(R)$ fora feita no que conhecemos como *frame* geométrico.

É importante reconhecer as limitações deste trabalho, como a foco exclusivo no modelo analítico para as EoS politrópicas no contexto do modelo de Starobinsky. Para dados realísticos na TRG, simplificamos a interpretação dos dados de pressão e energia sem uma análise mais profunda e criteriosa. Sugerimos estudos futuros que explorem modelos de matéria mais complexos, incluindo matéria escura, estrelas de quarks ou híbridas, aproveitando a abundância de dados realísticos e aplicando técnicas avançadas de

análise e aprendizado de máquina para obter EoS mais realistas. Limitamos nosso estudo de teoria alternativa ao modelos das $f(R)$, porém existem modelos que incluem outras características como considerar espaços com torção ou até mesmo abrir mão da condição de metricidade e que cabem o estudo do comportamento de objetos compactos (KACZMAREK; SZCZEŚNIAK, 2023), (TAN; WANG, 2023), (DENK *et al.*, 2023), (CAPOLUPO *et al.*, 2023) e (TSILIOUKAS *et al.*, 2023).

Com relação a parte numérica do estudo das teorias alternativas, existem maneiras que simplificam as equações de campos como vimos na seção 3.2 e a implementação de códigos que solucionem essas equações dentro desses *frames* podem vir a ser úteis.

Em síntese, esta dissertação teve por objetivo principal a aplicação da TRG e de teorias modificadas $f(R)$ na descrição de objetos astrofísicos compactos, como as estrelas de nêutrons. Como uma possível continuação desse estudo, indicamos o uso de modelos mais complexos de matéria e a aplicação de ferramentas avançadas de análise de dados para obter EoS mais realistas.

Referências

ABBOTT, B. P. *et al.* Tests of general relativity with GW150914. **Physical Review Letters**, American Physical Society (APS), v. 116, n. 22, mai 2016.

ABBOTT, B. P. *et al.* First search for gravitational waves from known pulsars with advanced LIGO. **The Astrophysical Journal**, v. 879, n. 1, p. 10, 2019.

ABBOTT, R. *et al.* GW190814: Gravitational waves from the coalescence of a 23 solar mass black hole with a 2.6 solar mass compact object. **The Astrophysical Journal Letters**, American Astronomical Society, v. 896, n. 2, p. L44, jun. 2020.

AKIYAMA, K. *et al.* First M87 event horizon telescope results. iv. imaging the central supermassive black hole. **The Astrophysical Journal Letters**, v. 875, 2019.

AKRAMI, Y. *et al.* Planck2018 results: X. constraints on inflation. **Astronomy and Astrophysics**, EDP Sciences, v. 641, p. A10, set. 2020.

BORLAF, A. *et al.* The missing light of the hubble ultra deep field. **Astronomy and Astrophysics**, EDP Sciences, v. 621, p. A133, 2019.

BRANS, C.; DICKE, R. H. Mach's principle and a relativistic theory of gravitation. **Physical Review**, American Physical Society, v. 124, p. 925–935, Nov 1961.

BRITANNICA, E. of E. **Charles Babbage**. Out 2023. Encyclopedia Britannica. Disponível em: <<https://www.britannica.com/biography/Charles-Babbage>>. Acesso em: 19/11/2023.

CAPOLUPO, A.; MARIA, G. D.; MONDA, S.; QUARANTA, A.; SERAO, R. **Quantum Field Theory of neutrino mixing in spacetimes with torsion**. 2023.

CAPOZZIELLO, S.; LAURENTIS, M. D. Extended theories of gravity. **Physics Reports**, v. 509, n. 4-5, p. 167–321, 2011.

CARROLL, S. M. **Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity**. [S.l.]: Addison-Wesley, 2003.

DENK, V.; VASAK, D.; KIRSCH, J. **Torsion waves in Covariant Canonical Gauge Theory of Gravity**. 2023.

DUTRA, M.; LENZI, C. H.; PAULA, W. de; LOURENÇO, O. Neutron star crustal properties from relativistic mean-field models and bulk parameters effects. **The European Physical Journal A**, Springer Science and Business Media LLC, v. 57, n. 8, ago. 2021.

- DUTRA, M.; LOURENÇO, O.; AVANCINI, S. S.; CARLSON, B. V.; DELFINO, A.; MENEZES, D. P.; PROVIDÊNCIA, C.; TYPEL, S.; STONE, J. R. Relativistic mean-field hadronic models under nuclear matter constraints. **Phys. Rev. C**, American Physical Society, v. 90, p. 055203, Nov 2014.
- EINSTEIN, A. Ist die trägheit eines körpers von seinem energieinhalt abhängig? **Annalen der Physik**, v. 323, n. 13, p. 639–641, 1905.
- EINSTEIN, A. Zur elektrodynamik bewegter körper. **Annalen der Physik**, v. 322, n. 10, p. 891–921, 1905.
- EINSTEIN, A. Über einen die erzeugung und verwandlung des lichtes betreffenden heuristischen gesichtspunkt. **Annalen der Physik**, v. 322, n. 6, p. 132–148, 1905.
- EINSTEIN, A. Die grundlage der allgemeinen relativitätstheorie. **Annalen der Physik**, v. 354, n. 7, p. 769–822, 1916.
- FARAONI, V.; GUNZIG, E. **Einstein frame or Jordan frame ?** 1999.
- FELICE, A. D.; TSUJIKAWA, S. $f(R)$ theories. **Living Reviews in Relativity**, v. 13, 2010.
- FEOLA, P.; FORTEZA, X. J.; CAPOZZIELLO, S.; CIANCI, R.; VIGNOLO, S. Mass-radius relation for neutron stars in $f(R) = R + \alpha R^2$ gravity: A comparison between purely metric and torsion formulations. **Physical Review D**, American Physical Society (APS), v. 101, n. 4, 2020.
- GLENDENNING, N. **Compact Stars: Nuclear Physics, Particle Physics and General Relativity**. [S.l.]: Springer New York, 2012. (Astronomy and Astrophysics Library). ISBN 9781468404913.
- HOWELL, E.; DOBRIJEVIC, D. **James Webb Space Telescope Blog**. 2023. Disponível em: <<https://www.space.com/21925-james-webb-space-telescope-jwst.html>>. Acesso em: 19/11/2023.
- IVANENKO, D. D.; KURDGELAI DZE, D. F. Hypothesis concerning quark stars. **Astrophysics**, v. 1, p. 251–252, 1965.
- JÄRV, L.; KUUSK, P.; SAAL, M. Scalar-tensor cosmology at the general relativity limit: Jordan versus Einstein frame. **Physical Review D**, American Physical Society (APS), v. 76, n. 10, Nov 2007.
- JIMÉNEZ, J. C.; PRETEL, J. M.; FRAGA, E. S.; JORÁS, S. E.; REIS, R. R. R^2 -gravity quark stars from perturbative QCD. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, IOP Publishing, v. 2022, n. 07, p. 017, Jul 2022.
- KACZMAREK, A. Z.; SZCZEŚNIAK, D. **The hybrid cosmology in the scalar-tensor representation of $f(\mathcal{G}, T)$ gravity**. 2023.
- LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. **The Classical Theory of Fields**. 4th. ed. Oxford: Butterworth-Heinemann, 1975. (Course of Theoretical Physics, v. 2). Translated from the Russian by M. Hamermesh.

- LENZI, C. H.; DUTRA, M.; LOUREÇO, O.; LOPES, L. L.; MENEZES, D. P. Dark matter effects on hybrid star properties. **The European Physical Journal C**, Springer Science and Business Media LLC, v. 83, n. 3, mar. 2023.
- LUNNEY, D. The origin of the elements and other implications of gravitational wave detection for nuclear physics. **4open**, EDP Sciences, v. 3, p. 14, 2020.
- MARIANI, M.; LUGONES, G. **Quark-hadron pasta phase in neutron stars: the role of medium-dependent surface and curvature tensions**. 2023.
- NAKAHARA, M. **Geometry, Topology and Physics**. Bristol, UK: Institute of Physics Publishing, 2003.
- NEWTON, I. **Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica**. Londini: Impensis Societatis Regiæ, 1687.
- OPPENHEIMER, J. R.; VOLKOFF, G. M. On massive neutron cores. **Phys. Rev.**, American Physical Society, v. 55, p. 374–381, Feb 1939.
- ÖZEL, F.; FREIRE, P. Masses, radii, and the equation of state of neutron stars. **Annual Review of Astronomy and Astrophysics**, v. 54, n. 1, p. 401–440, 2016.
- PRESS, W. H.; TEUKOLSKY, S. A.; VETTERLING, W. T.; FLANNERY, B. P. **Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing**. 3rd. ed. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2007.
- PRETEL, J. M. **Stellar structure in $f(R)$ and $f(R, T)$ theories of modified gravity**. 2021. 100 p. Thesis (Doutorado em Física) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2021.
- PRETEL, J. M.; JORÁS, S. E.; REIS, R. R. Strongest constraint in $f(R) = R + \alpha R^2$ gravity: stellar stability. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, IOP Publishing, v. 2020, n. 11, p. 048–048, nov. 2020.
- READ, J. S.; MARKAKIS, C.; SHIBATA, M.; URYU, K.; CREIGHTON, J. D. E.; FRIEDMAN, J. L. Measuring the neutron star equation of state with gravitational wave observations. **Physical Review D**, American Physical Society (APS), v. 79, n. 12, jun. 2009.
- RYDER, L. H. **Introduction to General Relativity**. Sam Francisco: W.H. Freeman and Company, 2009.
- SABBATA, V. D.; GASPERINI, M. **Introduction to Gravitation**. [S.l.]: World Scientific, 1985.
- SCHNEIDER, A. S.; ROBERTS, L. F.; OTT, C. D.; O’CONNOR, E. Equation of state effects in the core collapse of a $20 - M_{\odot}$ star. **Physical Review C**, American Physical Society (APS), v. 100, n. 5, nov. 2019.
- SCHWARZSCHILD, K. Über das gravitationsfeld eines massenpunktes nach der einsteinschen theorie. **Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften**, p. 189–196, 1916.

- SOTIRIOU, T. P.; FARAONI, V. $f(R)$ theories of gravity. **Reviews of Modern Physics**, v. 82, n. 1, p. 451–497, 2010.
- STAROBINSKY, A. A. A new type of isotropic cosmological models without singularity. **Physics Letters B**, v. 91, n. 1, p. 99–102, 1980.
- STEINER, A. W.; LATTIMER, J. M.; BROWN, E. F. The neutron star mass-radius relation and the equation of state of dense matter. **The Astrophysical Journal**, American Astronomical Society, v. 765, n. 1, p. L5, fev. 2013.
- TAN, J.; WANG, B. **Constraints on Brans-Dicke gravity from Black Hole-Neutron Star Gravitational Wave Events**. 2023.
- TELESCOPE, J. W. S. **How Can Webb Study the Early Universe?** 2023. Disponível em:
<<https://webbtelescope.org/contents/articles/how-can-webb-study-the-early-universe>>. Acesso em: 19/11/2023.
- TSILIOUKAS, S. A.; SARIDAKIS, E. N.; TZEREFOS, C. **Dark energy from topology change induced by microscopic Gauss-Bonnet wormholes**. 2023.
- WOJNAR, A. **Introduction to Stellar and Substellar Physics in Modified Gravity**. [S.l.]: Springer Nature Switzerland, 2023. 173–196 p.

Apêndice A - Desenvolvimento Algébrico

A.1 Variação do tensor de Ricci

Começamos com

$$\delta R_{\mu\sigma\nu}^{\rho} = \partial_{\sigma}\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\rho} - \partial_{\nu}\delta\Gamma_{\sigma\mu}^{\rho} + \delta\Gamma_{\sigma\lambda}^{\rho}\Gamma_{\nu\mu}^{\lambda} + \Gamma_{\sigma\lambda}^{\rho}\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\lambda} - \delta\Gamma_{\nu\lambda}^{\rho}\Gamma_{\sigma\mu}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho}\delta\Gamma_{\sigma\mu}^{\lambda}, \quad (\text{A.1})$$

e que a variação dos símbolos é um tensor embora os símbolos não seja, sendo assim,

$$\nabla_{\sigma}\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\rho} = \partial_{\sigma}\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\rho} + \Gamma_{\sigma\lambda}^{\rho}\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\lambda} - \Gamma_{\sigma\nu}^{\lambda}\delta\Gamma_{\lambda\mu}^{\rho} - \Gamma_{\sigma\mu}^{\lambda}\delta\Gamma_{\nu\lambda}^{\rho} \quad (\text{A.2})$$

$$\nabla_{\nu}\delta\Gamma_{\sigma\mu}^{\rho} = \partial_{\nu}\delta\Gamma_{\sigma\mu}^{\rho} + \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho}\delta\Gamma_{\sigma\mu}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda}\delta\Gamma_{\lambda\mu}^{\rho} - \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda}\delta\Gamma_{\sigma\lambda}^{\rho} \quad (\text{A.3})$$

$$\therefore \delta R_{\mu\sigma\nu}^{\rho} = \nabla_{\sigma}\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\rho} - \nabla_{\nu}\delta\Gamma_{\sigma\mu}^{\rho}, \quad (\text{A.4})$$

logo, obtemos,

$$\delta R_{\mu\nu} = \delta R_{\mu\rho\nu}^{\rho} = \nabla_{\rho}\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\rho} - \nabla_{\nu}\delta\Gamma_{\rho\mu}^{\rho}, \quad (\text{A.5})$$

expressão que podemos substituir em

$$\begin{aligned} \delta R &= R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} \\ &= R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + \nabla_{\sigma}(g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\sigma} - g^{\mu\sigma}\delta\Gamma_{\rho\mu}^{\rho}), \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

em que aplicamos a condição de metricidade.

Pela definição da conexão podemos aplicar uma regra de Leibniz tal que possamos obter uma expressão para a variação da mesma:

$$\Gamma_{\nu\mu}^{\sigma} = \frac{1}{2}g^{\sigma\alpha}(\partial_{\nu}g_{\mu\alpha} + \partial_{\mu}g_{\alpha\nu} - \partial_{\alpha}g_{\nu\mu}), \quad (\text{A.7})$$

$$\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\sigma} = \frac{1}{2}\delta g^{\sigma\alpha}(\partial_{\nu}g_{\mu\alpha} + \partial_{\mu}g_{\alpha\nu} - \partial_{\alpha}g_{\nu\mu}) + \frac{1}{2}g^{\sigma\alpha}(\partial_{\nu}\delta g_{\mu\alpha} + \partial_{\mu}\delta g_{\alpha\nu} - \partial_{\alpha}\delta g_{\nu\mu}), \quad (\text{A.8})$$

escrevendo as derivadas da variação da métrica em termos das derivadas covariantes:

$$\nabla_\gamma \delta g_{\mu\nu} = \partial_\gamma \delta g_{\mu\nu} - \Gamma_{\gamma\mu}^\alpha \delta g_{\alpha\nu} - \Gamma_{\gamma\nu}^\alpha \delta g_{\mu\alpha}, \quad (\text{A.9})$$

reescrevendo (A.8):

$$\begin{aligned} \delta\Gamma_{\nu\mu}^\sigma &= \frac{1}{2} \delta g^{\sigma\alpha} (\partial_\nu g_{\mu\alpha} + \partial_\mu g_{\alpha\nu} - \partial_\alpha g_{\nu\mu}) + \frac{1}{2} g^{\sigma\alpha} [\nabla_\nu (\delta g_{\mu\alpha}) + \Gamma_{\nu\mu}^\lambda \delta g_{\lambda\alpha} + \Gamma_{\nu\alpha}^\lambda \delta g_{\mu\lambda} \\ &\quad + \nabla_\mu (\delta g_{\alpha\nu}) + \Gamma_{\mu\alpha}^\lambda \delta g_{\lambda\nu} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \delta g_{\alpha\lambda} - \nabla_\alpha (\delta g_{\nu\mu}) - \Gamma_{\alpha\nu}^\lambda \delta g_{\lambda\mu} - \Gamma_{\alpha\mu}^\lambda \delta g_{\nu\lambda}], \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

portanto,

$$\begin{aligned} \delta\Gamma_{\nu\mu}^\sigma &= \frac{1}{2} \delta g^{\sigma\alpha} (\partial_\nu g_{\mu\alpha} + \partial_\mu g_{\alpha\nu} - \partial_\alpha g_{\nu\mu}) + g^{\sigma\alpha} \Gamma_{\nu\mu}^\lambda \delta g_{\alpha\lambda} \\ &\quad + \frac{1}{2} g^{\sigma\alpha} [\nabla_\nu (\delta g_{\mu\alpha}) + \nabla_\mu (\delta g_{\alpha\nu}) - \nabla_\alpha (\delta g_{\nu\mu})], \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

lembrando que,

$$\delta g_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} \delta g^{\mu\nu} \quad \delta g^{\alpha\beta} = -g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} \delta g_{\mu\nu}$$

e aplicando temos,

$$\begin{aligned} \delta\Gamma_{\nu\mu}^\sigma &= \frac{1}{2} \delta g^{\sigma\alpha} (\partial_\nu g_{\mu\alpha} + \partial_\mu g_{\alpha\nu} - \partial_\alpha g_{\nu\mu}) - g^{\sigma\alpha} \Gamma_{\nu\mu}^\lambda g_{\alpha\xi} g_{\lambda\chi} \delta g^{\xi\chi} \\ &\quad + \frac{1}{2} g^{\sigma\alpha} [\nabla_\nu (\delta g_{\mu\alpha}) + \nabla_\mu (\delta g_{\alpha\nu}) - \nabla_\alpha (\delta g_{\nu\mu})] \\ &= \delta g^{\sigma\alpha} g_{\lambda\alpha} \Gamma_{\nu\mu}^\lambda - g^{\sigma\alpha} \Gamma_{\nu\mu}^\lambda g_{\alpha\xi} g_{\lambda\chi} \delta g^{\xi\chi} + \frac{1}{2} g^{\sigma\alpha} [\nabla_\nu (\delta g_{\mu\alpha}) + \nabla_\mu (\delta g_{\alpha\nu}) - \nabla_\alpha (\delta g_{\nu\mu})] \\ &= \delta g^{\sigma\alpha} g_{\lambda\alpha} \Gamma_{\nu\mu}^\lambda - \delta_\xi^\sigma g_{\lambda\chi} \delta g^{\xi\chi} \Gamma_{\nu\mu}^\lambda + \frac{1}{2} g^{\sigma\alpha} [\nabla_\nu (\delta g_{\mu\alpha}) + \nabla_\mu (\delta g_{\alpha\nu}) - \nabla_\alpha (\delta g_{\nu\mu})] \\ &= \delta g^{\sigma\alpha} g_{\lambda\alpha} \Gamma_{\nu\mu}^\lambda - \delta g^{\sigma\alpha} g_{\lambda\alpha} \Gamma_{\nu\mu}^\lambda + \frac{1}{2} g^{\sigma\alpha} [\nabla_\nu (\delta g_{\mu\alpha}) + \nabla_\mu (\delta g_{\alpha\nu}) - \nabla_\alpha (\delta g_{\nu\mu})] \\ &= \frac{1}{2} g^{\sigma\alpha} [\nabla_\nu (\delta g_{\mu\alpha}) + \nabla_\mu (\delta g_{\alpha\nu}) - \nabla_\alpha (\delta g_{\nu\mu})]. \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Consequentemente,

$$\delta\Gamma_{\rho\mu}^\rho = \frac{1}{2} g^{\rho\alpha} [\nabla_\mu (\delta g_{\alpha\rho})]. \quad (\text{A.13})$$

Podemos reescrever em termos de $\delta g^{\alpha\beta}$

$$\begin{aligned}
 \delta\Gamma_{\nu\mu}^{\sigma} &= \frac{1}{2}g^{\sigma\alpha} [\nabla_{\nu} (-g_{\mu\beta}g_{\alpha\gamma}\delta g^{\beta\gamma}) + \nabla_{\mu} (-g_{\alpha\beta}g_{\nu\gamma}\delta g^{\beta\gamma}) - \nabla_{\alpha} (-g_{\nu\beta}g_{\mu\gamma}\delta g^{\beta\gamma})] \\
 &= -\frac{1}{2}g^{\sigma\alpha} [g_{\mu\beta}g_{\alpha\gamma}\nabla_{\nu} (\delta g^{\beta\gamma}) + g_{\alpha\beta}g_{\nu\gamma}\nabla_{\mu} (\delta g^{\beta\gamma}) - g_{\nu\beta}g_{\mu\gamma}\nabla_{\alpha} (\delta g^{\beta\gamma})] \\
 &= -\frac{1}{2} [g_{\mu\beta}\delta_{\gamma}^{\sigma}\nabla_{\nu} (\delta g^{\beta\gamma}) + \delta_{\beta}^{\sigma}g_{\nu\gamma}\nabla_{\mu} (\delta g^{\beta\gamma}) - g_{\nu\beta}g_{\mu\gamma}g^{\sigma\alpha}\nabla_{\alpha} (\delta g^{\beta\gamma})] \\
 &= -\frac{1}{2} [g_{\mu\beta}\nabla_{\nu} (\delta g^{\beta\sigma}) + g_{\nu\gamma}\nabla_{\mu} (\delta g^{\sigma\gamma}) - g_{\nu\beta}g_{\mu\gamma}\nabla^{\sigma} (\delta g^{\beta\gamma})],
 \end{aligned} \tag{A.14}$$

analogamente podemos dizer que,

$$\delta\Gamma_{\rho\mu}^{\rho} = -\frac{1}{2}g_{\beta\gamma} [\nabla_{\mu} (\delta g^{\beta\gamma})]. \tag{A.15}$$

Calculando a diferença

$$\begin{aligned}
 g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\sigma} - g^{\mu\sigma}\delta\Gamma_{\rho\mu}^{\rho} &= -\frac{g^{\mu\nu}}{2} [g_{\mu\beta}\nabla_{\nu} (\delta g^{\beta\sigma}) + g_{\nu\gamma}\nabla_{\mu} (\delta g^{\sigma\gamma}) - g_{\nu\beta}g_{\mu\gamma}\nabla^{\sigma} (\delta g^{\beta\gamma})] - \\
 &\quad -\frac{g^{\mu\sigma}}{2}g_{\beta\gamma} (\nabla_{\mu} (\delta g^{\beta\gamma})) \\
 &= -\frac{1}{2} [\delta_{\beta}^{\nu}\nabla_{\nu} (\delta g^{\beta\sigma}) + \delta_{\gamma}^{\mu}\nabla_{\mu} (\delta g^{\sigma\gamma}) - g_{\beta\gamma}\nabla^{\sigma} (\delta g^{\beta\gamma}) - g_{\beta\gamma}\nabla^{\sigma} (\delta g^{\beta\gamma})] \\
 &= -\frac{1}{2} [\nabla_{\beta} (\delta g^{\beta\sigma}) + \nabla_{\gamma} (\delta g^{\sigma\gamma}) - 2g_{\beta\gamma}\nabla^{\sigma} (\delta g^{\beta\gamma})] \\
 &= -\frac{1}{2} [2\nabla_{\gamma} (\delta g^{\sigma\gamma}) - 2g_{\beta\gamma}\nabla^{\sigma} (\delta g^{\beta\gamma})],
 \end{aligned} \tag{A.16}$$

então,

$$g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\sigma} - g^{\mu\sigma}\delta\Gamma_{\rho\mu}^{\rho} = g_{\beta\gamma}\nabla^{\sigma} (\delta g^{\beta\gamma}) - \nabla_{\gamma} (\delta g^{\sigma\gamma}), \tag{A.17}$$

Com isso voltamos a (A.6), logo,

$$\begin{aligned}
 \delta R &= R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + \nabla_{\sigma} (g_{\beta\gamma}\nabla^{\sigma} (\delta g^{\beta\gamma}) - \nabla_{\gamma} (\delta g^{\sigma\gamma})) \\
 &= R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + g_{\beta\gamma}\nabla_{\sigma}\nabla^{\sigma} (\delta g^{\beta\gamma}) - \nabla_{\sigma}\nabla_{\gamma} (\delta g^{\sigma\gamma}) \\
 &= R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\square (\delta g^{\mu\nu}) - \nabla_{\mu}\nabla_{\nu} (\delta g^{\mu\nu}).
 \end{aligned} \tag{A.18}$$

A.2 Termos de Superfície

Temos a seguinte expressão:

$$\int d^4x [f(R)\delta\sqrt{-g} + \sqrt{-g}f_R (R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\square (\delta g^{\mu\nu}) - \nabla_{\mu}\nabla_{\nu} (\delta g^{\mu\nu}))] \tag{A.19}$$

em que iremos nos atentar para os dois últimos termos

$$\int d^4x \sqrt{-g} f_R \nabla_\mu \nabla_\nu (\delta g^{\mu\nu}) \quad (\text{A.20})$$

$$\int d^4x \sqrt{-g} f_R g_{\mu\nu} \square (\delta g^{\mu\nu}) \quad (\text{A.21})$$

definindo os seguintes termos

$$M_\tau = f_R g_{\mu\nu} \nabla_\tau (\delta g^{\mu\nu}) - \delta g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} \nabla_\tau (f_R) \quad (\text{A.22})$$

$$N^\sigma = f_R \nabla_\gamma (\delta g^{\sigma\gamma}) - \delta g^{\sigma\gamma} \nabla_\gamma (f_R) \quad (\text{A.23})$$

além da combinação:

$$g^{\sigma\tau} M_\tau + N^\sigma = f_R g_{\mu\nu} \nabla^\sigma (\delta g^{\mu\nu}) - \delta g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} \nabla^\sigma (f_R) + f_R \nabla_\gamma (\delta g^{\sigma\gamma}) - \delta g^{\sigma\gamma} \nabla_\gamma (f_R) \quad (\text{A.24})$$

Tomando a derivada covariante de M_τ

$$\begin{aligned} \nabla^\tau M_\tau &= \nabla^\tau (f_R g_{\mu\nu} \nabla_\tau (\delta g^{\mu\nu})) - \nabla^\tau (\delta g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} \nabla_\tau (f_R)) \\ &= \nabla^\tau (f_R) g_{\mu\nu} \nabla_\tau (\delta g^{\mu\nu}) + f_R g_{\mu\nu} \nabla^\tau \nabla_\tau (\delta g^{\mu\nu}) - \nabla^\tau (\delta g^{\mu\nu}) g_{\mu\nu} \nabla_\tau (f_R) \\ &\quad - \delta g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} \nabla^\tau \nabla_\tau (f_R) \\ &= f_R g_{\mu\nu} \nabla^\tau \nabla_\tau (\delta g^{\mu\nu}) - \delta g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} \nabla^\tau \nabla_\tau (f_R) \\ &= f_R g_{\mu\nu} \square (\delta g^{\mu\nu}) - \delta g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} \square (f_R) \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

os zeros, no primeiro e terceiro termo, surgem da condição de metricidade. Integrando essa última expressão temos:

$$\int d^4x \sqrt{-g} \nabla^\tau M_\tau = \int d^4x \sqrt{-g} f_R g_{\mu\nu} \square (\delta g^{\mu\nu}) - \int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} \square (f_R) \quad (\text{A.26})$$

usando o teorema de Gauss-Stokes podemos dizer:

$$\int d^4x \sqrt{-g} f_R g_{\mu\nu} \square (\delta g^{\mu\nu}) = \int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} \square (f_R) + S_\square \quad (\text{A.27})$$

onde S_\square é um termo de superfície.

Analogamente para $\nabla_\sigma N^\sigma$

$$\begin{aligned}
 \nabla_\sigma N^\sigma &= \nabla_\sigma (f_R \nabla_\gamma (\delta g^{\sigma\gamma})) - \nabla_\sigma (\delta g^{\sigma\gamma} \nabla_\gamma (f_R)) \\
 &= \nabla_\sigma (f_R) \nabla_\gamma (\delta g^{\sigma\gamma}) + f_R \nabla_\sigma \nabla_\gamma (\delta g^{\sigma\gamma}) - \nabla_\sigma (\delta g^{\sigma\gamma}) \nabla_\gamma (f_R) - \delta g^{\sigma\gamma} \nabla_\sigma \nabla_\gamma (f_R) \\
 &= f_R \nabla_\sigma \nabla_\gamma (\delta g^{\sigma\gamma}) - \delta g^{\sigma\gamma} \nabla_\sigma \nabla_\gamma (f_R)
 \end{aligned} \tag{A.28}$$

os zeros, novamente, do primeiro e terceiro termo, surgem da condição de metricidade. Integrando essa última expressão temos:

$$\int d^4x \sqrt{-g} \nabla_\sigma N^\sigma = \int d^4x \sqrt{-g} f_R \nabla_\sigma \nabla_\gamma (\delta g^{\sigma\gamma}) - \int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\sigma\gamma} \nabla_\sigma \nabla_\gamma (f_R) \tag{A.29}$$

novamente usando o teorema de Gauss-Stokes:

$$\int d^4x \sqrt{-g} f_R \nabla_\sigma \nabla_\gamma (\delta g^{\sigma\gamma}) = \int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\sigma\gamma} \nabla_\sigma \nabla_\gamma (f_R) + S_\sigma \tag{A.30}$$

onde S_σ é um termo de superfície.

Assim voltando a (A.19):

$$\int d^4x \sqrt{-g} \left[f_R R_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} \square f_R - \nabla_\mu \nabla_\nu f_R - \frac{1}{2} f(R) g_{\mu\nu} \right] \delta g^{\mu\nu} + \text{termos de superfície} \tag{A.31}$$

Apêndice B - Desenvolvimento da Solução de Schwarzschild e TOV

Neste apêndice encontra-se o desenvolvimento algébrico para a obtenção das equações TOV visto o formalismo presente no capítulo 2.

B.1 Unidades de Medida

No desenvolvimento e manipulação das expressões assumimos a convenção do sistema natural de unidades SN, que adota,

$$G = c = \hbar = 1.$$

Onde, G é a constante Newtoniana de gravitação universal, c é a velocidade da luz no vácuo e \hbar é a constante de Planck. Todavia, no SI, temos que,

$$G = 6,67438 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg}\cdot\text{s}^2$$

$$c = 299792458 \text{ m/s}$$

$$\hbar = 1,05457266 \text{ km}\cdot\text{m}^2/\text{s}$$

B.2 Solução de Schwarzschild

A primeira solução analítica para as equações de Einstein recebeu o nome de solução de Schwarzschild em homenagem a seu descobridor Karl Schwarzschild, que a desenvolveu em 1915 pouco tempo após Einstein publicar a TRG (SCHWARZSCHILD, 1916).

Tal solução considera que o espaço é curvado por objeto que tenha simetria esférica e seja estático, ou seja, não havendo dependência temporal das componentes da métrica.

Partimos de um elemento de linha do tipo

$$ds^2 = W(r)dt^2 - U(r)dx^2 - V(r)r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (\text{B.1})$$

pode-se notar que as funções $W(r)$, $U(r)$ e $V(r)$ descrevem, essencialmente, o quanto o espaço-tempo se curva na presença a uma fonte. Reescrevendo um nova coordenada que seja $\bar{r}^2 = V(r)r^2$ a título de facilitar nossas contas

$$d\bar{s}^2 = W(\bar{r})d\bar{t}^2 - U(\bar{r})d\bar{r}^2 - \bar{r}^2(\sin^2\bar{\theta}d\bar{\phi}^2 + d\bar{\theta}^2). \quad (\text{B.2})$$

Levando em conta que as funções $W(r)$ e $U(r)$ assegurem a classificações das coordenadas, isto é, tipo tempo continue sendo tipo tempo e tipo espaço continue tipo espaço, além de desprezar a barra a título de facilidade de escrita.

A função exponencial é um exemplo de função crescente e monótona que assegura a escolha, ou seja:

$$\begin{aligned} W(r) &= \exp(2\nu(r)) \\ U(r) &= \exp(2\lambda(r)), \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

assim o tensor métrico pode ser escrito como

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \exp(2\nu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\exp(2\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}. \quad (\text{B.4})$$

$$(\text{B.5})$$

A partir desse ponto busca-se determinar o formato do tensor de Ricci dentro desse contexto.

Devemos, inicialmente, calcular os termos não nulos da conexão, que se tratando da

TRG, se resumem aos símbolos de Christoffel. Assim os termos não nulos são:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{11}^1 &= \lambda', \\
 \Gamma_{00}^1 &= \nu' \exp[2(\nu - \lambda)], \\
 \Gamma_{22}^1 &= -r \exp(-2\lambda), \\
 \Gamma_{33}^1 &= -r \sin^2 \theta \exp(-2\lambda), \\
 \Gamma_{33}^2 &= -\sin \theta \cos \theta, \\
 \Gamma_{10}^0 &= \Gamma_{01}^0 = \nu', \\
 \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r}, \\
 \Gamma_{13}^3 &= \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r}, \\
 \Gamma_{23}^3 &= \Gamma_{32}^3 = \cot \theta,
 \end{aligned} \tag{B.6}$$

onde as linhas correspondem a ordem das derivadas com relação a coordenada r . Agora, se substituirmos no tensor de Ricci obtemos,

$$R_{00} = \exp[2(\nu - \lambda)] \left(-\nu'' + \lambda' \nu' - \nu'^2 - \frac{2\nu'}{r} \right), \tag{B.7}$$

$$R_{11} = \nu'' - \lambda' \nu' - \frac{2\lambda'}{r} + \nu'^2, \tag{B.8}$$

$$R_{22} = \exp(-2\lambda) [1 + r\nu' - r\lambda'] - 1, \tag{B.9}$$

$$R_{33} = \sin^2 \theta R_{22}. \tag{B.10}$$

As equações devem ser consideradas num universo sem matéria, ou seja, no vácuo, logo, $R_{\mu\nu} = 0$, e como a exponencial é sempre não nula as duas primeiras equações acima se resumem a,

$$-\nu'' + \lambda' \nu' - \nu'^2 - \frac{2\nu'}{r} = 0, \tag{B.11}$$

$$\nu'' - \lambda' \nu' - \frac{2\lambda'}{r} + \nu'^2 = 0, \tag{B.12}$$

das quais se fizermos uma combinação obtemos a seguinte relação:

$$\lambda'(r) + \nu'(r) = 0 \rightarrow \lambda(r) + \nu(r) = \text{const.} \tag{B.13}$$

Porém, analisando a curvatura do espaço tempo, num ponto longínquo do objeto massivo, a métrica tende a ser plana (Minkowski), i.e., $r \rightarrow \infty \implies \lambda(r) = \nu(r) = 0$. Significando numa “perda” de curvatura. Todavia a soma, $\lambda(r) + \nu(r) = \text{const.}$, vale para qualquer

região dentro do espaço, logo, $\lambda(r) + \nu(r) = 0$. Aplicando tal análise em R_{22} ,

$$\begin{aligned}
 \exp(-2\lambda) [1 + r\nu'(r) - r\lambda'(r)] - 1 &= 0 \\
 \exp(2\nu(r)) [1 + r(2\nu'(r))] &= 1 \\
 [\exp(2\nu(r))r]' &= 1 \quad (\text{integrando com relação a } r) \\
 \exp [2\nu(r)] r &= r - K \quad (\text{o sinal foi por conveniência}) \\
 \exp [2\nu(r)] &= 1 - \frac{K}{r} = \exp [-2\lambda(r)],
 \end{aligned} \tag{B.14}$$

assim, o elemento de linha (B.1),

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{K}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{K}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(\sin^2\theta d\phi^2 + d\theta^2). \tag{B.15}$$

K é uma constante com unidade de comprimento, e é interpretada como a massa geométrica do corpo central, de modo que $K = 2M$ (no SI $K = 2GM/c^2$). Reescrevemos o elemento de linha em seu formato final como

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(\sin^2\theta d\phi^2 + d\theta^2). \tag{B.16}$$

onde M é a massa total do objeto, sendo

$$M = 4\pi \int_0^R \rho(r)r^2 dr \tag{B.17}$$

Todavia essa solução possui algumas peculiaridades que valem ser ressaltadas:

1. Divergência em $r = 0$
2. Divergência em $r = 2M$

esses problemas são conhecidos como singularidades, a solução obtida por Schwarzschild prevê algumas peculiaridades. Em $r = 0$ realmente temos um problema de divergência que nos fornece os buracos negros que são objetos físicos de extrema importância para o entendimento acerca do universo. Porém em $r = 2M$ temos o que é conhecido como singularidade de coordenada e pode ser contornado com uma mudança de coordenada, tal valor é conhecido por delimitar uma região conhecida como horizonte de eventos.

Para esse valor, atribui-se o nome de *Raio de Schwarzschild* e no SI o mesmo possui o formato

$$r_s = \frac{2GM}{c^2} \tag{B.18}$$

em que G é a constante newtoniana de gravitação universal, M a massa do objeto e c a velocidade da luz.

B.3 TOV

Para deduzir as equações TOV, consideramos a métrica de Schwarzschild, porém, agora, utilizaremos também o tensor energia-momento, $T_{\mu\nu}$, parametrizado na forma de um fluido perfeito, i.e.,

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P)U_\mu U_\nu - P g_{\mu\nu}, \quad (\text{B.19})$$

onde U_μ é a quadri-velocidade do fluido e que respeite a condição

$$U^\mu U_\mu = 1, \quad (\text{B.20})$$

e ρ e P , são, respectivamente, a densidade de energia e a pressão.

Levando em conta o fato do fluido perfeito estar parado no referencial próprio, tensor energia-momento assume o formato

$$T^\mu{}_\nu = \text{diagonal}(\rho, -P, -P, -P). \quad (\text{B.21})$$

Trabalhando com a equação de (2.1), na forma mista

$$G^\mu{}_\nu = R^\mu{}_\nu - \frac{1}{2}R \quad (\text{B.22})$$

para obter a expressão para o tensor misto de Ricci basta que,

$$R^\mu{}_\nu = g^{\mu\lambda} R_{\lambda\nu}, \quad (\text{B.23})$$

ou seja, para obter os análogos basta pegarmos os resultados obtidos na seção anterior e multiplicar pelo inverso da métrica. Já para obter o escalar de curvatura

$$\begin{aligned} R &= g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \\ &= g^{00} R_{00} + g^{11} R_{11} + g^{22} R_{22} + g^{33} R_{33} \\ &= \frac{2 \exp(-2\lambda)}{r^2} [-r^2 \nu'' - r^2 \nu'^2 + r^2 \lambda' \nu' - 2r \nu' + 2r \lambda' - 1 + \exp(2\lambda)]. \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

As componentes do tensor de Einstein se tornam:

$$\begin{aligned}
 G^0_0 &= \frac{\exp(-2\lambda)}{r^2} [1 - 2r\lambda' - \exp(2\lambda)] = -\frac{d}{dr} [r(1 - \exp(-2\lambda))], \\
 G^1_1 &= \frac{\exp(-2\lambda)}{r^2} [2r\nu' + 1 - \exp(2\lambda)], \\
 G^2_2 &= \frac{\exp(-2\lambda)}{r} [r\nu'' + r\nu'^2 - r\lambda'\nu' + \nu' - \lambda'], \\
 G^3_3 &= G^2_2.
 \end{aligned} \tag{B.25}$$

Ademais, podemos escrever a lei de conservação de T^μ_ν tal que,

$$\begin{aligned}
 \nabla_\mu T^\mu_\nu &= 0, \\
 \partial_\mu T^\mu_\nu + \Gamma^\mu_{\alpha\mu} T^\alpha_\nu - \Gamma^\alpha_{\nu\mu} T^\mu_\alpha &= 0,
 \end{aligned} \tag{B.26}$$

para $\nu = 1$, ou seja, considerando as coordenadas radiais, temos:

$$\partial_\mu T^\mu_1 + \Gamma^\mu_{\alpha\mu} T^\alpha_1 - \Gamma^\alpha_{1\mu} T^\mu_\alpha = 0, \tag{B.27}$$

onde somente não são zeros

$$\begin{aligned}
 \Gamma^0_{10} &= \nu', \\
 \Gamma^1_{11} &= \lambda', \\
 \Gamma^3_{13} &= \Gamma^2_{12} = \frac{1}{r},
 \end{aligned}$$

devido a particularidade de ser estático e esfericamente simétrico, $\partial_0 = 0$ e $\partial_2 = \partial_3 = 0$, desconsideramos derivadas com relação coordenada temporal e as coordenadas angulares. Logo a única derivada que sobra é a com relação a coordenada r ($\partial_1 T^1_1 = -\partial_1 P = -\frac{\partial P}{\partial r}$). Reduzimos a expressão anterior a:

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial P}{\partial r} - \nu'P - \lambda'P - \frac{2P}{r} - \nu'\rho + \lambda'P + \frac{2P}{r} &= 0, \\
 \frac{\partial P}{\partial r} &= -\nu'(\rho + P),
 \end{aligned} \tag{B.28}$$

onde $\rho(r)$ é a densidade matéria-energia num volume infinitesimal $4\pi r^2 dr$, temos

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r). \tag{B.29}$$

Resolvendo as equações de Einstein temos, levando em conta unidades naturais:

$$\begin{aligned}
 G^0_0 &= 8\pi\rho, \\
 \frac{\exp(-2\lambda)}{r^2} [2r\lambda' - 1 + \exp(2\lambda)] &= 8\pi\rho, \\
 \exp(-2\lambda) [2r\lambda' - 1 + \exp(2\lambda)] &= 2(2\pi r^2 \rho), \\
 \frac{d}{dr} (-r \exp(-2\lambda) + r) &= \frac{d}{dr} (2m(r)), \\
 r(-\exp(-2\lambda) + 1) &= 2m(r), \\
 \exp(-2\lambda) &= 1 - \frac{2m(r)}{r}.
 \end{aligned} \tag{B.30}$$

Assim relacionando: $G^0_0 - G^1_1$ temos:

$$\begin{aligned}
 \frac{\exp(-2\lambda)}{r^2} [2r\lambda' - 1 + \exp(2\lambda)] + \frac{\exp(-2\lambda)}{r^2} [2r\nu' + 1 - \exp(2\lambda)] &= 8\pi(\rho + P) \\
 \frac{2}{r} \exp(-2\lambda)\lambda' + \frac{2}{r} \exp(-2\lambda)\nu' &= 8\pi(\rho + P)
 \end{aligned} \tag{B.31}$$

Porém, longe da matéria que curva o espaço-tempo temos que recuperar o espaço de Minkowski logo:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \exp(-2\lambda) = \lim_{r \rightarrow \infty} 1 - \frac{2m(r)}{r} = 1. \tag{B.32}$$

Ademais, trabalhando a expressão (B.30)

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dr} \exp(-2\lambda) &= \frac{d}{dr} \left(1 - \frac{2m(r)}{r} \right), \\
 -2\lambda' \exp(-2\lambda) &= \frac{1}{r}(-2m') + \frac{2m(r)}{r^2}, \\
 \lambda' \exp(-2\lambda) &= \frac{m'r - 2m(r)}{r^2}, \\
 m' &= 4\pi r^2 \rho(r), \\
 \lambda' \exp(-2\lambda) &= 4\pi r \rho(r) - \frac{m(r)}{r^2},
 \end{aligned} \tag{B.33}$$

assim, substituindo na soma das componentes do tensor de Einstein (B.31)

$$\begin{aligned}
 \frac{2}{r} \exp(-2\lambda)\lambda' + \frac{2}{r} \exp(-2\lambda)\nu' &= 8\pi(\rho + P), \\
 \frac{2}{r} \left(4\pi r \rho(r) - \frac{m(r)}{r^2} \right) + \frac{2}{r} \left(1 - \frac{2m(r)}{r} \right) \nu' &= 8\pi P + 8\pi\rho, \\
 \left(8\pi\rho(r) - \frac{2m(r)}{r^3} \right) + \left(\frac{2}{r} - \frac{4m(r)}{r^2} \right) \nu' &= 8\pi P + 8\pi\rho, \\
 \left(\frac{2}{r} - \frac{4m(r)}{r^2} \right) \nu' &= 8\pi P + \frac{2m(r)}{r^3} \times (r^3/2), \\
 (r^2 - 2m(r)r) \nu' &= 4\pi r^3 P + m(r), \\
 \nu' &= \frac{4\pi r^3 P + m(r)}{r^2 - 2m(r)r}.
 \end{aligned} \tag{B.34}$$

Substituindo o resultado encontrado na expressão (B.28), temos a Equação de Tolman-Oppenheimer-Volkoff

$$\frac{dP(r)}{dr} = -[P(r) + \rho(r)] \left(\frac{4\pi r^3 P + m(r)}{r^2 - 2m(r)r} \right), \tag{B.35}$$

que é resolvida juntamente com

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r). \tag{B.36}$$

FOLHA DE REGISTRO DO DOCUMENTO

1. CLASSIFICAÇÃO/TIPO DM	2. DATA 31 de janeiro de 2024	3. DOCUMENTO Nº DCTA/ITA/DM-001/2024	4. Nº DE PÁGINAS 75
5. TÍTULO E SUBTÍTULO: Relatividade geral e teorias alternativas aplicadas à astrofísica			
6. AUTOR(ES): Anderson Francisco Coelho			
7. INSTITUIÇÃO(ÕES)/ÓRGÃO(S) INTERNO(S)/DIVISÃO(ÕES): Instituto Tecnológico de Aeronáutica – ITA			
8. PALAVRAS-CHAVE SUGERIDAS PELO AUTOR: Relatividade Geral; Teorias Alternativas; Astrofísica.			
9. PALAVRAS-CHAVE RESULTANTES DE INDEXAÇÃO: Relatividade; Estrelas de nêutrons; Equações de estado; Astrofísica; Física nuclear; Física.			
10. APRESENTAÇÃO: <input checked="" type="checkbox"/> Nacional <input type="checkbox"/> Internacional ITA, São José dos Campos. Curso de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Física. Área de Física Nuclear. Orientador: Prof. Dr. Odilon Lourenço da Silva Filho. Coorientador: Prof. Dr. Pedro José Pompeia. Defesa em 29/01/2024. Publicada em 2024.			
11. RESUMO: A Relatividade Geral (RG) é o modelo vigente que corresponde a gravitação clássica desenvolvido por Albert Einstein e possui diversas aplicações astrofísicas como por exemplo as equações de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) que servem para o estudo do perfil de estrelas de nêutrons. Todavia, a RG precisa de correções com intuito de abranger mais questões acerca do Universo. Neste âmbito, a presente dissertação investiga teorias alternativas à RG, com um foco especial nas teorias $f(R)$. O estudo explora as implicações dessas teorias, tendo como foco principal na aplicação das equações TOV. O principal objeto de investigação é o modelo de Starobinsky específico dentro da classe $f(R)$. Analisamos a utilidade das equações TOV modificadas para compreender a estrutura e as propriedades físicas de objetos astrofísicos, como estrelas de nêutrons, dentro do contexto do modelo de Starobinsky. Este trabalho visa contribuir para o entendimento mais amplo das teorias $f(R)$ e a sua aplicação prática no campo da astrofísica.			
12. GRAU DE SIGILO: <input checked="" type="checkbox"/> OSTENSIVO <input type="checkbox"/> RESERVADO <input type="checkbox"/> SECRETO			