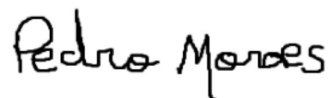


Tese apresentada à Pró-Reitoria de Pós-Graduação do Instituto Tecnológico de Aeronáutica, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutora em Ciências no Programa de Pós-Graduação em Física, Área de Física Nuclear.

Iolanda dos Santos Farias

**COSMOGRAFIA DAS TEORIAS $F(R, T)$ DE
GRAVIDADE MODIFICADA**

Tese aprovada em sua versão final pelos abaixo assinados:



Prof. Dr. Pedro Henrique Ribeiro da Silva Moraes

Orientador

Prof. Dra. Emília Villani

Pró-Reitora de Pós-Graduação

Campo Montenegro
São José dos Campos, SP - Brasil
2023

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
Divisão de Informação e Documentação

Farias, Iolanda dos Santos
COSMOGRAFIA DAS TEORIAS $f(R, T)$ DE GRAVIDADE MODIFICADA / Iolanda dos Santos Farias.
São José dos Campos, 2023.
95f.

Tese de Doutorado – Curso de Física. Área de Física Nuclear – Instituto Tecnológico de Aeronáutica, 2023. Orientador: Prof. Dr. Pedro Henrique Ribeiro da Silva Moraes.

1. Cosmologia. 2. Gravidade. 3. Universo. I. Instituto Tecnológico de Aeronáutica. II. Título.

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

FARIAS, Iolanda dos Santos. **COSMOGRAFIA DAS TEORIAS $f(R, T)$ DE GRAVIDADE MODIFICADA**. 2023. 95f. Tese de Doutorado – Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos.

CESSÃO DE DIREITOS

NOME DA AUTORA: Iolanda dos Santos Farias

TÍTULO DO TRABALHO: COSMOGRAFIA DAS TEORIAS $f(R, T)$ DE GRAVIDADE MODIFICADA.

TIPO DO TRABALHO/ANO: Tese / 2023

É concedida ao Instituto Tecnológico de Aeronáutica permissão para reproduzir cópias desta tese e para emprestar ou vender cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. A autora reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta tese pode ser reproduzida sem a autorização da autora.

Iolanda dos Santos Farias
Vila das Acácias, 50
12.228-901 – São José dos Campos–SP

COSMOGRAFIA DAS TEORIAS $F(R, T)$ DE GRAVIDADE MODIFICADA

Iolanda dos Santos Farias

Composição da Banca Examinadora:

Prof. Dr. Manuel Máximo Bastos Malheiro de Oliveira	Presidente	-	ITA
Prof. Dr. Pedro Henrique Ribeiro da Silva Moraes	Orientador	-	ITA
Prof. Dr. Wayne Leonardo Silva de Paula	Membro Interno	-	ITA
Prof. Dr. Rodolfo Valentim da Costa Lima	Membro Externo	-	Unifesp
Prof. Dr. João Rafael dos Santos	Membro Externo	-	UFCG

Às memórias de minha amada irmã Ione Farias e de minha querida prima Luciana Ferreira. Aos meus pais, Rosivânia e José Carlos, por terem feito de mim o que sou hoje. E à Jociele, por quem e para quem tento ser uma pessoa melhor a cada dia.

Agradecimentos

Na finalização desta importante etapa de minha vida acadêmica, gostaria de fazer meus singelos agradecimentos:

Ao meu orientador, Dr. Pedro Henrique Ribeiro da Silva Moraes, que com muita competência e paciência me orientou na realização deste trabalho.

A todo o pessoal do Programa de Pós-Graduação em Física do ITA, em especial, ao professor Dr. Manuel Malheiro, que com seus esforços e dedicação, tornou-se um verdadeiro “pai” para o Departamento.

A todos os professores que tive ao longo de toda minha vida, desde minha primeira professora “Tia Mariquinha”, passando por todos os meus professores da educação básica, representados aqui pela professora Silvaneide Rodrigues, meus professores de graduação, em especial o professor Dr. Samuel Albuquerque, que me orientou durante meu trabalho de conclusão de curso e, por fim, meus professores da pós-graduação (mestrado e doutorado). Todos vocês foram parte significante de minha formação. Meu muito obrigada eterno a todos.

Aos novos amigos que fiz durante essa jornada, e aos amigos de sempre, por toda amizade e apoio.

Aos meus familiares, em especial, meus queridos e amados irmãos Ivo e Matheus, minha tia-irmã Maria Aparecida, às minhas amadas sobrinhas Luíza, Nicolly e Thayssa, e às minhas avós Severina e Maria de Lourdes.

À CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pela bolsa de estudos que possibilitou a realização deste trabalho.

E a mim mesma, por ter tido paciência para não jogar tudo pelos ares nesses últimos 4 anos.

"All in all it's just another brick in the wall."

— PINK FLOYD

Resumo

A descoberta da expansão acelerada do Universo colocou o Modelo Padrão da Cosmologia diante de enormes desafios teóricos, que têm nos chamados “problemas da constante cosmológica” e “da coincidência” seus principais representantes. A dificuldade do modelo Λ CDM em explicar tais problemas abriu espaço para o desenvolvimento de teorias de gravidade modificada, que buscam uma forma alternativa à Relatividade Geral de Einstein para explicar os principais enigmas cósmicos. Contudo, nos últimos anos, esses cenários alternativos se tornaram tão numerosos que o surgimento de técnicas que sejam independentes do modelo e que, ao mesmo tempo, ajudem a discriminar entre eles se tornou algo imprescindível. A Cosmografia, como o estudo cinemático do Universo, talvez seja a maior representante dessa classe de técnicas. Este trabalho tem como principal objetivo obter a cosmografia das teorias de gravidade modificada $f(R, T)$, com o intuito de oferecer uma ferramenta observacional para selecionar modelos cosmologicamente viáveis.

Abstract

The discovery of the accelerated expansion of the Universe placed the Standard Model of cosmology in front of enormous theoretical challenges, whose main representatives are the so-called cosmological constant and coincidence problems. The difficulty of the Λ CDM model in explaining such problems opened space for the development of theories of modified gravity, which seek an alternative way to Einstein's general relativity to explain the main cosmic enigmas. However, in recent years, these alternative scenarios have become so numerous that the emergence of techniques that are model-independent and that, at the same time, help to discriminate between them has become imperative. Cosmography, as the cinematic study of the universe, is perhaps the best representative of this class of techniques. The main objective of this work is to obtain the cosmography of the theories of modified gravity $f(R, T)$, in order to offer an observational tool to select cosmologically viable models.

Lista de Abreviaturas e Siglas

CPL	Chevallier-Polarski-Linder
EE	Energia Escura
FLRW	Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker
ME	Matéria Escura
PC	Parâmetros Cosmográficos
RG	Relatividade Geral
TEM	Tensor Energia-Momento

Sumário

1	INTRODUÇÃO	12
2	A RELATIVIDADE GERAL E O MODELO COSMOLÓGICO PADRÃO	16
2.1	A teoria da Relatividade Geral	16
2.2	O Modelo Cosmológico Padrão	18
3	COSMOGRAFIA	21
3.1	A Abordagem Cosmográfica	21
3.2	A Distância de Luminosidade	24
3.3	O aparato Cosmográfico	32
4	COSMOGRAFIA DA TEORIA DE GRAVIDADE $f(R)$	36
4.1	Teoria de Gravidade $f(R)$	36
4.2	Cosmografia da Teoria de Gravidade $f(R)$	38
5	COSMOGRAFIA DA TEORIA DE GRAVIDADE $f(R, T)$	44
5.1	A Teoria $f(R, T)$ de Gravidade Modificada	44
5.2	Cosmografia da Teoria de Gravidade $f(R, T)$	46
5.3	Cosmografia em Diferentes Cenários de Energia Escura	51
5.3.1	O cenário Λ CDM	56
5.3.2	Modelos de quiescência	56
5.3.3	Energia escura em evolução: quintessência	57
6	USANDO COSMOGRAFIA PARA RESTRINGIR MODELOS DE GRAVIDADE $f(R, T)$	59

6.1	Modelo $f(\mathbf{R}, \mathbf{T}) = \mathbf{R} + \alpha\mathbf{T}^{1/2}$	60
6.2	Modelo $f(\mathbf{R}, \mathbf{T}) = \alpha\mathbf{R}^n + \beta\mathbf{T}^{1/2}$	61
6.3	Modelo $f(\mathbf{R}, \mathbf{T}) = \alpha\mathbf{R} + \beta\mathbf{R}^n + \gamma\mathbf{T}^{1/2}$	62
7	CONDIÇÕES DE ENERGIA COSMOGRÁFICAS	67
7.1	Condições de Energia	67
7.2	Condições de Energia Dentro da Gravidade $f(\mathbf{R}, \mathbf{T})$	70
7.3	Condições de Energia e Cosmografia	73
7.4	Restringindo Modelos de Gravidade $f(\mathbf{R}, \mathbf{T})$ Usando Condições de Energia Cosmográficas	76
7.4.1	Modelo $f(\mathbf{R}, \mathbf{T}) = f(\mathbf{R}) + f(\mathbf{T})$	76
7.4.2	Cenários de energia escura	77
8	CONCLUSÕES	83
	REFERÊNCIAS	87

1 INTRODUÇÃO

No final dos anos 1990, os trabalhos de dois grupos independentes, que faziam pesquisas sobre supernovas tipo Ia, indicaram que o Universo expande de forma acelerada (RIESS *et al.*, 1998; PERLMUTTER *et al.*, 1999). Recentemente, outros experimentos de naturezas diferentes, tais como supernovas tipo Ia, radiação cósmica de fundo em micro-ondas, oscilações acústicas de bárions, entre outros, confirmaram esse resultado (MIAO *et al.*, 2011). De forma que hoje a aceleração cósmica não só é uma característica consolidada da Cosmologia, como também constitui um dos seus maiores enigmas, já que o mecanismo físico que origina essa aceleração ainda não é claro. A forma mais comum para lidar com a aceleração do Universo é assumir que além da matéria padrão, existe um fluido de natureza exótica que influencia a dinâmica cósmica, onde devido à falta de conhecimentos sobre sua natureza física, este é geralmente referido como energia escura (EE). Tal fluido exhibe um parâmetro de equação de estado negativo, o qual neutraliza a ação atrativa da gravidade. Sua pressão negativa revela sua natureza não bariônica e exótica, uma vez que não existe na matéria comum tal propriedade.

De acordo com a teoria quântica de campos, a constante cosmológica Λ , introduzida por Einstein em seu modelo estático de universo, pode ser interpretada como uma contribuição de energia do vácuo, e naturalmente leva a um parâmetro de equação de estado negativo, com densidade de energia positiva e pressão negativa. Tais características colocam Λ como principal candidato a resolver o quebra-cabeça da aceleração cósmica, uma vez que sua pressão negativa fornece o efeito de anti-gravidade necessário para acelerar a expansão do Universo. O correspondente modelo que daí emerge, o qual é derivado resolvendo as equações de campo da relatividade geral (RG) com a adição da constante cosmológica, é conhecido como Λ CDM (CDM, do inglês, *cold dark matter*), que hoje tem o *status* de modelo cosmológico Padrão, pelas razões que, além de ajustar excelentemente os dados observacionais disponíveis, possui a simplicidade de se basear em um pequeno número de parâmetros cosmológicos e não possui quaisquer termos adicionais *ad hoc* (PADMANABHAN, 2003; CERVANTES-COTA; SMOOT, 2011).

Apesar de seu sucesso em explicar a aceleração cósmica e em ajustar os dados observacionais, o modelo Λ CDM é afligido por sérios embaraços teóricos, tendo nos chamados “problemas do ajuste fino” e “da coincidência” seus principais representantes. Os limi-

tes observacionais sobre a magnitude de Λ desacordam com seu valor predito em muitas ordens de magnitude, levando a uma sério problema de ajuste fino (MIAO *et al.*, 2011; MARTIN, 2012), sendo este o chamado “problema da constante cosmológica” (WEINBERG, 1989). O “problema da coincidência”, por sua vez, surge porque as observações mostram que ambos os parâmetros de densidade da matéria e de Λ , Ω_M e Ω_Λ , respectivamente, são comparáveis em nosso tempo. Essa característica implica em uma estranha e inesperada coincidência, pois é esperado que a EE evolua separadamente da matéria, então é surpreendente que no presente tempo essas duas magnitudes sejam tão próximas uma da outra (ARKANI-HAMED *et al.*, 2000; KUNZ, 2012). Esses dois problemas afligem tão dramaticamente o paradigma Padrão que, apesar de seu sucesso, o modelo Λ CDM é considerado incompleto ou, pelo menos, não bem entendido (PEEBLES; RATRA, 2003; NOJIRI; ODINTSOV, 2011).

Além dos acima mencionados “problemas do ajuste fino” e “da coincidência”, o paradigma Λ CDM ainda tem que lidar com a falta de explicação para a origem teórica e para a natureza física de Λ e da matéria escura (ME) (WEINBERG, 1989). Então, motivados por esses defeitos do cenário cosmológico Padrão, diferentes modelos têm sido propostos nos últimos anos, estes vão desde extensões da teoria de Einstein e, por isso, são chamados de modelos de gravidade estendida (MIAO *et al.*, 2011; BAMBA *et al.*, 2012), até mesmo modificações da RG, sendo assim denominadas de teorias de gravidade modificada (MIAO *et al.*, 2011). O grande impasse que agora surge é que, se por um lado esses modelos alternativos nos abrem novas e interessantes possibilidades, por outro lado, somos confrontados com um problema de degenerescência, o qual é um sério embaraço que aflige a Cosmologia em geral. Ele surge devido ao fato que diversas classes de modelos cosmológicos são compatíveis com os dados observacionais em baixos *redshifts*. Segue então que a reconstrução da história do Universo pode ser obtida por cenários completamente diferentes, sem sermos capazes de distinguir entre eles. Isso reflete o fato que cada paradigma é capaz de descrever as observações com quase a mesma precisão estatística, o que é fruto da suposição, geralmente feita, de que o modelo em investigação é o favorecido para ajustar os dados, tornando, assim, a análise estatística incapaz de ser um critério eficaz para seleção de modelos. Portanto, em suma, embora existam muitos métodos estatísticos para se discriminar entre os vários cenários rivais, nenhum deles é capaz de predizer qual é o melhor paradigma.

No presente trabalho, iremos trabalhar com uma teoria modificada, a saber, a gravidade $f(R, T)$, que consiste em substituir uma função do escalar de curvatura de Ricci R por uma função genérica de R e do traço do tensor energia-momento (TEM) T na ação gravitacional de Einstein-Hilbert. Tal teoria foi originalmente proposta em (HARKO *et al.*, 2011), os autores, motivados pelas falhas apresentadas na aplicabilidade das teorias $f(R)$, como sua incompatibilidade com os testes do Sistema Solar da RG (CHIBA *et al.*,

2007; CAPOZZIELLO *et al.*, 2007), propuseram uma generalização dessa teoria. As motivações para a inclusão de termos em T vão desde efeitos quânticos relacionados a não conservação do TEM por estas teorias (XU *et al.*, 2016), até mesmo à presença de fluidos extras e imperfeitos (MORAES *et al.*, 2018; HARKO *et al.*, 2011). Mesmo sendo uma teoria relativamente recente, a gravidade $f(R, T)$ já se configura como uma promissora candidata alternativa à RG, pois ela nos permite explicar a expansão acelerada do Universo sem evocar EE e, conseqüentemente, esquivar-se de todos os embaraços já explicados que vêm atrelados a essa hipótese, uma vez que nesse cenário modificado, a aceleração é fruto de termos extras que aparecem em suas equações de campo (BARRIENTOS; RUBILAR, 2014; KUMAR; SINGH, 2015; SINGH; SINGH, 2016; MORAES *et al.*, 2016; MORAES; SANTOS, 2016; MORAES; SAHOO, 2017; MORAES *et al.*, 2018).

Assim como acontece com as demais teorias alternativas, a gravidade $f(R, T)$ também tem que lidar com o problema da degenerescência, afinal qual deve ser a forma específica da função $f(R, T)$? Para tentar elucidar essa questão, neste trabalho, evocaremos a Cosmografia, a qual tem como objetivo estudar as quantidades cinemáticas que caracterizam o cenário cosmológico e, por essa razão, é chamada de Cinemática do Universo (WEINBERG, 1972). Na análise cosmográfica, nós assumimos apenas a validade do princípio cosmológico, isto é, o Universo é suposto como homogêneo e isotrópico, de forma que sua dinâmica pode então ser formulada tão somente em termos da métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW). Essa metodologia nos permite dizer que a Cosmografia é um procedimento independente de modelos, uma vez que nenhum modelo dinâmico associado a qualquer teoria de gravidade específica é assumido *a priori* (VISSER, 2005). Feito isso, a ideia básica da Cosmografia é expandir alguns observáveis, tais como as distâncias cosmológicas, em série de potências e relacionar os parâmetros cosmológicos diretamente a essas quantidades observáveis. Ao fazer isso, é possível avaliar quais modelos comportam-se bem e quais deles devem ser descartados como consequência de não satisfazer as restrições observacionais demandadas pela análise cosmográfica, caracterizando assim a Cosmografia como uma técnica cinemática para seleção de modelos.

Conforme notado e aplicado às teorias $f(R)$ e $f(\mathcal{T})$, sendo \mathcal{T} o escalar de torção, em (CAPOZZIELLO *et al.*, 2008) e (CAPOZZIELLO *et al.*, 2011), respectivamente, a Cosmografia pode também ser usada como uma ferramenta de seleção se sua aplicação usual for invertida. Isto é, se em vez de postular um modelo de gravidade *a priori* e, a partir daí, obter os parâmetros cosmográficos (PC) (q_0, j_0, s_0, l_0) como um sub-produto dessa teoria, nós escrevermos a função que caracteriza um modelo de gravidade qualquer e suas primeiras derivadas em termos desses parâmetros, a partir de seus valores medidos, podemos obter restrições sobre essa função e suas derivadas, e tais restrições podem nos ajudar a discriminar entre modelos rivais. O objetivo do presente trabalho é obter uma cosmografia para a teoria de gravidade $f(R, T)$, bem como, mostrar de que forma esta

cosmografia pode ser usada para colocar restrições nesses modelos de gravidade.

O presente texto está organizado da seguinte forma: no capítulo 2, apresentamos a teoria da RG de Einstein e o modelo cosmológico Padrão; a Cosmografia é apresentada no capítulo 3, mostrando suas características gerais e seu aparato matemático. No capítulo 4, como um passo intermediário ao objetivo deste trabalho, mostramos como se obter a cosmografia da teoria $f(R)$. No capítulo 5, apresentamos nosso principal objetivo, como obter a cosmografia da gravidade $f(R, T)$, bem como, mostramos como escrever as equações cosmográficas obtidas em diferentes cenários de EE. O capítulo 6 mostra como as equações cosmográficas obtidas no capítulo anterior podem ser usadas para colocar restrições em modelos do tipo $f(R, T)$. No sétimo capítulo, apresentamos as condições de energia cosmográficas (CEC) para a gravidade $f(R, T)$, as quais são uma união entre as condições de energia usuais da Cosmologia e as equações cosmográficas obtidas no capítulo 5. Por fim, as conclusões deste trabalho, bem como as possibilidades de trabalhos futuros, são apresentadas no capítulo 8.

2 A RELATIVIDADE GERAL E O MODELO COSMOLÓGICO PADRÃO

2.1 A teoria da Relatividade Geral

A teoria da relatividade consiste de duas teorias distintas, a teoria restrita, também chamada de teoria especial, e a teoria geral. A teoria da relatividade restrita foi desenvolvida por Albert Einstein e outros em 1905, e trata dos referenciais inerciais, que são aqueles que se movem com velocidade constante um em relação ao outro. Essa teoria tem uma abordagem matemática relativamente simples e é aplicável em várias situações encontradas tanto na Física quanto na Engenharia. A teoria da RG, que também foi desenvolvida por Einstein e outros, foi publicada em 1915, trata dos referenciais acelerados e, conseqüentemente, da força gravitacional. Ao contrário da teoria restrita, a RG possui uma matemática complexa e suas aplicações são, principalmente, nas áreas de Gravitação e Cosmologia.

A Cosmologia é a ciência que investiga a estrutura dinâmica e a evolução do Universo como um todo, ou seja, nela este é considerado uma entidade única. Pode-se dizer que a Cosmologia, como uma área de estudo separada, surgiu com o advento da RG, uma vez que pouco depois de formular sua teoria, Einstein propôs seu modelo de Universo baseado nela (D'INVERNO, 1992). Hoje, mais de 100 anos após a publicação da teoria de Einstein, o modelo cosmológico adotado para o universo ainda está ancorado na RG. Para entendermos um pouco mais sobre esse modelo, precisamos, então, voltar à sua teoria base.

O ponto de partida para as equações de campo da RG é a chamada ação de Einstein-Hilbert,

$$S = \int \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2\kappa^2} R + \mathcal{L}_m \right) d^4x, \quad (2.1)$$

onde $\kappa^2 = \frac{8\pi G}{c^4}$, sendo G a constante gravitacional newtoniana e c a velocidade da luz, R é o escalar de curvatura de Ricci, dado pela contração do tensor de Ricci com o tensor métrico

$g_{\mu\nu}$, isto é, $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$, \mathcal{L}_m é a lagrangiana dos campos de matéria, e g é o determinante da métrica. Ao longo de todo este texto será adotada a assinatura $(-, +, +, +)$ para o tensor métrico. Pelo princípio de Hamilton da mínima ação, a variação dessa ação com relação à métrica é nula, ou seja, $\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} = 0$, então temos de (2.1) que

$$\int \left[\frac{1}{2\kappa^2} \frac{\delta(\sqrt{-g}R)}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)}{\delta g^{\mu\nu}} \right] \delta g^{\mu\nu} d^4x = 0, \quad (2.2)$$

$$\int \left[\frac{1}{2\kappa^2} \left(\sqrt{-g} \frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} + R \frac{\delta \sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} \right) + \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)}{\delta g^{\mu\nu}} \right] \delta g^{\mu\nu} d^4x = 0, \quad (2.3)$$

$$\int \left[\frac{1}{2\kappa^2} \left(\frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{R}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} \right) + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)}{\delta g^{\mu\nu}} \right] \delta g^{\mu\nu} d^4x = 0. \quad (2.4)$$

Como esta última equação deve obedecer a qualquer variação $\delta g^{\mu\nu}$, isso implica que

$$\frac{1}{2\kappa^2} \left(\frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{R}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} \right) + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)}{\delta g^{\mu\nu}} = 0, \quad (2.5)$$

$$\frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{R}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} = -\frac{2\kappa^2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (2.6)$$

Pela definição do TEM para o conteúdo de matéria-energia (WEINBERG, 1972; SABATTA; GASPERINI, 1985; D'INVERNO, 1992),

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (2.7)$$

temos que (2.6) se torna

$$\frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{R}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} = \kappa^2 T_{\mu\nu}. \quad (2.8)$$

Por fim, usando os seguintes resultados (WEINBERG, 1972; SABATTA; GASPERINI, 1985; D'INVERNO, 1992):

$$\frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} = R_{\mu\nu}, \quad (2.9)$$

e

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} = -\frac{1}{2} g_{\mu\nu}, \quad (2.10)$$

temos então

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa^2 T_{\mu\nu}. \quad (2.11)$$

Dada a definição do tensor de Einstein (WEINBERG, 1972; SABATTA; GASPERINI, 1985; D'INVERNO, 1992),

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R, \quad (2.12)$$

e usando o valor explícito da constante κ^2 , temos portanto

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (2.13)$$

as quais são as famosas equações de campo de Einstein da RG. De uma forma simplista, essas equações relacionam a geometria do espaço-tempo, codificada no tensor de Einstein, em seu lado esquerdo à sua distribuição de matéria-energia, englobada no TEM, em seu lado direito.

2.2 O Modelo Cosmológico Padrão

As equações de campo (2.13) possuem apenas soluções expansionistas, então, a fim de obter um modelo de universo estático, Einstein introduziu em sua teoria o termo cosmológico, que mais tarde ficaria conhecido como constante cosmológica de Einstein, Λ (WEINBERG, 1989; MIAO *et al.*, 2011). A inserção do termo cosmológico nas equações de campo da RG se dá através da ação

$$S = \int \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2\kappa^2} (R - 2\Lambda) + \mathcal{L}_m \right] d^4x, \quad (2.14)$$

cujas variações com relação ao tensor métrico leva, de uma forma análoga à que foi feita para a obtenção das equações anteriores (2.13), às seguintes equações de campo:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (2.15)$$

Em 1929, Edwin Hubble descobriu, através de seu estudo com estrelas do tipo cefeida, a expansão do Universo, o que motivou, pouco tempo depois, Einstein a remover o termo cosmológico de suas equações. Ao longo das décadas seguintes, até o final dos anos 90, o uso desse termo nas equações de campo da RG foi objeto de grandes debates onde, em várias ocasiões, ele era inserido por argumentos a seu favor e, posteriormente, retirado por argumentações contrárias a ele, veja (PEEBLES; RATRA, 2003; MIAO *et al.*, 2011)

e referências aí citadas para uma história mais detalhada sobre os acontecimentos relacionados ao termo cosmológico. Um cenário mais firme a favor da constante cosmológica começou a se desenvolver no final da década de 1990, quando os resultados de dois grupos de pesquisas apontaram que o Universo está atualmente passando por uma fase de expansão acelerada (RIESS *et al.*, 1998; PERLMUTTER *et al.*, 1999). Tal quadro não pode ser explicado se considerarmos que nosso universo contém apenas matéria bariônica ordinária, já que se este fosse o caso, a força de gravidade, que rege a dinâmica do universo em grandes escalas, deveria frear a expansão, uma vez que, tal força é atrativa. Dessa forma, seria esperado que o Universo estivesse passando por uma fase de expansão desacelerada, ao contrário do que as observações estavam indicando.

Atualmente, diversos dados observacionais suportam a evidência da expansão acelerada do Universo, como, por exemplo, aqueles vindos de supernovas tipo Ia, da radiação cósmica de fundo em micro-ondas, de oscilações acústicas de bárions, entre outros (MIAO *et al.*, 2011). Diante de tais evidências, vários modelos teóricos têm sido propostos a fim de explicar a origem da aceleração cósmica. Esses modelos podem ser classificados em duas categorias principais. A primeira classe engloba aqueles modelos nos quais se adiciona uma nova fonte, geralmente na forma de um fluido perfeito com propriedades exóticas como uma pressão negativa, por exemplo, no TEM do lado direito das equações de campo da RG, de forma que tal fluido dirija a aceleração observada. Por sua natureza física desconhecida, esse fluido foi chamado EE, de forma que os modelos que fazem uso dessa abordagem são chamados de modelos de EE (BAMBA *et al.*, 2012). A segunda classe proposta para resolver o enigma de aceleração cósmica envolve modificações na geometria do espaço-tempo em si, ou seja, envolve modificações no lado esquerdo das equações de Einstein, sendo que essas modificações podem ser desde extensões da RG e, por isso, são chamadas de teorias de gravidade estendida (MIAO *et al.*, 2011; BAMBA *et al.*, 2012), ou podem mesmo constar de modificações da teoria de Einstein sendo, assim, chamadas de teorias de gravidade modificada (MIAO *et al.*, 2011).

Entre todos os modelos propostos até agora, aquele que melhor descreve os dados observacionais é o Λ CDM, também chamado de modelo cosmológico Padrão (PADMANABHAN, 2003; CERVANTES-COTA; SMOOT, 2011). Nele, o CDM, designa a ME fria, a qual é uma suposta substância não bariônica e não relativística, necessária para a explicação das curvas de rotação planas das galáxias e para a discrepância de massa virial em aglomerados de galáxias (OVERDUIN; WESSON, 2004; BAER *et al.*, 2015). A detecção da ME é restringida pelo fato de ela interagir apenas gravitacionalmente. Seus efeitos podem ser notados por observações do movimento das enormes nuvens de hidrogênio ao redor das galáxias, ou pelo movimento das galáxias em aglomerados (OVERDUIN; WESSON, 2004). No entanto, apesar de muitas décadas de intensos esforços observacionais e experimentais, a natureza das partículas da ME ainda permanece essencialmente

desconhecida (OVERDUIN; WESSON, 2004; BAER *et al.*, 2015). Λ , por sua vez, representa a constante cosmológica, que nesse modelo desempenha o papel de EE dentro da RG (PEEBLES; RATRA, 2003; NOJIRI; ODINTSOV, 2011). O paradigma Λ CDM, além de ajustar bem os dados experimentais disponíveis, tem como outra virtude ser um modelo relativamente simples, uma vez que, possui poucos parâmetros para serem ajustados. Infelizmente, mesmo com suas virtudes observacionais e simplicidade, o Λ CDM é afligido por sérios problemas, que vão desde a falta de explicação para a origem teórica de Λ (WEINBERG, 1989), até mesmo os bem conhecidos “problemas do ajuste-fino” e “da coincidência”.

O “problema do ajuste-fino” está relacionado à interpretação de Λ como sendo a densidade de energia quântica do vácuo, e se refere a enorme diferença entre a densidade de energia que dirige a aceleração cósmica hoje, que é observacionalmente medida, e a densidade de energia quântica do vácuo, que é prevista pela teoria quântica de campos (WEINBERG, 1989). Ainda que alguns autores reiviniquem que essa diferença seja bem menor do que o valor comumente citado na literatura de 122 ordens de magnitude, teríamos que fazer um enorme ajuste-fino a fim de conciliar as previsões teóricas com o valor observacionalmente medido (MIAO *et al.*, 2011; MARTIN, 2012). O “problema da coincidência”, por sua vez, refere-se ao fato que a densidade do fluido que governa a expansão acelerada é, no tempo atual, comparativamente similar a densidade de energia da matéria em forma de poeira (ME fria + matéria bariônica) ou, colocando em outras palavras, embora essas duas quantidades evoluam de formas bastante diferentes durante a história da expansão do Universo, suas contribuições para a densidade de energia total são da mesma ordem de grandeza hoje (ARKANI-HAMED *et al.*, 2000; KUNZ, 2012). Portanto, devido a esses graves problemas, ainda não podemos considerar o modelo Λ CDM como o paradigma final para descrever a dinâmica do Universo (PEEBLES; RATRA, 2003; NOJIRI; ODINTSOV, 2011).

3 COSMOGRAFIA

3.1 A Abordagem Cosmográfica

Como já mencionado, a fim de se revolver os problemas que afligem o paradigma Λ CDM, diversos cenários cosmológicos têm sido propostos. Muitos desses modelos conseguem descrever de forma bastante bem sucedida os resultados observacionais. Porém, um outro grande problema surge dessa abordagem de se confrontar um certo modelo teórico com esses dados. Tal tipo de análise tem levado ao chamado problema da degenerescência, no qual muitos modelos conseguem ajustar bem os fenômenos observados, de tal forma que é muito difícil discriminar qual deles é, de fato, o mais adequado. Diante da degenerescência entre os vários modelos cosmológicos, técnicas que sejam independentes de modelos são cada vez mais desejáveis. Entre essas, nos últimos anos, uma em especial tem chamado muito a atenção, a abordagem cosmográfica.

Weinberg, em (WEINBERG, 1972), teria sido o primeiro a cunhar o termo Cosmografia para designar o estudo cinemático do Universo. Depois disso, Visser, em (VISSER, 2005), teria ressuscitado o tema como uma forma alternativa de se estudar o Universo sem evocar a sua dinâmica de fundo. De forma bem geral, em analogia à Cinemática, que é o ramo da Mecânica que estuda os movimentos sem recorrer à dinâmica por trás deles, a Cosmografia é o ramo da Cosmologia que estuda o quadro cosmológico do Universo explorando apenas seus aspectos cinemáticos, sem recorrer às equações de campo, de quaisquer teoria, que regem sua dinâmica. Para isso, essa abordagem repousa tão somente no chamado princípio cosmológico, isto é, na suposição de que o Universo é homogêneo e isotrópico em grandes escalas. Dessa forma, a Cosmografia pode ser considerada como uma abordagem independente de modelos, uma vez que, ela não postula, ou não depende, de qualquer paradigma cosmológico.

Da suposição da validade do princípio cosmológico, segue que o Universo é descrito pela métrica de FLRW (WEINBERG, 1989; SABATTA; GASPERINI, 1985; D'INVERNO,

1992),

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \right], \quad (3.1)$$

que representa um universo homogêneo e isotrópico em expansão, com tri-curvatura espacial k , a qual conforme o valor de $k = -1, 0$, e 1 , pode ser classificada como aberta, plana ou fechada, respectivamente, $a(t)$ é o chamado fator de escala, responsável por dirigir a expansão do Universo, e t é o tempo cósmico. Resultados observacionais sugerem uma tri-curvatura espacial nula (BERNARDIS *et al.*, 2000; STOMPOR *et al.*, 2001; NETTERFIELD *et al.*, 2002; CAI *et al.*, 2016). Desta forma, daqui em diante, assumiremos $k = 0$. Assim, temos para métrica de FLRW (3.1),

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 [dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2)]. \quad (3.2)$$

A metodologia básica da abordagem cosmográfica padrão consiste em expandir em uma série de Taylor a quantidade cosmológica de interesse. Expandindo então o fator de escala $a(t)$ em torno do tempo atual t_0 ,

$$a(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n a(t)}{dt^n} (t - t_0)^n. \quad (3.3)$$

Expandindo explicitamente até quinta ordem,

$$a(t) = a_0 + \dot{a}(t_0)(t-t_0) + \frac{1}{2!} \ddot{a}(t_0)(t-t_0)^2 + \frac{1}{3!} \dddot{a}(t_0)(t-t_0)^3 + \frac{1}{4!} \overset{\cdot}{\ddot{a}}(t_0)(t-t_0)^4 + \frac{1}{5!} a^{(v)}(t_0)(t-t_0)^5, \quad (3.4)$$

onde, $a^{(v)}(t_0)$ é derivada temporal de quinta ordem do fator de escala avaliada no tempo atual, e os termos de ordem ≥ 6 foram negligenciados. Ao longo de todo este trabalho, o sub-índice 0 indica o valor da quantidade no tempo atual, e um ponto denota a derivação com relação ao tempo t . Definimos agora as seguintes funções em termos das derivadas do fator de escala $a(t)$ (VISSER, 2005):

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}, \quad (3.5)$$

$$q(t) = -\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} H^{-2}, \quad (3.6)$$

$$j(t) = \frac{\overset{\cdot}{\ddot{a}}(t)}{a(t)} H^{-3}, \quad (3.7)$$

$$s(t) = \frac{\ddot{\ddot{a}}(t)}{a(t)} H^{-4}, \quad (3.8)$$

$$l(t) = \frac{a^v(t)}{a(t)} H^{-5}, \quad (3.9)$$

que são chamadas, respectivamente, função de Hubble, parâmetro de desaceleração, *jerk*, *snap* e *lerk*, e são, quando avaliadas no tempo atual t_0 , coletivamente referidas como PC (DUNAJSKI; GIBBONS, 2008). Cada um deles tem um significado físico: a função de Hubble $H(t)$ mede a taxa de expansão do universo, e seu valor atual H_0 é chamado de constante de Hubble; o parâmetro de desaceleração q descreve o comportamento da expansão, isto é, o sinal do seu valor atual indica se esta é acelerada (para $q_0 < 0$) ou desacelerada ($q_0 > 0$); j , por sua vez, informa-nos sobre os pontos de inflexão ao longo da história da expansão do Universo, assim, por exemplo, um $j_0 > 0$ implica que o parâmetro q mudou seu sinal no passado, ou seja, implica que houve uma transição da desaceleração para a aceleração; por fim, os parâmetros *snap* e *lerk* podem nos ajudar a determinar se há qualquer evolução do termo de EE, pois, possíveis desvios desses parâmetros em relação ao modelo de concordância Λ CDM, no qual esse termo é constante ao longo da evolução do Universo, afetariam a dependência funcional da EE com o redshift z , o que, por sua vez, indicaria que esta evolui conforme o Universo expande. Em particular, quando *redshifts* mais altos são considerados, os parâmetros *snap* e *lerk* têm grande influência nos termos de ordens mais altas da expansão de Taylor (DUNSBY; LUONGO, 2016). Portanto, se nos lembrarmos do problema da degenerescência, citado anteriormente, temos que os parâmetros de ordens mais altas j , s e l , em especial, podem ajudar a discriminar entre modelos de EE rivais (SAHNI *et al.*, 2003; ALAM *et al.*, 2003; RAPETTI *et al.*, 2007).

Com as definições acima, avaliando as funções (3.5)-(3.9) no tempo atual t_0 , podemos reescrever a expansão (3.4) como

$$a(t) = a_0 + a_0 H_0 (t - t_0) - \frac{1}{2} a_0 q_0 H_0^2 (t - t_0)^2 + \frac{1}{3!} a_0 j_0 H_0^3 (t - t_0)^3 + \frac{1}{4!} a_0 s_0 H_0^4 (t - t_0)^4 + \frac{1}{5!} a_0 l_0 H_0^5 (t - t_0)^5, \quad (3.10)$$

ou ainda,

$$\frac{a(t)}{a_0} = 1 + H_0 (t - t_0) - \frac{1}{2!} q_0 H_0^2 (t - t_0)^2 + \frac{1}{3!} j_0 H_0^3 (t - t_0)^3 + \frac{1}{4!} s_0 H_0^4 (t - t_0)^4 + \frac{1}{5!} l_0 H_0^5 (t - t_0)^5. \quad (3.11)$$

3.2 A Distância de Luminosidade

Aqui, faremos uso da expansão para $a(t)$ dada em (3.11) para escrever algumas definições úteis de distância comumente usadas em Cosmologia, em especial a relação entre a distância de luminosidade d_L e o *redshift* z . Para isso, primeiro iniciamos com a definição do *redshift* cosmológico devido à própria expansão do Universo (WEINBERG, 1972; D'INVERNO, 1992; DODELSON, 2003; LIDDLE, 2015),

$$1 + z = \frac{a_0}{a(t)}, \quad (3.12)$$

usando (3.11),

$$1+z = \left[1 - H_0(t_0 - t) - \frac{1}{2}q_0H_0^2(t_0 - t)^2 - \frac{1}{3!}j_0H_0^3(t_0 - t)^3 + \frac{1}{4!}s_0H_0^4(t_0 - t)^4 - \frac{1}{5!}l_0H_0^5(t_0 - t)^5 \right]^{-1}, \quad (3.13)$$

$$= \left\{ 1 - \left[H_0(t_0 - t) + \frac{1}{2}q_0H_0^2(t_0 - t)^2 + \frac{1}{3!}j_0H_0^3(t_0 - t)^3 - \frac{1}{4!}s_0H_0^4(t_0 - t)^4 + \frac{1}{5!}l_0H_0^5(t_0 - t)^5 \right] \right\}^{-1}. \quad (3.14)$$

Chamando o termo entre colchetes de x ,

$$1 + z = (1 - x)^{-1}. \quad (3.15)$$

Usando a expansão binomial, e expandindo até quinta ordem (DWIGHT, 1957; ARFKEN *et al.*, 2013),

$$(1 + x)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (1 + x)^m, \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} (1 + x)^m = & 1 + mx + m(m-1)\frac{x^2}{2!} + m(m-1)(m-2)\frac{x^3}{3!} \\ & + m(m-1)(m-2)(m-3)\frac{x^4}{4!} + m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)\frac{x^5}{5!} + \dots \end{aligned} \quad (3.17)$$

Desprezando os termos de ordem ≥ 6 , e usando $m = -1$,

$$1 + z = (1 - x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5. \quad (3.18)$$

Lembrando que

$$x = H_0(t_0 - t) + \frac{q_0}{2}H^2(t_0 - t)^2 + \frac{j_0}{3!}H_0^3(t_0 - t)^3 - \frac{s_0}{4!}H_0^4(t_0 - t)^4 + \frac{1}{5!}l_0H_0^5(t_0 - t)^5,$$

e negligenciando termos com ordem $6 \geq$ em $(t_0 - t)$,

$$\begin{aligned} 1 + z = & 1 + H_0(t_0 - t) + \frac{(2 + q_0)}{2}H_0^2(t_0 - t)^2 \\ & + \frac{(6 + 6q_0 + j_0)}{6}H_0^3(t_0 - t)^3 \\ & + \frac{(24 + 36q_0 + 6q_0^2 + 8j_0 - s_0)}{24}H_0^4(t_0 - t)^4 \\ & + \frac{120 + 240q_0 + 90q_0^2 + 60j_0 + 20q_0j_0 - 10s_0 + l_0}{120}H_0^5(t_0 - t)^5, \end{aligned} \quad (3.19)$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} z = & H_0(t_0 - t) + \frac{(2 + q_0)}{2}H_0^2(t_0 - t)^2 \\ & + \frac{(6 + 6q_0 + j_0)}{6}H_0^3(t_0 - t)^3 \\ & + \frac{(24 + 36q_0 + 6q_0^2 + 8j_0 - s_0)}{24}H_0^4(t_0 - t)^4 \\ & + \frac{120 + 240q_0 + 90q_0^2 + 60j_0 + 20q_0j_0 - 10s_0 + l_0}{120}H_0^5(t_0 - t)^5. \end{aligned} \quad (3.20)$$

A distância física D viajada por um fóton emitido no tempo t e absorvido no tempo atual t_0 é dada por (WEINBERG, 1972; D'INVERNO, 1992; DODELSON, 2003; LIDDLE, 2015)

$$D = c \int_t^{t_0} dt' = c(t_0 - t). \quad (3.21)$$

Então, assumindo $t = t_0 - \frac{D}{c}$, e inserindo em (3.20), podemos escrever uma expressão para z em termos de D , isto é, $z = z(D)$ como

$$\begin{aligned}
z(D) = & \frac{H_0 D}{c} + \frac{(2 + q_0)}{2} \left(\frac{H_0 D}{c} \right)^2 \\
& + \frac{(6 + 6q_0 + j_0)}{6} \left(\frac{H_0 D}{c} \right)^3 \\
& + \frac{(24 + 36q_0 + 6q_0^2 + 8j_0 - s_0)}{24} \left(\frac{H_0 D}{c} \right)^4 \\
& + \frac{120 + 240q_0 + 90q_0^2 + 60j_0 + 20q_0j_0 - 10s_0 + l_0}{120} \left(\frac{H_0 D}{c} \right)^5.
\end{aligned} \tag{3.22}$$

O próximo passo é inverter a expressão (3.22), ou seja, escrever $D = D(z)$. Para isso, considere a seguinte série de potências,

$$y = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n, \tag{3.23}$$

que nos dá y em termos de x . Para se obter a série inversa que nos der x em termos de y , isto é, que nos forneça

$$x = A_1 y + A_2 y^2 + A_3 y^3 + A_4 y^4 + A_5 y^5 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} A_n y^n, \tag{3.24}$$

precisamos conhecer os coeficientes A_n (DWIGHT, 1957; ARFKEN *et al.*, 2013). Para isso, substitui-se (3.23) em (3.24),

$$\begin{aligned}
x = & A_1 (a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots) + A_2 (a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots)^2 \\
& + A_3 (a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots)^3 + A_4 (a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots)^4 \\
& + A_5 (a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots)^5 + \dots.
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Igualando os coeficientes de x em ambos os lados desta equação obtemos, até o quinto coeficiente (DWIGHT, 1957; ARFKEN *et al.*, 2013):

- $A_1 = a_1^{-1}$,
- $A_2 = -a_1^{-3} a_2$,
- $A_3 = a_1^{-5} (2a_2^2 - a_1 a_3)$,
- $A_4 = a_1^{-7} (5a_1 a_2 a_3 - a_1^2 a_4 - 5a_2^3)$,
- $A_5 = a_1^{-9} (6a_1^2 a_2 a_4 + 3a_1^2 a_3^2 + 14a_2^4 - a_1^3 a_5 - 21a_1 a_2^2 a_3)$.

Identificando em (3.22):

$$\begin{aligned}
\bullet a_1 &= 1, \\
\bullet a_2 &= \frac{(2+q_0)}{2}, \\
\bullet a_3 &= \frac{(6+6q_0+j_0)}{6}, \\
\bullet a_4 &= \frac{(24+36q_0+6q_0^2+8j_0-s_0)}{24}, \\
\bullet a_5 &= \frac{120+240q_0+90q_0^2+60j_0+20q_0j_0-10s_0+l_0}{120},
\end{aligned}$$

temos para os coeficientes:

$$\begin{aligned}
\bullet A_1 &= 1, \\
\bullet A_2 &= -\left(1 + \frac{q_0}{2}\right), \\
\bullet A_3 &= 1 + q_0 + \frac{q_0^2}{2} - \frac{j_0}{6}, \\
\bullet A_4 &= -\left(1 + \frac{3}{2}q_0 + \frac{3}{2}q_0^2 + \frac{5}{8}q_0^3 - \frac{1}{2}j_0 - \frac{5}{12}q_0j_0 - \frac{s_0}{24}\right), \\
\bullet A_5 &= 1 + 2q_0 + 3q_0^2 + \frac{5}{2}q_0^3 + \frac{7}{8}q_0^4 - j_0 - \frac{5}{3}q_0j_0 - \frac{7}{8}q_0^2j_0 + \frac{j_0^2}{12} - \frac{s_0}{6} - \frac{q_0s_0}{8}q - \frac{l_0}{120}.
\end{aligned}$$

De forma que usando esses coeficientes, a inversão de (3.22) nos dá a seguinte expressão para $D(z)$,

$$\begin{aligned}
D(z)\frac{H_0}{cz} &= 1 - \left(1 + \frac{q_0}{2}\right)z + \left(1 + q_0 + \frac{q_0^2}{2} - \frac{j_0}{6}\right)z^2 \\
&\quad - \left(1 + \frac{3}{2}q_0 + \frac{3}{2}q_0^2 + \frac{5}{8}q_0^3 - \frac{1}{2}j_0 - \frac{5}{12}q_0j_0 - \frac{s_0}{24}\right)z^3 \\
&\quad + \left(1 + 2q_0 + 3q_0^2 + \frac{5}{2}q_0^3 + \frac{7}{8}q_0^4 - j_0 - \frac{5}{3}q_0j_0 - \frac{7}{8}q_0^2j_0 + \frac{j_0^2}{12} - \frac{s_0}{6} - \frac{q_0s_0}{8}q - \frac{l_0}{120}\right)z^4.
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Definindo as seguintes quantidades:

$$\begin{aligned}
\bullet \mathcal{D}_z^0 &= 1, \\
\bullet \mathcal{D}_z^1 &= -\left(1 + \frac{q_0}{2}\right), \\
\bullet \mathcal{D}_z^2 &= 1 + q_0 + \frac{q_0^2}{2} - \frac{j_0}{6}, \\
\bullet \mathcal{D}_z^3 &= -\left(1 + \frac{3}{2}q_0 + \frac{3}{2}q_0^2 + \frac{5}{8}q_0^3 - \frac{1}{2}j_0 - \frac{5}{12}q_0j_0 - \frac{s_0}{24}\right), \\
\bullet \mathcal{D}_z^4 &= 1 + 2q_0 + 3q_0^2 + \frac{5}{2}q_0^3 + \frac{7}{8}q_0^4 - j_0 - \frac{5}{3}q_0j_0 - \frac{7}{8}q_0^2j_0 + \frac{j_0^2}{12} - \frac{s_0}{6} - \frac{q_0s_0}{8}q - \frac{l_0}{120},
\end{aligned}$$

podemos reescrever (3.26) como

$$D(z) = \frac{cz}{H_0} (\mathcal{D}_z^0 + \mathcal{D}_z^1 z + \mathcal{D}_z^2 z^2 + \mathcal{D}_z^3 z^3 + \mathcal{D}_z^4 z^4). \tag{3.27}$$

Tal expressão nos dá a distância física D em termos do *redshift* z . Agora, podemos usar essa relação para obter a distância de luminosidade d_L .

A distância de luminosidade d_L é uma forma de quantificar a luz recebida no tempo atual vinda de um objeto distante, ela é definida como a razão entre a luminosidade de um objeto L , que é a energia emitida por ângulo sólido por segundo, e a densidade do fluxo S , que é a energia recebida por unidade de área por segundo, isto é (WEINBERG, 1972; D'INVERNO, 1992; DODELSON, 2003; LIDDLE, 2015),

$$d_L^2 \equiv \frac{L}{S}. \quad (3.28)$$

Se nosso Universo fosse euclidiano e estático, tal que a lei do inverso do quadrado da distância para a redução da intensidade da luz fosse válida, a densidade do fluxo recebida seria simplesmente $S = L/a_0^2 r_0^2$, onde $a_0 r_0$ seria o raio físico de um esfera na qual a fonte estivesse centrada. Contudo, como o Universo está em expansão, esta afeta os fótons de duas formas conforme eles se propagam da fonte até o observador. Primeiro, a energia de cada fóton é reduzida, uma vez que, esta é a componente temporal de um quadrivetor e, portanto, sua transformação de um observador para outro introduz um fator $1 + z$. Segundo, devido ao deslocamento Doppler, a frequência de fótons recebidos também é reduzida por um fator de $1 + z$. De modo que, quando consideramos esses dois efeitos, a densidade do fluxo é agora dada por (WEINBERG, 1972; D'INVERNO, 1992; DODELSON, 2003; LIDDLE, 2015)

$$S = \frac{L}{a_0^2 r_0^2 (1 + z)^2}. \quad (3.29)$$

Conseqüentemente, temos para a distância de luminosidade (3.28) que

$$d_L = a_0 r_0 (1 + z). \quad (3.30)$$

Para obtermos d_L é então necessário obter o valor de r_0 , o qual para um universo com tri-curvatura espacial $k = 0$ é dado por (WEINBERG, 1972; D'INVERNO, 1992)

$$r_0(t) = \int_t^{t_0} \frac{cdt'}{a(t')}, \quad (3.31)$$

e usando (3.12),

$$r_0(t) = \frac{c}{a_0} \int_t^{t_0} (1 + z) dt'. \quad (3.32)$$

Se considerarmos distâncias curtas, podemos inserir a expansão para $1 + z$ dada em (3.19) nessa expressão para $r_0(t)$,

$$\begin{aligned}
r_0(t) \frac{a_0}{c} = & \int_t^{t_0} dt + \int_t^{t_0} H_0 (t_0 - t) dt \\
& + \int_t^{t_0} \frac{(2 + q_0)}{2} H_0^2 (t_0 - t)^2 dt \\
& + \int_t^{t_0} \frac{(6 + 6q_0 + j_0)}{6} H_0^3 (t_0 - t)^3 dt \\
& + \int_t^{t_0} \frac{(24 + 36q_0 + 6q_0^2 + 8j_0 - s_0)}{24} H_0^4 (t_0 - t)^4 dt \\
& + \int_t^{t_0} \frac{120 + 240q_0 + 90q_0^2 + 60j_0 + 20q_0j_0 - 10s_0 + l_0}{120} H_0^5 (t_0 - t)^5 dt.
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Resolvendo as integrais,

$$\begin{aligned}
r_0(t) \frac{a_0}{c} = & (t_0 - t) + \frac{H_0}{2} (t_0 - t)^2 \\
& + \frac{(2 + q_0)}{2} \frac{H_0^2}{3} (t_0 - t)^3 \\
& + \frac{(6 + 6q_0 + j_0)}{6} \frac{H_0^3}{4} (t_0 - t)^4 \\
& + \frac{(24 + 36q_0 + 6q_0^2 + 8j_0 - s_0)}{24} \frac{H_0^4}{5} (t_0 - t)^5 \\
& + \frac{120 + 240q_0 + 90q_0^2 + 60j_0 + 20q_0j_0 - 10s_0 + l_0}{120} \frac{H_0^5}{6} (t_0 - t)^6.
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Ou ainda, lembrando que $t = t_0 - \frac{D}{c}$,

$$\begin{aligned}
r_0(D) \frac{a_0}{D} = & 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{H_0 D}{c} \right) \\
& + \frac{(2 + q_0)}{6} \left(\frac{H_0 D}{c} \right)^2 \\
& + \frac{(6 + 6q_0 + j_0)}{24} \left(\frac{H_0 D}{c} \right)^3 \\
& + \frac{(24 + 36q_0 + 6q_0^2 + 8j_0 - s_0)}{120} \left(\frac{H_0 D}{c} \right)^4 \\
& + \frac{120 + 240q_0 + 90q_0^2 + 60j_0 + 20q_0j_0 - 10s_0 + l_0}{720} \left(\frac{H_0 D}{c} \right)^5.
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Definindo as seguintes quantidades:

- $\mathcal{R}_D^0 = 1$,
- $\mathcal{R}_D^1 = \frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned}
\bullet \mathcal{R}_D^2 &= \frac{2+q_0}{6}, \\
\bullet \mathcal{R}_D^3 &= \frac{6+6q_0+j_0}{24}, \\
\bullet \mathcal{R}_D^4 &= \frac{24+36q_0+6q_0^2+8j_0-s_0}{120}, \\
\bullet \mathcal{R}_D^5 &= \frac{120+240q_0+90q_0^2+60j_0+20q_0j_0-10s_0+l_0}{720}.
\end{aligned}$$

Então,

$$r_0(D) = \frac{D}{a_0} \left[\mathcal{R}_D^0 + \mathcal{R}_D^1 \left(\frac{H_0 D}{C} \right) + \mathcal{R}_D^2 \left(\frac{H_0 D}{C} \right)^2 + \mathcal{R}_D^3 \left(\frac{H_0 D}{C} \right)^3 + \mathcal{R}_D^4 \left(\frac{H_0 D}{C} \right)^4 + \mathcal{R}_D^5 \left(\frac{H_0 D}{C} \right)^5 \right]. \quad (3.36)$$

Uma vez que encontramos $r_0(D)$, podemos obter uma expressão para a distância de luminosidade em termos de D , isto é, $d_L(D)$. Para isso multiplicamos a expansão para $1+z$ dada em (3.22) pela equação (3.36) para $a_0 r_0$. Mantendo apenas os termos até quinta ordem em D ,

$$\begin{aligned}
d_L(D) = & D + \frac{3}{2} \frac{H_0 D^2}{c} + \frac{(11+4q_0)}{6} \frac{H_0^2 D^3}{c^2} + \frac{(50+40q_0+5j_0)}{24} \frac{H_0^3 D^4}{c^3} \\
& + \frac{(274+346q_0+46q_0^2+63j_0-6s_0)}{120} \frac{H_0^4 D^5}{c^4}, \quad (3.37)
\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}
d_L(D) = D \left[1 + \frac{3}{2} \left(\frac{H_0 D}{c} \right) + \frac{(11+4q_0)}{6} \left(\frac{H_0 D}{c} \right)^2 + \frac{(50+40q_0+5j_0)}{24} \left(\frac{H_0 D}{c} \right)^3 \right. \\
\left. + \frac{(274+346q_0+46q_0^2+63j_0-6s_0)}{120} \left(\frac{H_0 D}{c} \right)^4 \right]. \quad (3.38)
\end{aligned}$$

Agora nós temos as expressões para $D(z)$, dada em (3.28), e para $d_L(D)$, dada em (3.38). De forma que para obtermos a distância de luminosidade em termos do *redshift* z , isto é, obtermos $d_L(z)$, basta substituímos (3.28) em (3.38), ou seja, escrevemos $d_L(D)$ em termos das potências de $D(z)$,

$$\begin{aligned}
d_L(D(z)) = & D(z) + \frac{3 H_0 D(z)^2}{2 c} + \frac{(11 + 4q_0) H_0^2 D(z)^3}{6 c^2} \\
& + \frac{(50 + 40q_0 + 5j_0) H_0^3 D(z)^4}{24 c^3} \\
& + \frac{(274 + 346q_0 + 46q_0^2 + 63j_0 - 6s_0) H_0^4 D(z)^5}{120 c^4}.
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Desta maneira, substituindo a expressão de $D(z)$ dada em (3.28), e expandindo até quinta ordem no *redshift* z ,

$$\begin{aligned}
d_L(z) = & \\
& \frac{cz}{H_0} - \frac{(-1 + q_0) cz^2}{2 H_0} - \frac{(1 - q_0 - 3q_0^2 + j_0) cz^3}{6 H_0} \\
& + \frac{(2 - 2q_0 - 15q_0^2 - 15q_0^3 + 5j_0 + 10q_0j_0 + s_0) cz^4}{24 H_0} \\
& + \frac{(-6 + 6q_0 + 81q_0^2 + 165q_0^3 + 105q_0^4 - 27j_0 - 110q_0j_0 - 105q_0^2j_0 + 10j_0^2 - 11s_0 - 15q_0s_0 - l_0) cz^5}{120 H_0},
\end{aligned} \tag{3.40}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}
d_L(z) \frac{H_0}{cz} = & 1 + \frac{(1 - q_0)}{2} z - \frac{(1 - q_0 - 3q_0^2 + j_0)}{6} z^2 \\
& + \frac{(2 - 2q_0 - 15q_0^2 - 15q_0^3 + 5j_0 + 10q_0j_0 + s_0)}{24} z^3 \\
& + \frac{(-6 + 6q_0 + 81q_0^2 + 165q_0^3 + 105q_0^4 - 27j_0 - 110q_0j_0 - 105q_0^2j_0 + 10j_0^2 - 11s_0 - 15q_0s_0 - l_0)}{120} z^4.
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Definindo as quantidades:

- $\mathcal{D}_L^0 = 1$,
- $\mathcal{D}_L^1 = \frac{1 - q_0}{2}$,
- $\mathcal{D}_L^2 = -\frac{1 - q_0 - 3q_0^2 + j_0}{6}$,
- $\mathcal{D}_L^3 = \frac{2 - 2q_0 - 15q_0^2 - 15q_0^3 + 5j_0 + 10q_0j_0 + s_0}{24}$,
- $\mathcal{D}_L^4 = \frac{-6 + 6q_0 + 81q_0^2 + 165q_0^3 + 105q_0^4 - 27j_0 - 110q_0j_0 - 105q_0^2j_0 + 10j_0^2 - 11s_0 - 15q_0s_0 - l_0}{120}$,

obtemos, enfim,

$$d_L(z) = \frac{c}{H_0} (\mathcal{D}_L^0 z + \mathcal{D}_L^1 z^2 + \mathcal{D}_L^2 z^3 + \mathcal{D}_L^3 z^4 + \mathcal{D}_L^4 z^5). \tag{3.42}$$

Esta expressão pode ser usada para ajustar dados cosmológicos, de tal forma que restrições

sobre os PC (q_0, j_0, s_0, l_0) podem ser obtidas (CATTOËN; VISSER, 2008b; CAPOZZIELLO *et al.*, 2011). Além disso, pode-se também usar outras definições de distância tais como a distância do diâmetro angular, a distância da contagem de fótons, entre outras (CATTOËN; VISSER, 2008b).

3.3 O aparato Cosmográfico

Para a proposta do presente trabalho, a saber, fazer uso da Cosmografia para restringir modelos cosmológicos degenerados, algumas ferramentas matemáticas serão úteis. Entre elas estão as derivadas da função de Hubble em termos dos PC (q_0, j_0, s_0, l_0) . A primeira, segunda, terceira e quarta derivadas temporais da equação (3.5) são, respectivamente:

$$\dot{H} = \frac{\ddot{a}}{a} - \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2, \quad (3.43)$$

$$\ddot{H} = \frac{\dddot{a}}{a} - 3\frac{\dot{a}\ddot{a}}{a^2} + 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^3, \quad (3.44)$$

$$\dddot{H} = \frac{\overset{\cdot\cdot\cdot}{a}}{a} - 4\frac{\dot{a}\ddot{a}}{a^2} + 12\frac{\dot{a}^2\ddot{a}}{a^3} - 3\left(\frac{\ddot{a}}{a}\right)^2 - 6\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^4, \quad (3.45)$$

$$\overset{\cdot\cdot\cdot}{H} = \frac{a^{(v)}}{a} - \frac{5\dot{a}\ddot{a}}{a^2} - \frac{10\ddot{a}\ddot{a}}{a^2} + \frac{30\dot{a}\ddot{a}^2}{a^3} + \frac{20\dot{a}^2\ddot{a}}{a^3} - \frac{60\dot{a}^3\ddot{a}}{a^4} + 24\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^5. \quad (3.46)$$

Usando as definições dadas por (3.6)-(3.9), podemos reescrever essas derivadas, em ordem, como:

$$\dot{H} = -qH^2 - H^2, \quad (3.47)$$

$$\ddot{H} = jH^3 + 3qH^3 + 2H^3, \quad (3.48)$$

$$\dddot{H} = sH^4 - 4jH^4 - 12qH^4 + 3q^2H^4 - 6H^4, \quad (3.49)$$

$$\overset{\cdot\cdot\cdot}{H} = H^5 [l - 5s + 10(q+2)j + 30(q+2)q + 24], \quad (3.50)$$

ou ainda:

$$\dot{H} = -H^2(1 + q), \quad (3.51)$$

$$\ddot{H} = H^3(2 + 3q + j), \quad (3.52)$$

$$\ddot{\ddot{H}} = H^4 [-6 - 3q(4 + q) - 4j + s], \quad (3.53)$$

$$\ddot{\ddot{\ddot{H}}} = H^5 [24 + 30(q + 2)q + 10(q + 2)j - 5s + l]. \quad (3.54)$$

Além das relações acima, outras que também serão muito importantes são as derivadas do escalar de curvatura de Ricci em termos dos PC (q_0, j_0, s_0, l_0) . Para obtermos tais relações, relembremos que $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$, isto é,

$$R = g^{00} R_{00} + g^{11} R_{11} + g^{22} R_{22} + g^{33} R_{44}. \quad (3.55)$$

Sendo R_{00} , R_{11} , R_{22} e R_{44} , as componentes não nulas do tensor de Ricci, cujos valores para a métrica de FLRW (3.2), respectivamente, são (WEINBERG, 1972):

$$R_{11} = -\frac{3\ddot{a}}{a}, \quad (3.56)$$

$$R_{22} = (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2), \quad (3.57)$$

$$R_{33} = (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2) r^2, \quad (3.58)$$

$$R_{44} = \text{sen}^2\theta (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2) r^2. \quad (3.59)$$

Escrevendo o tensor métrico na seguinte forma matricial,

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{a^2 r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{a^2 r^2 \text{sen}^2\theta} \end{pmatrix}, \quad (3.60)$$

temos para (3.55),

$$R = 1 \left(-\frac{3\ddot{a}}{a} \right) - \frac{1}{a^2} (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2) - \frac{1}{a^2 r^2} (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2) r^2 - \frac{1}{a^2 r^2 \text{sen}^2 \theta} [\text{sen}^2 \theta (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2) r^2], \quad (3.61)$$

$$R = -6 \frac{\ddot{a}}{a} - 6 \frac{\dot{a}^2}{a^2}, \quad (3.62)$$

ou ainda,

$$R = -6 \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \right]. \quad (3.63)$$

Podemos escrever o escalar de Ricci dado acima em termos da função de Hubble. Para isso, de (3.43),

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \dot{H} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2, \quad (3.64)$$

então, temos para (3.63),

$$R = -6 \left[\dot{H} + 2 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \right], \quad (3.65)$$

Usando a definição da função de Hubble dada em (3.5), ficamos com

$$R = -6 \left(\dot{H} + 2H^2 \right). \quad (3.66)$$

Uma vez que, temos o escalar de Ricci escrito em termos da função de Hubble, o próximo passo é escrevê-lo em termos dos PC. Para este fim, a primeira, segunda e terceira derivadas da equação (3.66) em relação ao tempo são, respectivamente:

$$\dot{R} = -6 \left(\ddot{H} + 4H\dot{H} \right), \quad (3.67)$$

$$\ddot{R} = -6 \left(\dddot{H} + 4H\ddot{H} + 4\dot{H}^2 \right), \quad (3.68)$$

$$\dddot{R} = -6 \left(\ddddot{H} + 4H\ddot{H} + 12\dot{H}\ddot{H} \right). \quad (3.69)$$

Usando as funções (3.5)-(3.9) e as derivadas da função de Hubble dadas em (3.51)-(3.54),

as expressões (3.66)-(3.69) podem ser reescritas, ordenadamente, como:

$$R = -6H^2 (1 - q), \quad (3.70)$$

$$\dot{R} = -6H^3 (-2 - q + j), \quad (3.71)$$

$$\ddot{R} = -6H^4 (6 + 8q + q^2 + s), \quad (3.72)$$

$$\dddot{R} = -6H^5 [-24 - 6(3q + 8)q - 2(q + 4)j - s + l]. \quad (3.73)$$

As equações (3.51)-(3.54) e (3.70)-(3.73) relacionando, respectivamente, os valores atuais das derivadas temporais da função de Hubble H e do escalar de Ricci R aos PC (q_0, j_0, s_0, l_0) serão de grande utilidade nas abordagens seguintes.

4 COSMOGRAFIA DA TEORIA DE GRAVIDADE $f(R)$

Como um passo introdutório ao objetivo principal do presente trabalho, a saber, obter a cosmografia da teoria de gravidade $f(R, T)$, vamos mostrar como se obter a cosmografia da teoria $f(R)$, que pode ser considerada um caso particular de gravidade $f(R, T)$, no qual $f(T) = 0$. Como já mencionado, Weinberg foi o primeiro a designar o termo Cosmografia para o estudo cinemático do Universo (WEINBERG, 1972), e Visser teria sugerido o uso da Cosmografia para se estudar o Universo sem evocar sua dinâmica de fundo (VISSER, 2005). Em (CAPOZZIELLO *et al.*, 2008), os autores propuseram uma forma de restringir modelos de gravidade $f(R)$ através do uso da Cosmografia, na qual a abordagem cosmográfica comumente usada é invertida. Até então, o uso da Cosmografia consistia em obter os PC (q_0, j_0, s_0, l_0) como uma espécie de sub-produto de uma teoria dinâmica subjacente. (CAPOZZIELLO *et al.*, 2008) propuseram o inverso, escrever as equações de campo da gravidade $f(R)$ genericamente em termos de (q_0, j_0, s_0, l_0) , e então, através do uso dos valores medidos desses parâmetros, obter restrições para a forma que a função $f(R)$ deveria ter. Os autores chamaram de “cosmografia” da gravidade $f(R)$ as equações de campo dessa teoria escritas em termos dos PC (CAPOZZIELLO *et al.*, 2008). A seguir, apontaremos tal teoria antes de mostrarmos detalhadamente como obter sua cosmografia.

4.1 Teoria de Gravidade $f(R)$

Como já mencionado no capítulo anterior, uma das propostas para se resolver o enigma da aceleração cósmica é modificar a ação de Einstein-Hilbert da RG. Uma modificação natural é aquela na qual a densidade lagrangiana é uma função arbitrária do escalar de Ricci R , chamada de gravidade $f(R)$. As teorias $f(R)$ são a classe mais popular de teorias alternativas de gravidade, principalmente porque ações do tipo $f(R)$ são suficientemente gerais para englobar algumas das principais características das teorias de gravidade de ordens mais altas e, ao mesmo tempo, são simples o bastante para ser relativamente fácil

manipulá-las de um ponto de vista matemático (SOTIRIOU; FARAONI, 2010; FELICE; TSUJIKAWA, 2010). O ponto de partida para obtermos as equações de campo da teoria $f(R)$ é a seguinte ação,

$$S = \int \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2\kappa^2} f(R) + \mathcal{L}_m \right] d^4x, \quad (4.1)$$

na qual $f(R)$ é uma função arbitrária do escalar de Ricci R . Variando a ação (4.1) em relação ao tensor métrico, obtemos

$$\delta S = \int \left[\frac{\sqrt{-g}}{2\kappa^2} \frac{\delta f(R)}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{f(R)}{2\kappa^2} \frac{\delta \sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)}{\delta g^{\mu\nu}} \right] \delta g^{\mu\nu} d^4x, \quad (4.2)$$

$$\delta S = \int \left[\frac{\sqrt{-g}}{2\kappa^2} \frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} f_R + \frac{f(R)}{2\kappa^2} \frac{\delta \sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)}{\delta g^{\mu\nu}} \right] \delta g^{\mu\nu} d^4x. \quad (4.3)$$

Usando a relação (2.10),

$$\delta S = \frac{\sqrt{-g}}{2\kappa^2} \int \left[f'(R) \delta R - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} f(R) \delta g^{\mu\nu} + \frac{2\kappa^2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)}{\delta g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} \right] d^4x. \quad (4.4)$$

A notação $f'(R) \equiv \frac{\partial f(R)}{\partial R}$ foi adotada para simplificar os cálculos matemáticos. Usando o resultado (HARKO *et al.*, 2011),

$$\delta R = (R_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} \square - \nabla_\mu \nabla_\nu) \delta g^{\mu\nu}, \quad (4.5)$$

temos para (4.4),

$$\delta S = \frac{\sqrt{-g}}{2\kappa^2} \int \left[f'(R) (R_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} \square - \nabla_\mu \nabla_\nu) \delta g^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} f(R) \delta g^{\mu\nu} + \frac{2\kappa^2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)}{\delta g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} \right] d^4x, \quad (4.6)$$

$$\delta S = \frac{\sqrt{-g}}{2\kappa^2} \int \left[f'(R) (R_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} \square - \nabla_\mu \nabla_\nu) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} f(R) + \frac{2\kappa^2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)}{\delta g^{\mu\nu}} \right] \delta g^{\mu\nu} d^4x. \quad (4.7)$$

Para qualquer variação $\delta g^{\mu\nu}$ devemos ter $\delta S = 0$, assim,

$$f'(R) (R_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} \square - \nabla_\mu \nabla_\nu) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} f(R) + \frac{2\kappa^2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)}{\delta g^{\mu\nu}} = 0. \quad (4.8)$$

Usando o resultado dado por (2.7), e lembrando que $\kappa^2 = 8\pi G$, temos, por fim, as equações

de campo da gravidade $f(R)$ (SOTIRIOU; FARAONI, 2010; FELICE; TSUJIKAWA, 2010),

$$f'(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}f(R) - (\nabla_\mu\nabla_\nu - g_{\mu\nu}\square) f'(R) = 8\pi GT_{\mu\nu}. \quad (4.9)$$

4.2 Cosmografia da Teoria de Gravidade $f(R)$

Para obtermos a cosmografia da gravidade $f(R)$, precisamos obter primeiro a chamada “equação *master*” para o parâmetro de Hubble dentro dessa teoria. Substituindo a métrica de FLRW (3.2), para um universo plano, homogêneo e isotrópico, nas equações de campo (4.9), e considerando um TEM tal que $T_\nu^\mu = (\rho_m, -p_m, -p_m, -p_m)$, obtemos

$$H^2 = \frac{1}{3} \left[\rho_{curv} + \frac{\rho_m}{f'(R)} \right], \quad (4.10)$$

como equação modificada de Friedmann, e

$$2\dot{H} + 3H^2 = - (p_{curv} + p_m), \quad (4.11)$$

como equação modificada de Raychaudhuri. A primeira é a relação que governa a expansão do Universo, e a segunda nos dá a evolução das grandezas cinemáticas associadas às deformações. Nessas expressões, foram adotadas unidades tais que $8\pi G = 1$, $c = 1$, ρ_m e p_m são a densidade e a pressão da matéria-energia, respectivamente, e ρ_{curv} e p_{curv} são a densidade e a pressão para o chamado “fluido de curvatura efetivo”¹, definidas ordenadamente como (CAPOZZIELLO *et al.*, 2005)

$$\rho_{curv} = \frac{1}{f'(R)} \left\{ \frac{1}{2} [f(R) - Rf'(R)] - 3H\dot{R}f''(R) \right\}, \quad (4.12)$$

$$p_{curv} = w_{curv}\rho_{curv}. \quad (4.13)$$

Nesta última expressão, w_{curv} é o índice barotrópico efetivo, o qual é dado por (CAPOZZIELLO *et al.*, 2005)

$$w_{curv} = -1 + \frac{\ddot{R}f''(R) + \dot{R} [\dot{R}f'''(R) - Hf''(R)]}{[f(R) - Rf'(R)]/2 - 3H\dot{R}f''(R)}. \quad (4.14)$$

Se considerarmos o Universo preenchido com poeira, $p_m = 0$, e levarmos em conta a

¹Os termos extras que surgem nas equações de campo de teorias alternativas de gravidade, relativamente a RG, podem ser interpretados como fluidos extras presentes no sistema considerado.

relação (4.13), a equação (4.11) se torna

$$2\dot{H} + 3H^2 = -\rho_{curv}w_{curv}, \quad (4.15)$$

$$H^2 = -\frac{1}{3}\rho_{curv}w_{curv} - \frac{2}{3}\dot{H}. \quad (4.16)$$

Igualando este último resultado à equação (4.10), obtemos

$$-\frac{1}{3}\rho_{curv}w_{curv} - \frac{2}{3}\dot{H} = \frac{1}{3} \left[\rho_{curv} + \frac{\rho_m}{f'(R)} \right], \quad (4.17)$$

$$\dot{H} = -\frac{1}{2} \left[\frac{\rho_m}{f'(R)} + (1 + w_{curv}) \rho_{curv} \right]. \quad (4.18)$$

Considerando as definições de ρ_{curv} e w_{curv} dadas em (4.12) e (4.14), respectivamente, podemos escrever a equação (4.18) como

$$\dot{H} = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{\rho_m}{f'(R)} + \left[\frac{\ddot{R}f''(R) + \dot{R} \left[\dot{R}f'''(R) - Hf''(R) \right]}{f'(R)\rho_{curv}} \right] \rho_{curv} \right\}, \quad (4.19)$$

$$\dot{H} = -\frac{1}{2f'(R)} \left\{ \rho_m + \ddot{R}f''(R) + \dot{R} \left[\dot{R}f'''(R) - Hf''(R) \right] \right\}. \quad (4.20)$$

Assumindo que a densidade de matéria-energia ρ_m é conservada,

$$\rho_m = 3H_0^2\Omega_m a^{-3}. \quad (4.21)$$

onde $\Omega_m = \frac{8\pi G\rho_m}{3H_0^2}$ é o parâmetro adimensional de densidade de matéria. Usando esta expressão para ρ_m , a equação (4.20) pode ser escrita como

$$\dot{H} = -\frac{1}{2f'(R)} \left\{ 3H_0^2\Omega_m a^{-3} + \ddot{R}f''(R) + \dot{R} \left[\dot{R}f'''(R) - Hf''(R) \right] \right\}. \quad (4.22)$$

Esta expressão é a chamada “equação *master*” para o parâmetro de Hubble que estávamos procurando (CAPOZZIELLO *et al.*, 2005).

Voltemos agora à equação modificada de Friedmann (4.10). Introduzindo nela as expressões para a densidades de matéria e do “fluido de curvatura”, ρ_m e ρ_{curv} , dadas em

ordem pelas equações (4.12) e (4.21), obtemos

$$H^2 = \frac{1}{3} \left\{ \frac{3H_0^2 \Omega_m a^{-3}}{f'(R)} + \frac{1}{f'(R)} \left\{ \frac{1}{2} [f(R) - Rf'(R)] - 3H\dot{R}f''(R) \right\} \right\}, \quad (4.23)$$

$$H^2 = \frac{H_0^2 \Omega_m a^{-3}}{f'(R)} + \frac{f(R) - Rf'(R) - 6H\dot{R}f''(R)}{6f'(R)}. \quad (4.24)$$

Tomando, de forma respectiva, os valores atuais desta última expressão e da “equação *master*” para o parâmetro de Hubble (4.22), temos

$$H_0^2 = \frac{H_0^2 \Omega_m a_0^{-3}}{f'(R_0)} + \frac{f(R_0) - R_0 f'(R_0) - 6H_0 \dot{R}_0 f''(R_0)}{6f'(R_0)}, \quad (4.25)$$

$$-\dot{H}_0 = \frac{3H_0^2 \Omega_m a_0^{-3} + \dot{R}_0^2 f'''(R_0) + (\ddot{R}_0 - H_0 \dot{R}_0) f''(R_0)}{2f'(R_0)}. \quad (4.26)$$

As expressões (4.25) e (4.26) formam um sistema de duas equações e quatro incógnitas: $f(R_0)$, $f'(R_0)$, $f''(R_0)$ e $f'''(R_0)$. A fim de tornar esse sistema fechado, são necessárias outras duas relações. Podemos obter a primeira delas a partir da equação modificada de Friedmann (4.10), a qual com a inserção das unidades é dada por (CAPOZZIELLO *et al.*, 2005)

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3c^4} \left[\rho_{curv} + \frac{\rho_m}{f'(R)} \right]. \quad (4.27)$$

Esta equação nos mostra que, dentro da gravidade $f(R)$, a constante gravitacional G é substituída por um valor efetivo, G_{ef} , isto é, dependente do tempo, dado por

$$G_{ef} = \frac{G}{f'(R)}. \quad (4.28)$$

Neste ponto, podemos fazer uma suposição razoável, que no tempo atual, t_0 , G_{ef} é igual à constante Newtoniana G , isto é, em $t = t_0$, $G_{ef} \rightarrow G$. Onde, para isso ser possível, da relação (4.27), precisamos ter

$$f'(R_0) = 1. \quad (4.29)$$

Levando em conta este resultado, e o fato que, em $t = t_0$, o fator de escala é estabelecido para ser igual a unidade, isto é, $a_0 = 1$, as equações (4.25) e (4.26) se tornam de maneira

respectiva,

$$H_0^2 = \frac{f(R_0) - R_0 - 6H_0\dot{R}_0 f''(R_0)}{6(1 - \Omega_m)}, \quad (4.30)$$

$$-\dot{H}_0 = \frac{3H_0^2\Omega_m + \dot{R}_0^2 f'''(R_0) + (\ddot{R}_0 - H_0\dot{R}_0) f''(R_0)}{2}. \quad (4.31)$$

Agora temos um sistema com duas equações e as três incógnitas $f(R_0)$, $f''(R_0)$ e $f'''(R_0)$. A fim de fechar o sistema, vamos diferenciar ambos os lados da “equação *master*” (4.22) em relação ao tempo cósmico t , obtendo

$$\begin{aligned} \ddot{H} &= \frac{\dot{R}^2 f'''(R) + (\ddot{R} - H\dot{R}) f''(R) + 3H_0^2\Omega_m a^{-3}}{2 [\dot{R} f''(R)]^{-1} [f'(R)]^2} \\ &\quad - \frac{\dot{R}^3 f^{(iv)}(R) + (3\dot{R}\ddot{R} - H\dot{R}^2) f'''(R)}{2f'(R)} \\ &\quad - \frac{(\ddot{R} - H\ddot{R} + \dot{H}\dot{R}) f''(R) - 9H_0^2\Omega_m H a^{-3}}{2f'(R)}, \end{aligned} \quad (4.32)$$

com $f^{(iv)}(R) = d^4 f/dR^4$. Fazendo agora a suposição de que a função $f(R)$ pode ser bem aproximada por sua expansão de Taylor de terceira ordem em torno de $R - R_0$, obtemos

$$f(R) = f(R_0) + f'(R_0)(R - R_0) + \frac{1}{2}f''(R_0)(R - R_0)^2 + \frac{1}{6}f'''(R_0)(R - R_0)^3. \quad (4.33)$$

Em tal aproximação, devemos ter $f^n(R_0) = d^n f/dR^n = 0$ para $n \geq 4$ (WOODARD, 2007; FROLOV, 2008; JORAS, 2011), de modo que o valor atual de (4.32) é dado por

$$\begin{aligned} \ddot{H}_0 &= \frac{\dot{R}_0^2 f'''(R_0) + (\ddot{R}_0 - H_0\dot{R}_0) f''(R_0) + 3H_0^2\Omega_m}{2 [\dot{R}_0 f''(R_0)]^{-1}} \\ &\quad - \frac{(3\dot{R}_0\ddot{R}_0 - H_0\dot{R}_0^2) f'''(R_0) + (\ddot{R}_0 - H_0\ddot{R}_0 + \dot{H}_0\dot{R}_0) f''(R_0) - 9H_0^3\Omega_m}{2}. \end{aligned} \quad (4.34)$$

As expressões (4.25), (4.26) e (4.34) formam agora um sistema fechado com três equações e três incógnitas: $f(R_0)$, $f''(R_0)$ e $f'''(R_0)$.

Uma vez fechado o sistema de equações, podemos resolvê-lo para $f(R_0)$, $f''(R_0)$ e

$f'''(R_0)$, e então, através dos valores atuais das derivadas da função de Hubble (3.51)-(3.54) e do escalar de Ricci (3.70)-(3.73), podemos obter a função $f(R_0)$ e suas derivadas $f''(R_0)$ e $f'''(R_0)$ em termos dos PC (q_0, j_0, s_0, l_0) . Resolvendo o sistema, obtemos então (CAPOZZIELLO *et al.*, 2008):

$$\frac{f(R_0)}{6H_0^2} = -\frac{\mathcal{P}_0(q_0, j_0, s_0, l_0)\Omega_m + \mathcal{Q}_0(q_0, j_0, s_0, l_0)}{\mathcal{R}(q_0, j_0, s_0, l_0)}, \quad (4.35)$$

$$f'(R_0) = 1, \quad (4.36)$$

$$\frac{f''(R_0)}{(6H_0^2)^{-1}} = -\frac{\mathcal{P}_2(q_0, j_0, s_0)\Omega_m + \mathcal{Q}_2(q_0, j_0, s_0)}{\mathcal{R}(q_0, j_0, s_0, l_0)}, \quad (4.37)$$

$$\frac{f'''(R_0)}{(6H_0^2)^{-2}} = -\frac{\mathcal{P}_3(q_0, j_0, s_0, l_0)\Omega_m + \mathcal{Q}_3(q_0, j_0, s_0, l_0)}{(j_0 - q_0 - 2)\mathcal{R}(q_0, j_0, s_0, l_0)}. \quad (4.38)$$

As seguintes quantidades foram definidas (CAPOZZIELLO *et al.*, 2008):

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_0 = & (j_0 - q_0 - 2)l_0 - (3s_0 + 7j_0 + 6q_0^2 + 41q_0 + 22)s_0 \\ & - [(3q_0 + 16)j_0 + 20q_0^2 + 64q_0 + 12] j_0 \\ & - (3q_0^4 + 25q_0^3 + 96q_0^2 + 72q_0 + 20), \end{aligned} \quad (4.39)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_0 = & (q_0^2 - j_0q_0 + 2q_0)l_0 + [3q_0s_0 + (4q_0 + 6)j_0 + 6q_0^3 + 44q_0^2 + 22q_0 - 12] s_0 \\ & + [2j_0^2 + (3q_0^2 + 10q_0 - 6)j_0 + 17q_0^3 + 52q_0^2 + 54q_0 + 36] j_0 \\ & + 3q_0^5 + 28q_0^4 + 118q_0^3 + 72q_0^2 - 76q_0 - 64, \end{aligned} \quad (4.40)$$

$$\mathcal{P}_2 = 9s_0 + 6j_0 + 9q_0^2 + 66q_0 + 42, \quad (4.41)$$

$$\mathcal{Q}_2 = -\{6(q_0 + 1)s_0 + [2j_0 - 2(1 - q_0)] j_0 + 6q_0^3 + 50q_0^2 + 74q_0 + 32\}, \quad (4.42)$$

$$\mathcal{P}_3 = 3l_0 + 3s_0 - 9(q_0 + 4)j_0 - (45q_0^2 + 78q_0 + 12), \quad (4.43)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_3 &= \quad (4.44) \\ &- \{2(1 + q_0)l_0 + 2(j_0 + q_0)s_0 - (2j_0 + 4q_0^2 + 12q_0 + 5)j_0 - (30q_0^3 + 84q_0^2 + 78q_0 + 24)\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= \quad (4.45) \\ &(j_0 - q_0 - 2)l_0 - (3s_0 - 2j_0 + 6q_0^2 + 50q_0 + 40)s_0 \\ &+ [(3q_0 + 10)j_0 + 11q_0^2 + 4q_0 - 18]j_0 - (3q_0^4 + 34q_0^3 + 246q_0 + 104). \end{aligned}$$

As equações (4.35)-(4.45) tornam possível estimar os valores atuais da função $f(R)$ e de suas três primeiras derivadas em função da constante de Hubble H_0 e dos PC (q_0, j_0, s_0, l_0) , uma vez que, um valor para o parâmetro de densidade de matéria Ω_m seja dado. Pelo fato das funções $f(R_0)$ e suas derivadas serem escritas em termos de (q_0, j_0, s_0, l_0) , convencionou-se chamar as equações (4.35)-(4.38) de “cosmografia” da gravidade $f(R)$ (CAPOZZIELLO *et al.*, 2008). No próximo capítulo, será mostrado o principal objetivo do presente trabalho, como se obter uma cosmografia para a gravidade $f(R, T)$.

5 COSMOGRAFIA DA TEORIA DE GRAVIDADE $f(R, T)$

5.1 A Teoria $f(R, T)$ de Gravidade Modificada

Como já mencionado no capítulo anterior, as teorias $f(R)$ são a classe mais popular de teorias alternativas de gravidade (SOTIRIOU; FARAONI, 2010; FELICE; TSUJIKAWA, 2010). Contudo, apesar de virtudes como sua simplicidade e o bom comportamento em escalas cosmológicas, a grande maioria dos modelos $f(R)$ parece ser desfavorecida por testes na escala do Sistema Solar (CHIBA *et al.*, 2007; CAPOZZIELLO *et al.*, 2007). As falhas apresentadas na aplicabilidade das teorias $f(R)$ foram também expostas em (HARKO *et al.*, 2011), onde essas deficiências motivaram uma generalização dessa teoria, na qual, além da dependência de um termo geral em R , a ação gravitacional também inclui um termo geral em $T = T^\mu_\mu$, o traço do TEM, dando origem a teoria de gravidade modificada $f(R, T)$. Existem algumas motivações para a inclusão de T na ação, tais como: efeitos quânticos, os quais podem ser relacionados à não-conservação do TEM por essas teorias de gravidade (XU *et al.*, 2016); fluidos imperfeitos, uma vez que, a anisotropia surge naturalmente em campos de matéria em altas densidades, a dependência em T da ação gravitacional deve vir da consideração de efeitos como viscosidade ou anisotropia (HARKO *et al.*, 2011); fluidos extras, uma vez que, os termos proporcionais a T que surgem nas equações de campo podem ser interpretados como representando fluidos extras presentes no sistema considerado (MORAES *et al.*, 2018).

O ponto de partida para chegarmos às equações de campo das teorias $f(R, T)$ é a seguinte ação (HARKO *et al.*, 2011),

$$S = \int \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2\kappa^2} f(R, T) + \mathcal{L}_m \right] d^4x, \quad (5.1)$$

sendo $f(R, T)$ uma função arbitrária de R e T . Variando (5.1) em relação à métrica,

temos

$$\delta S = \int \left[\frac{\sqrt{-g} \delta f(R, T)}{2\kappa^2 \delta g^{\mu\nu}} + \frac{f(R, T) \delta \sqrt{-g}}{2\kappa^2 \delta g^{\mu\nu}} + \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_m)}{\delta g^{\mu\nu}} \right] \delta g^{\mu\nu} d^4x, \quad (5.2)$$

$$\delta S = \frac{\sqrt{-g}}{2\kappa^2} \int \left[f_R \delta R + f_T \frac{\delta T}{\delta g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} f(R, T) \delta g^{\mu\nu} + \frac{2\kappa^2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_m)}{\delta g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} \right] d^4x. \quad (5.3)$$

De forma a tornar mais simples a notação, usamos as seguintes definições:

$$\begin{cases} f = f(R, T), \\ f_R = f_R(R, T) \equiv \frac{\partial f(R, T)}{\partial R}, \\ f_T = f_T(R, T) \equiv \frac{\partial f(R, T)}{\partial T}. \end{cases} \quad (5.4)$$

Usando o resultado (4.5) (HARKO *et al.*, 2011), bem como o fato que $T = g^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta}$, obtemos para (5.3),

$$\begin{aligned} \delta S = \frac{\sqrt{-g}}{2\kappa^2} \int & \left[f_R (R_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} \square - \nabla_\mu \nabla_\nu) \delta g^{\mu\nu} + f_T \frac{\delta(g^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta})}{\delta g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} f \delta g^{\mu\nu} + \frac{2\kappa^2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_m)}{\delta g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} \right] d^4x. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Sendo

$$\frac{\delta(g^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta})}{\delta g^{\mu\nu}} = T_{\mu\nu} + \Theta_{\mu\nu}, \quad (5.6)$$

e

$$\Theta_{\mu\nu} \equiv g^{\alpha\beta} \frac{\delta T_{\alpha\beta}}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (5.7)$$

então (5.5) se torna

$$\begin{aligned} \delta S = \frac{\sqrt{-g}}{2\kappa^2} \int & \left[f_R (R_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} \square - \nabla_\mu \nabla_\nu) + f_T (T_{\mu\nu} + \Theta_{\mu\nu}) \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} f + \frac{2\kappa^2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_m)}{\delta g^{\mu\nu}} \right] \delta g^{\mu\nu} d^4x. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Como para qualquer variação $\delta g^{\mu\nu}$ devemos ter $\delta S = 0$, então,

$$f_R (R_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\square - \nabla_\mu \nabla_\nu) + f_T (T_{\mu\nu} + \Theta_{\mu\nu}) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}f + \frac{2\kappa^2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)}{\delta g^{\mu\nu}} = 0. \quad (5.9)$$

Por fim, usando o resultado dado por (2.7), e assumindo unidades tais que $c = 1$, obtemos para a gravidade $f(R, T)$ as seguintes equações de campo (HARKO *et al.*, 2011),

$$f_R R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f g_{\mu\nu} + (g_{\mu\nu}\square - \nabla_\mu \nabla_\nu) f_R = 8\pi G T_{\mu\nu} - f_T T_{\mu\nu} - f_T \Theta_{\mu\nu}. \quad (5.10)$$

5.2 Cosmografia da Teoria de Gravidade $f(R, T)$

Como já mencionado, a abordagem cosmográfica pode ser usada para ajudar a discriminar entre modelos cosmológicos rivais. Isso pode ser feito construindo o que chamaremos, no caso da teoria $f(R, T)$, de “cosmografia” da gravidade $f(R, T)$, que consta em escrever a função $f(R, T)$ e suas primeiras derivadas em termos dos PC (q_0, j_0, s_0, l_0) . De certa forma, isso consiste em inverter a abordagem usual, isto é, em vez de assumirmos um dado modelo baseado em uma teoria de gravidade específica e, a partir daí, obtermos o conjunto (q_0, j_0, s_0, l_0) como uma espécie de sub-produto, faremos aqui o inverso, escreveremos uma função $f(R, T)$ arbitrária e suas derivadas em termos de (q_0, j_0, s_0, l_0) , e usaremos os valores observacionais desses parâmetros para restringir as possíveis formas de $f(R, T)$. Isso é análogo ao que já foi feito para outras teorias de gravidade, tais como a já referida, no capítulo anterior, $f(R)$ (CAPOZZIELLO *et al.*, 2008), bem como para a chamada gravidade tele-paralela $f(\mathcal{T})$, onde \mathcal{T} é o escalar de torção (CAPOZZIELLO *et al.*, 2011). A construção da cosmografia da gravidade $f(R, T)$, nesta seção, constitui o principal resultado obtido no presente trabalho.

Como primeiro passo para se obter a cosmografia da gravidade $f(R, T)$, aplicaremos a métrica de FLRW dada em (3.2) às equações de campo (5.10). Assumindo $\mathcal{L}_m = -p_m$ para um fluido perfeito, tal que $T_\nu^\mu = (\rho_m, -p_m, -p_m, -p_m)$, onde p_m e ρ_m são a pressão termodinâmica e a densidade de energia da matéria do fluido, respectivamente. Obtemos, assim,

$$3H^2 f_R + \frac{1}{2}(f - f_R R) + 3\dot{f}_R H = (8\pi G + f_T) \rho_m + f_T p_m, \quad (5.11)$$

como equação do tipo Friedmann, e

$$2f_R \dot{H} + \ddot{f}_R - \dot{f}_R H = -(8\pi G + f_T) (\rho_m + p_m), \quad (5.12)$$

como equação do tipo Raychaudhuri. Considerando esses dois conjuntos de equações para o caso de um universo preenchido com poeira, isto é, matéria bariônica mais ME fria, para o qual $p_m = 0$, temos para as equações (5.11) e (5.12), respectivamente,

$$3H^2 f_R + \frac{1}{2} (f - f_R R) + 3\dot{f}_R H = (8\pi G + f_T) \rho_m, \quad (5.13)$$

$$2f_R \dot{H} + \ddot{f}_R - \dot{f}_R H = -(8\pi G + f_T) \rho_m. \quad (5.14)$$

As expressões (5.13) e (5.14) formam um sistema com duas equações e cinco incógnitas, a saber: f , f_T , f_R , \dot{f}_R e \ddot{f}_R . A fim de tornar esse sistema fechado, precisamos fazer algumas suposições, que podem ser distintas para diferentes classes de modelos do tipo $f(R, T)$. Portanto, daqui em diante, trabalharemos com a classe $f(R, T) = f(R) + f(T)$, onde $f(R)$ e $f(T)$ são duas funções arbitrárias de R e T , respectivamente.

Aqui, antes de prosseguirmos na obtenção da cosmografia da teoria $f(R, T)$, iremos brevemente justificar a motivação para trabalharmos como essa classe específica de teorias. Esses modelos, de fato, configuram a grande maioria de modelos $f(R, T)$ na literatura, como pode-se ver em (HARKO *et al.*, 2011; JAMIL *et al.*, 2012; CHAKRABORTY, 2013; SHABANI; FARHOUDI, 2013; SHABANI; FARHOUDI, 2014; SHARIF; ZUBAIR, 2014; BAFFOU *et al.*, 2015; DAS *et al.*, 2016; SINGH; SINGH, 2016; XU *et al.*, 2016; ZAREGONBADI *et al.*, 2016; MORAES *et al.*, 2016; SHABANI; ZIAIE, 2017; MORAES *et al.*, 2018; SHABANI; ZIAIE, 2018; MORAES, 2019; JR. *et al.*, 2019; CARVALHO *et al.*, 2020), entre tantos outros, embora modelos de acoplamento forte entre geometria e matéria também possam ser vistos (MORAES; SAHOO, 2017).

Como mencionado na seção anterior, em geral, as teorias de gravidade $f(R, T)$ não conservam o TEM. Para vermos isso de um ponto de vista matemático, tomemos a divergência covariante de ambos os lados das equações de campo (5.10),

$$\nabla^\mu \left[f_R R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} f g_{\mu\nu} + (g_{\mu\nu} \square - \nabla_\mu \nabla_\nu) f_R \right] = \nabla^\mu (8\pi G T_{\mu\nu} - f_T T_{\mu\nu} - f_T \Theta_{\mu\nu}), \quad (5.15)$$

$$\begin{aligned} f_R \nabla^\mu R_{\mu\nu} + R_{\mu\nu} \nabla^\mu f_R - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla^\mu f + (g_{\mu\nu} \nabla^\mu \square - \nabla^\mu \nabla_\mu \nabla_\nu) f_R = \\ 8\pi G \nabla^\mu T_{\mu\nu} - f_T \nabla^\mu T_{\mu\nu} - T_{\mu\nu} \nabla^\mu f_T - f_T \nabla^\mu \Theta_{\mu\nu} - \Theta_{\mu\nu} \nabla^\mu f_T, \end{aligned} \quad (5.16)$$

$$f_R \nabla^\mu R_{\mu\nu} + R_{\mu\nu} \nabla^\mu f_R - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (f_R \nabla^\mu R + f_T \nabla^\mu T) + (\nabla_\nu \square - \square \nabla_\nu) f_R = (5.17)$$

$$(8\pi G - f_T) \nabla^\mu T_{\mu\nu} - (T_{\mu\nu} + \Theta_{\mu\nu}) \nabla^\mu f_T - f_T \nabla^\mu \Theta_{\mu\nu}.$$

Rearranjando os termos, temos

$$\nabla^\mu \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) f_R + R_{\mu\nu} \nabla^\mu f_R + (\nabla_\nu \square - \square \nabla_\nu) f_R - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} f_T \nabla^\mu T = (5.18)$$

$$(8\pi G - f_T) \nabla^\mu T_{\mu\nu} - (T_{\mu\nu} + \Theta_{\mu\nu}) \nabla^\mu f_T - f_T \nabla^\mu \Theta_{\mu\nu}.$$

Usando os seguintes resultados:

$$\nabla^\mu \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) = 0, \quad (5.19)$$

$$(\nabla_\nu \square - \square \nabla_\nu) f_R = -R_{\mu\nu} \nabla^\mu f_R, \quad (5.20)$$

temos então para (5.18),

$$(8\pi G - f_T) \nabla^\mu T_{\mu\nu} - (T_{\mu\nu} + \Theta_{\mu\nu}) \nabla^\mu f_T - f_T \nabla^\mu \Theta_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} f_T \nabla^\mu T, \quad (5.21)$$

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = \frac{1}{(8\pi G - f_T)} \left[(T_{\mu\nu} + \Theta_{\mu\nu}) \nabla^\mu f_T + f_T \nabla^\mu \Theta_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} f_T \nabla^\mu T \right]. \quad (5.22)$$

Portanto, temos para a divergência covariante de $T_{\mu\nu}$ que (ALVARENGA *et al.*, 2013; BARRIENTOS; RUBILAR, 2014),

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = \frac{f_T}{(8\pi G - f_T)} \left[(T_{\mu\nu} + \Theta_{\mu\nu}) \nabla^\mu \ln f_T + \nabla^\mu \Theta_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla^\mu T \right]. \quad (5.23)$$

A equação (5.23) nos conta que, em geral, os modelos de gravidade $f(R, T)$ não conservam $T_{\mu\nu}$. De um ponto de vista termodinâmico, a não conservação do TEM nessas teorias estaria relacionada a um processo cosmológico irreversível de criação de matéria, no qual, devido a um acoplamento entre os setores geométrico e de matéria, haveria um fluxo de energia entre o campo gravitacional e a matéria, com partículas sendo permanentemente criadas e adicionadas ao espaço-tempo, sendo o processo inverso proibido

(HARKO; LOBO, 2010; HARKO *et al.*, 2013; HARKO, 2014). Apesar dessa não conservação de $T_{\mu\nu}$ ter sido sugerida como uma possível solução para o problema da aceleração cósmica (SHABANI; ZIAIE, 2017), tem sido mostrado que esse tipo de modelo $f(R, T)$ não-conservativo não possui viabilidade cosmológica, uma vez que, não concorda com os dados observacionais (VELTEN; CARAMÊS, 2017). Além disso, em (JR. *et al.*, 2019) tem sido chamada à atenção para a falta de explicação física convincente para o processo de criação contínua de matéria, previsto por esses modelos, dentro da perspectiva de configurações em equilíbrio hidrostático. Assim, por essas razões, aqui trabalharemos apenas com modelos de gravidade $f(R, T)$ que conservam o TEM.

Voltaremos agora à obtenção da cosmografia das teorias $f(R, T)$. Assumindo que o TEM é conservado nessas teorias, podemos usar a relação (4.21) nas equações (5.13) e (5.14), e assumir que $8\pi G = 1$, de forma que essas duas equações se tornam, respectivamente,

$$3H^2 f_R + \frac{1}{2} (f - f_R R) + 3\dot{f}_R H = (1 + f_T) 3H_0^2 \frac{\Omega_m}{a^3}, \quad (5.24)$$

$$2f_R \dot{H} + \ddot{f}_R - \dot{f}_R H = - (1 + f_T) 3H_0^2 \frac{\Omega_m}{a^3}. \quad (5.25)$$

A fim de fecharmos o sistema formado por essas duas últimas equações, diferenciamos (5.25) em relação ao tempo cósmico t , obtendo

$$\ddot{H} = \frac{\left(9H_0^2 \frac{\Omega_m H}{a^3} - \ddot{f}_R + \ddot{f}_R H + \dot{f}_R \dot{H}\right)}{2f_R} + \frac{\left(3H_0^2 \frac{\Omega_m}{a^3} + \ddot{f}_R - \dot{f}_R H\right) \dot{f}_R}{2f_R^2}. \quad (5.26)$$

Das equações de campo para a classe de teorias $f(R, T) = f(R) + f(T)$, tem-se que a constante gravitacional G tem um valor efetivo, G_{ef} dado por (HARKO *et al.*, 2011)

$$G_{ef} = \frac{G}{f_R} \left[1 + \frac{f_T}{8\pi G} \right], \quad (5.27)$$

Em uma boa aproximação, devemos ter que, em $t = t_0$, $G_{ef} \rightarrow G$. Então, desse último resultado temos

$$\begin{cases} f_T^{(0)} \simeq 0, \\ f_R^{(0)} = 1. \end{cases} \quad (5.28)$$

O sobrescrito 0, assim como esse mesmo sub-escrito, significa que o valor está sendo tomado em t_0 . Assim, usando esse último resultado, juntamente com $a_0 = 1$, temos para

os valores atuais das equações (5.24)-(5.26), ordenadamente:

$$3H_0^2 + \frac{1}{2}(f_0 - R_0) + 3\dot{f}_R^{(0)}H_0 = 3H_0^2\Omega_m, \quad (5.29)$$

$$2\dot{H}_0 + \ddot{f}_R^{(0)} - \dot{f}_R^{(0)}H_0 = -3H_0^2\Omega_m, \quad (5.30)$$

$$\ddot{H}_0 = \frac{\left(9H_0^3\Omega_m - \ddot{f}_R^{(0)} + \ddot{f}_R^{(0)}H_0 + \dot{f}_R^{(0)}\dot{H}_0\right) + \left(3H_0^2\Omega_m + \ddot{f}_R^{(0)} - \dot{f}_R^{(0)}H_0\right)\dot{f}_R^{(0)}}{2}. \quad (5.31)$$

Considere agora o seguinte artifício matemático:

$$\dot{f}_R = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f}{\partial R} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial R}, \quad (5.32)$$

$$\dot{R}f_{RR} = \frac{\partial R}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial R^2} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial R}, \quad (5.33)$$

$$\Rightarrow \dot{f}_R = \dot{R}f_{RR}. \quad (5.34)$$

De forma que podemos escrever as derivadas temporais como derivadas em relação ao argumento, as expressões (5.29)-(5.31), respectivamente, tornam-se:

$$3H_0^2 + \frac{1}{2}(f_0 - R_0) + 3\dot{R}_0 f_{RR}^{(0)} H_0 = 3H_0^2\Omega_m, \quad (5.35)$$

$$2\dot{H}_0 + \ddot{R}_0 f_{RRR}^{(0)} - \dot{R}_0 f_{RR}^{(0)} H_0 = -3H_0^2\Omega_m, \quad (5.36)$$

$$\begin{aligned} \ddot{H}_0 &= \frac{\left(9H_0^3\Omega_m - \ddot{R}_0 f_{RRRR}^{(0)} + \ddot{R}_0 f_{RRR}^{(0)} H_0 + \dot{R}_0 f_{RR}^{(0)} \dot{H}_0\right)}{2} \\ &+ \frac{\left(3H_0^2\Omega_m + \ddot{R}_0 f_{RRR}^{(0)} - \dot{R}_0 f_{RR}^{(0)} H_0\right) \dot{R}_0 f_{RR}^{(0)}}{2}. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Por fim, assumiremos que a função $f(R)$ pode ser bem aproximada por sua expansão de Taylor de terceira ordem em torno de $R - R_0$, de tal forma que $d^n f(R)/dR^n = 0$ para $n \geq 4$ (WOODARD, 2007; FROLOV, 2008; JORAS, 2011). Então, nessa aproximação,

devemos ter $f_{RRRR}^{(0)} = 0$, assim a equação (5.37) se torna

$$\ddot{H}_0 = \frac{\left(9H_0^3\Omega_m + \ddot{R}_0 f_{RRR}^{(0)} H_0 + \dot{R}_0 f_{RR}^{(0)} \dot{H}_0\right) + \left(3H_0^2\Omega_m + \ddot{R}_0 f_{RRR}^{(0)} - \dot{R}_0 f_{RR}^{(0)} H_0\right) \dot{R}_0 f_{RR}^{(0)}}{2}. \quad (5.38)$$

Agora, nós temos que as equações (5.35), (5.36) e (5.38) formam um sistema fechado com três equações e três incógnitas, a saber: f_0 , $f_{RR}^{(0)}$ e $f_{RRR}^{(0)}$. Esse sistema de equações pode ser resolvido, e então, as equações (3.51)-(3.53) e (3.70)-(3.72) relacionando, respectivamente, os valores atuais das derivadas temporais da função de Hubble H e do escalar de Ricci R aos parâmetros (q_0, j_0, s_0, l_0) , podem ser usadas para encontrarmos expressões para f_0 , $f_{RR}^{(0)}$ e $f_{RRR}^{(0)}$ em termos dos PC. Ao fazer isso, nós obtemos:

$$f_0 = \frac{6[-6 + q_0(-4 + q_0 + \Omega_m) - 2j_0 + 8\Omega_m] H_0^2}{2 + q_0}, \quad (5.39)$$

$$f_{RR}^{(0)} = -\frac{1 + 2q_0 + j_0 - 3\Omega_m}{3(2 + q_0)(-2 - q_0 + j_0) H_0^2}, \quad (5.40)$$

$$f_{RRR}^{(0)} = \frac{-2[3 + q_0(5 + q_0) + j_0] + 3(4 + q_0)\Omega_m}{6(2 + q_0)[6 + q_0(8 + q_0) + s_0] H_0^2}. \quad (5.41)$$

As equações (5.39)-(5.41) juntamente com a restrição dada em (5.28), tornam possível estimarmos os valores atuais da função $f(R, T)$ e de suas três primeiras derivadas como funções da constante de Hubble H_0 e dos PC (q_0, j_0, s_0) , uma vez que um valor para o parâmetro densidade de matéria Ω_m seja dado. Ao conjunto de equações (5.39)-(5.41), relacionando $f(R, T)$ e suas derivadas aos PC, será dado o nome de “cosmografia” da gravidade $f(R, T)$.

5.3 Cosmografia em Diferentes Cenários de Energia Escura

Nesta seção, abordaremos alguns dos principais cenários de EE dentro da perspectiva da gravidade $f(R, T)$. Embora seja bem conhecido na literatura que os modelos $f(R, T)$ podem evadir o problema da constante cosmológica, uma vez que, tais modelos permitem obter a expansão acelerada atual do Universo através de termos extras que aparecem em suas equações de campo (BARRIENTOS; RUBILAR, 2014; KUMAR; SINGH, 2015; SINGH; SINGH, 2016; MORAES *et al.*, 2016; MORAES; SANTOS, 2016; MORAES; SAHOO, 2017; MORAES *et al.*, 2018), temos que os PC podem ser expressos em termos da densidade e dos parâmetros da equação de estado da EE. Assim, nós podemos resolver

as equações cosmográficas da gravidade $f(R, T)$ e obter o mesmo conjunto (q_0, j_0, s_0) que o modelo de EE que esteja sendo considerado.

A fim de reduzirmos a dependência dos nossos resultados de qualquer cenário teórico subjacente, é conveniente adotarmos uma expressão parametrizada para a equação de estado da EE. Seguindo a prescrição da chamada “Força Tarefa da EE” (ALBRECHT *et al.*, 2006), aqui adotaremos a parametrização CPL (Chevallier-Polarski-Linder), a qual, para um universo plano, preenchido com poeira e EE, é dada por (CHEVALLIER; POLARSKI, 2001; LINDER, 2003)

$$w = w_0 + w_a(1 - a) = w_0 + w_a z(1 + z)^{-1}. \quad (5.42)$$

Sendo w_0 o valor atual da equação de estado, aqui assumida para ser do tipo barotrópica, isto é, $w = \frac{p}{\rho}$, e w_a relacionado a uma possível evolução temporal dessa equação. Por ser bem comportada em altos *redshifts* e por sua alta acurácia em reconstruir muitos modelos de campos escalares, essa parametrização se tornou uma das mais populares para se estudar a EE (JASSAL *et al.*, 2005; BASILAKOS *et al.*, 2008).

Para um universo plano, o tempo conforme $\eta = \frac{dt}{a}$ está relacionado ao *redshift* z através da relação (LINDER, 2003)

$$\eta(z) = \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}. \quad (5.43)$$

Por sua vez, dentro da RG, temos que a condição de conservação para cada componente de matéria-energia é dada pela seguinte equação (D’INVERNO, 1992),

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3H \left(1 + \frac{p}{\rho} \right) \equiv -3H [1 + w(z)], \quad (5.44)$$

onde o parâmetro de Hubble vem da equação de Friedmann,

$$H^2 = \frac{8\pi\rho}{3}. \quad (5.45)$$

Combinando as equações (5.43)-(5.45), temos que

$$H_0\eta(z) = \int_0^z dz' \left[\Omega_M(1 + z')^3 + (1 - \Omega_M)e^{3 \int_0^{\ln(1+z')} \ln(1+z'')[1+w(z'')] dz''} \right]^{-1/2}. \quad (5.46)$$

Comparando essa última expressão com a equação (5.43), obtemos

$$\frac{H^2(z)}{H_0^2} = \Omega_M(1 + z)^3 + (1 - \Omega_M)e^{3 \int_0^{\ln(1+z)} \ln(1+z')[1+w(z')] dz'}. \quad (5.47)$$

A exponencial do lado direito dessa equação resulta em (LINDER, 2003)

$$e^{3 \int_0^{1+z} d \ln(1+z')^{[1+w(z')]} = a^{-3(1+w_0+w_a)} e^{-3w_a(1-a)}. \quad (5.48)$$

De forma que, usando esse último resultado, (5.47) é reescrita como

$$\frac{H^2(z)}{H_0^2} = \Omega_M(1+z)^3 + (1-\Omega_M)a^{-3(1+w_0+w_a)} e^{-3w_a(1-a)}. \quad (5.49)$$

Usando $1+z = \frac{a_0}{a}$, com $a_0 = 1$, encontramos $1-a = \frac{z}{1+z}$, de forma que esse último resultado é dado por

$$\frac{H^2(z)}{H_0^2} = \Omega_M(1+z)^3 + (1-\Omega_M)(1+z)^{3(1+w_0+w_a)} e^{-(3w_a z/(1+z))}. \quad (5.50)$$

Podemos agora obter expressões para os PC (q_0, j_0, s_0) em termos dos parâmetros do modelo CPL para EE. Lembrando que as expressões que obteremos só irão até o parâmetro *snap* porque as equações cosmográficas, aqui obtidas, para a gravidade $f(R, T)$, (5.39)-(5.41), não dependem do parâmetro *lerk*. Para isso, notemos que (CAPOZZIELLO *et al.*, 2008)

$$\frac{d}{dt} = -(1+z)H(z) \frac{d}{dz}. \quad (5.51)$$

Essa relação pode ser usada para calcular as derivadas da função de Hubble, e então resolvendo-as, avaliadas em $z = 0$, obtemos os PC de interesse. A partir dessa equação, obtemos

$$\frac{dH}{dz} = -\frac{1}{(1+z)H} \frac{dH}{dt}. \quad (5.52)$$

Usando (3.51), temos

$$\frac{dH}{dz} = \frac{H}{1+z}(1+q), \quad (5.53)$$

sendo

$$\frac{d}{dz}(H^2) = 2H \frac{dH}{dz}, \quad (5.54)$$

e usando o resultado (5.53), obtemos

$$\frac{d}{dz}(H^2) = \frac{2H^2}{1+z}(1+q). \quad (5.55)$$

Resolvendo essa última expressão para q , e avaliando em $z = 0$,

$$q_0 = \frac{1}{2H_0^2} \frac{d(H^2)}{dz} \Big|_{z=0} - 1. \quad (5.56)$$

Portanto, calculando a derivada do lado direito dessa equação com o auxílio da expressão (5.50), temos que para q_0 ,

$$q_0 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}(1 - \Omega_M)w_0. \quad (5.57)$$

De uma forma análoga, a partir de (5.52),

$$\frac{d^2 H}{dz^2} = \frac{1}{(1+z)^2 H^2} \left\{ \frac{d^2 H}{dt^2} - (1+z)H \left[H + (1+z) \frac{dH}{dz} \right] \frac{dH}{dz} \right\}. \quad (5.58)$$

Usando (3.52) juntamente com o resultado (5.53),

$$\frac{d^2 H}{dz^2} = \frac{H}{(1+z)^2} (-q^2 + j). \quad (5.59)$$

Além disso, por (5.54),

$$\frac{d^2(H^2)}{dz^2} = 2 \left(\frac{dH}{dz} \right)^2 + 2H \frac{d^2 H}{dz^2}. \quad (5.60)$$

Assim, usando os resultados (5.53) e (5.59), essa última equação pode ser reescrita como

$$\frac{d^2(H^2)}{dz^2} = \frac{2H^2}{(1+z)^2} (1 + 2q + j). \quad (5.61)$$

Resolvendo para j , e avaliando em $z = 0$,

$$j_0 = \frac{1}{2H_0^2} \frac{d^2(H^2)}{dz^2} \Big|_{z=0} - 2q_0 - 1. \quad (5.62)$$

Portanto, calculando a derivada do lado direito utilizando a expressão (5.50), e usando o valor de q_0 dado em (5.57), temos para j_0 ,

$$j_0 = 1 + \frac{3}{2}(1 - \Omega_M) [3w_0(1 + w_0) + w_a]. \quad (5.63)$$

Por fim, obteremos o parâmetro *snap*. Partindo de (5.58), obtemos

$$\begin{aligned} [(1+z)^3 H^3] \frac{d^3 H}{dz^3} = & -\frac{d^3 H}{dt^3} - (1+z)H \left[H^2 + (1+z)^2 \left(\frac{dH}{dz} \right)^2 + \right. \\ & \left. (1+z)H \left(4 \frac{dH}{dz} (1+z) \frac{d^2 H}{dz^2} \right) \right] \frac{dH}{dz} - 3(1+z)^2 H^2 \left[H + (1+z) \frac{dH}{dz} \right] \frac{d^2 H}{dz^2}. \end{aligned} \quad (5.64)$$

Usando (3.53) juntamente com os resultados (5.53) e (5.59),

$$\frac{d^3 H}{dz^3} = \frac{H}{(1+z)^3} (3q^2 + 3q^3 - 4qj - 3j - s). \quad (5.65)$$

Agora, por (5.60),

$$\frac{d^3(H^2)}{dz^3} = 6 \frac{dH}{dz} \frac{d^2 H}{dz^2} + 2H \frac{d^3 H}{dz^3}. \quad (5.66)$$

Fazendo uso dos resultados (5.53), (5.59) e (5.65),

$$\frac{d^3(H^2)}{dz^3} = \frac{2H}{(1+z)^3} (-qj - s). \quad (5.67)$$

Resolvendo para s , e avaliando em $z = 0$, obtemos

$$s_0 = -\frac{1}{2H_0^2} \frac{d^3(H^2)}{dz^3} \Big|_{z=0} - q_0 j_0. \quad (5.68)$$

Portanto, fazendo uso da relação (5.50) para calcular a derivada do lado direito dessa expressão, e usando os valores de q_0 e j_0 dados, respectivamente, por (5.57) e (5.63), concluímos que

$$\begin{aligned} s_0 = & -\frac{7}{2} - \frac{33}{4}(1 - \Omega_M)w_a - \frac{9}{4}(1 - \Omega_M) [9 + (7 - \Omega_M)w_a] w_0 \\ & - \frac{9}{4}(1 - \Omega_M)(16 - 3\Omega_M)w_0^2 - \frac{27}{4}(1 - \Omega_M)(3 - \Omega_M)w_0^3. \end{aligned} \quad (5.69)$$

Em suma, as equações (5.57), (5.63) e (5.69) nos dão as expressões para os PC (q_0, j_0, s_0) em termos dos parâmetros da equação de estado da EE dentro da parametrização CPL. A seguir, usaremos essas expressões juntamente com os valores de (w_0, w_a) para alguns modelos particulares, e rescreveremos as equações cosmológicas para a gravidade $f(R, T)$ para esses modelos de EE.

5.3.1 O cenário Λ CDM

Consideraremos como nosso primeiro caso o já referido modelo cosmológico Padrão Λ CDM, para o qual $(w_0, w_a) = (-1, 0)$ (BAMBA *et al.*, 2012). De modo que os PC, dados pelas equações (5.57), (5.63) e (5.69), tornam-se, respectivamente:

$$q_0 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}(1 - \Omega_m), \quad (5.70)$$

$$j_0 = 1, \quad (5.71)$$

$$s_0 = 1 - \frac{9}{2}\Omega_m. \quad (5.72)$$

Assim, inserindo esses valores para (q_0, j_0, s_0) nas equações (5.39)-(5.41), nós temos, respectivamente, que:

$$f_0 = 3(-6 + 5\Omega_m)H_0^2, \quad (5.73)$$

$$f_{RR}^{(0)} = 0, \quad (5.74)$$

$$f_{RRR}^{(0)} = 0. \quad (5.75)$$

Portanto, se atribuirmos valores para a constante de Hubble H_0 e para o parâmetro densidade de matéria Ω_m , podemos obter expressões numéricas para f_0 , $f_{RR}^{(0)}$ e $f_{RRR}^{(0)}$ dentro do cenário Λ CDM através das equações (5.73)-(5.75).

5.3.2 Modelos de quiescência

A próxima forma mais simples de EE, depois da constante cosmológica, é dada pelos modelos para os quais a equação de estado é uma constante, os chamados modelos de quiescência. Em um universo de FLRW, esse cenário pode ser produzido por um campo escalar \mathcal{Q} com um potencial $V(\mathcal{Q})$ apropriado (SAHNI *et al.*, 2003; ALAM *et al.*, 2003). \mathcal{Q} é uma componente dinâmica, dependente do tempo e espacialmente não homogênea, cuja equação de estado é diferente daquela de bárions, neutrinos, ME ou radiação, é amplamente definida, permitindo um espectro de possibilidades, incluindo uma equação de estado que é constante, de evolução uniforme ou oscilatória (RATRA; PEEBLES, 1988; CALDWELL *et al.*, 1998; ZLATEV *et al.*, 1999). Para o caso de uma equação de estado

constante, temos os chamados modelos de quiescência, para os quais $w = \text{constante} \neq -1$ e $w_a = 0$, naturalmente, para $w = -1$, obtemos o cenário Padrão Λ CDM. Assim, substituindo os valores $w_0 \neq 0$ e $w_a = 0$ nas equações (5.57), (5.63) e (5.69) obtemos, em ordem:

$$q_0 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}(1 - \Omega_m)w_0, \quad (5.76)$$

$$j_0 = 1 + \frac{3}{2}(1 - \Omega_m)(3w_0 + 3w_0^2), \quad (5.77)$$

$$s_0 = -\frac{7}{2} - \frac{81}{4}(1 - \Omega_M)w_0 - \frac{9}{4}(1 - \Omega_m)(16 - 3\Omega_m)w_0^2 - \frac{27}{4}(1 - \Omega_m)(3 - \Omega_m)w_0^3. \quad (5.78)$$

Substituindo esses valores dos parâmetros (q_0, j_0, s_0) nas equações (5.39)-(5.41), de forma respectiva, obtemos:

$$f_0 = \frac{3 \{39 - 34\Omega_m - 3(\Omega_m - 1)w_0 [-2(\Omega_m - 9) + 3(\Omega_m + 3)w_0]\} H_0^2}{-5 + 3(\Omega_m - 1)w_0}, \quad (5.79)$$

$$f_{RR}^{(0)} = \frac{2(\Omega_m - 1)(w_0 + 1)(2 + 3w_0)}{3[-5 + 3(\Omega_m - 1)w_0][1 + (\Omega_m - 1)w_0(2 + 3w_0)]H_0^2}, \quad (5.80)$$

$$f_{RRR}^{(0)} = -\frac{2(\Omega_m - 1)(w_0 + 1)[-3 + (\Omega_m - 3)w_0]}{3[-5 + 3(\Omega_m - 1)w_0]\{-3 + (\Omega_m - 1)w_0[-3 + w_0(-15 + 2\Omega_m + 3(\Omega_m - 3)w_0)]\}H_0^2}. \quad (5.81)$$

Assim, se substituirmos valores para H_0 , Ω_m e w_0 em (5.79)-(5.81), podemos obter expressões numéricas para a cosmografia da gravidade $f(R, T)$ no cenário de quiescência.

5.3.3 Energia escura em evolução: quintessência

Como último caso, consideraremos os modelos de quintessência para EE. Se a equação de estado da componente \mathcal{Q} depende do tempo, genericamente, temos os chamados modelos de k-essência, cujo exemplo mais simples é fornecido pela quintessência. Um exemplo de quintessência é a energia associada a um campo escalar \mathcal{Q} , homogêneo, fracamente acoplado à matéria ordinária, evoluindo lentamente em seu potencial $V(\mathcal{Q})$. A evolução lenta é necessária para obter pressão negativa, $p = \frac{1}{2}\dot{\mathcal{Q}}^2 - V(\mathcal{Q})$, de modo que a densidade de energia cinética é menor que aquela da energia potencial e, assim, a expansão cósmica

acelerada pode ser obtida (RATRA; PEEBLES, 1988; CALDWELL *et al.*, 1998; ZLATEV *et al.*, 1999). Para esses modelos, usamos $w_0 = -1$ e $w_a \neq 0$, de forma que as equações (5.57), (5.63) e (5.69) se tornam, de forma respectiva:

$$q_0 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}(1 - \Omega_m), \quad (5.82)$$

$$j_0 = 1 + \frac{3}{2}(1 - \Omega_m)w_a, \quad (5.83)$$

$$\begin{aligned} s_0 &= -\frac{7}{2} - \frac{33}{4}(1 - \Omega_m)w_a + \frac{9}{4}(1 - \Omega_m)[9 + (7 - \Omega_m)w_a] \\ &\quad - \frac{9}{4}(1 - \Omega_m)(16 - 3\Omega_m) + \frac{27}{4}(1 - \Omega_m)(3 - \Omega_m). \end{aligned} \quad (5.84)$$

Substituindo esses valores para os parâmetros (q_0, j_0, s_0) nas equações (5.39)-(5.41) ordenadamente, obtemos:

$$f_0 = \frac{3[-6(2 + 3\Omega_m) + 5\Omega_m(2 + 3\Omega_m) + 12(\Omega_m - 1)w_a]H_0^2}{2 + 3\Omega_m}, \quad (5.85)$$

$$f_{RR}^{(0)} = -\frac{2(\Omega_m - 1)w_a}{3(2 + 3\Omega_m)[\Omega_m + (\Omega_m - 1)w_a]H_0^2}, \quad (5.86)$$

$$f_{RRR}^{(0)} = \frac{4(\Omega_m - 1)w_a}{3(2 + 3\Omega_m)[3\Omega_m(\Omega_m + 2) + (\Omega_m - 1)(3\Omega_m - 10)w_a]H_0^2}. \quad (5.87)$$

Assim, se substituirmos valores para H_0 , Ω_m e w_a nas equações (5.85)-(5.87), podemos obter expressões numéricas para a cosmografia da gravidade $f(R, T)$ no cenário de quintessência.

Esse procedimento para estimar $f(R, T)$ e suas derivadas recorrendo a uma parametrização independente do modelo para equação de estado da EE nos permite escrever os valores atuais dessas quantidades em função de (Ω_m, w_0, w_a) , de forma que, usando valores para esses parâmetros, expressões numéricas podem ser obtidas para f_0 , $f_{RR}^{(0)}$ e $f_{RRR}^{(0)}$. Uma análise do espaço desses parâmetros para os quais seria possível obter modelos confiáveis pode ser feita numericamente. Vale ressaltar que o modelo $f(R, T)$ assim obtido não é dinamicamente equivalente ao CPL inicial, na verdade, os dois modelos têm os mesmos PC apenas hoje (CAPOZZIELLO *et al.*, 2008; BAMBIA *et al.*, 2012).

No próximo capítulo, mostraremos como as equações cosmográficas obtidas neste capítulo podem ser usadas para restringir modelos de gravidade $f(R, T)$.

6 USANDO COSMOGRAFIA PARA RESTRINGIR MODELOS DE GRAVIDADE $f(R, T)$

Neste capítulo, mostraremos como as equações cosmográficas para a teoria $f(R, T)$, juntamente com os valores dos parâmetros cosmográficos, podem ser utilizados para restringir esses modelos de gravidade. Para este fim, procederemos, basicamente, em três passos:

- 1- escrevemos algum modelo $f(R, T)$ arbitrário em termos de parâmetros gerais;
- 2- obtemos as derivadas dessa função $f(R, T)$ particular em termos dos parâmetros gerais mencionados acima;
- 3- como os valores da função $f(R, T)$ e suas derivadas dependem dos PC (q_0, j_0, s_0) , temos que os parâmetros gerais que caracterizam o modelo $f(R, T)$ particular também podem ser escritos em termos dos PC, permitindo assim que tais parâmetros sejam restringidos pelos valores observacionais de (q_0, j_0, s_0) , para nos dizer se essa forma específica de $f(R, T)$ é um modelo viável ou não.

Neste, e no próximo capítulo, serão adotados o valor $H_0 = 67,4 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, dado pela Colaboração Planck para a constante de Hubble (AGHANIM *et al.*, 2020), e os valores $(q_0, j_0, s_0) = (-0,276; -0,023; -0,745)$, obtidos para os parâmetros cosmográficos em (CAPOZZIELLO *et al.*, 2018).

Lembrando aqui que, ao obtermos a cosmografia do modelo $f(R, T) = f(R) + f(T)$, assumimos que tal teoria conserva o TEM. Em (ALVARENGA *et al.*, 2013; CHAKRABORTY, 2013) foi mostrado que quando impomos $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$, a função $f(T)$ é restringida de tal maneira que sua única forma possível, para um universo preenchido com poeira, seria $f(T) = \alpha T^{1/2}$, onde α é um parâmetro a ser determinado. Consideraremos a seguir alguns modelos particulares para os quais tal suposição é satisfeita.

6.1 Modelo $f(\mathbf{R}, \mathbf{T}) = \mathbf{R} + \alpha \mathbf{T}^{1/2}$

Como primeiro caso, consideraremos o modelo $f(R, T) = R + \alpha T^{1/2}$. Essa forma é particularmente interessante porque carrega o termo geométrico que entra na ação de Einstein-Hilbert da RG (FELICE; TSUJIKAWA, 2010). Para esse modelo, temos que em $t = t_0$:

$$\begin{aligned} f_0 &= R_0 + \alpha T_0^{1/2}, \\ f_R^{(0)} &= 1, \\ f_{RR}^{(0)} &= 0, \\ f_{RRR}^{(0)} &= 0. \end{aligned} \tag{6.1}$$

O resultado $f_R^{(0)} = 1$ já era esperado, visto que havíamos previamente imposto esse valor na primeira derivada de $f(R, T)$ em (5.28). Resolvendo a primeira dessas equações para α , obtemos que

$$\alpha = \frac{f_0 - R_0}{T_0^{1/2}}. \tag{6.2}$$

Para que esse modelo resulte naquele de Einstein, devemos ter $\alpha = 0$, isto é,

$$\frac{f_0 - R_0}{T_0^{1/2}} = 0 \Rightarrow f_0 = R_0. \tag{6.3}$$

Igualando as expressões para f_0 e R_0 , (5.39) e (3.70), em ordem, e resolvendo a equação resultante para Ω_m , obtemos

$$\Omega_m = \frac{4 + 5q_0 + 2j_0}{8 + q_0}. \tag{6.4}$$

Atribuindo valores numéricos aos parâmetros (q_0, j_0) adotados aqui, obtemos que, para termos o termo de Einstein-Hilbert, o parâmetro adimensional de densidade de matéria deve possuir o seguinte valor,

$$\Omega_m \simeq 0,333. \tag{6.5}$$

Esse valor, embora relativamente próximo, está fora do intervalo sugerido pelas observações, $\Omega_m = 0,315 \pm 0,007$ (AGHANIM *et al.*, 2020). Vemos, então, que os valores dos parâmetros cosmográficos não sugerem que o termo dependente do TEM, presente no modelo $f(R, T) = R + \alpha T^{1/2}$, o qual está relacionado ao valor de α , seja nulo.

6.2 Modelo $f(\mathbf{R}, \mathbf{T}) = \alpha \mathbf{R}^n + \beta \mathbf{T}^{1/2}$

Como um segundo caso, consideraremos o modelo $f(R, T) = \alpha R^n + \beta T^{1/2}$. Essa forma $f(R) = \alpha R^n$ é interessante porque, além de ser uma forma bem geral, para certos valores dos parâmetros α e n podemos recuperar o termo de Einstein-Hilbert; bem como porque ela dá origem a uma solução exata de de Sitter necessária para dar conta do paradigma inflacionário (FELICE; TSUJIKAWA, 2010). Para esse modelo, n é um número real positivo tal que $n \leq 3$, α e β são duas quantidades quaisquer. De forma que em $t = t_0$ obtemos:

$$\begin{aligned} f_0 &= \alpha R_0^n + \beta T_0^{1/2}, \\ f_R^{(0)} &= n\alpha R_0^{n-1}, \\ f_{RR}^{(0)} &= n(n-1)\alpha R_0^{n-2}, \\ f_{RRR}^{(0)} &= n(n-1)(n-2)\alpha R_0^{n-3}. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Resolvendo esse sistema de equações para os parâmetros de interesse, tem-se:

$$\beta = \frac{f_0 - \alpha R_0^n}{T_0^{1/2}}, \tag{6.7}$$

$$\alpha = \frac{f_R^{(0)} R_0^{1-n}}{n}, \tag{6.8}$$

$$n = \frac{f_{RRR}^{(0)} R_0}{f_{RR}^{(0)}} + 2. \tag{6.9}$$

Para que a ação desse modelo $f(R, T)$ resulte naquela de Einstein-Hilbert, os parâmetros que o caracterizam precisam assumir os valores: $\alpha = 1, \beta = 0, n = 1$. Para termos essas restrições cumpridas, das equações (6.7)-(6.9), precisamos, respectivamente, que:

$$\frac{f_0 - 1 \cdot R_0^1}{T_0^{1/2}} = 0 \Rightarrow f_0 = R_0, \tag{6.10}$$

$$\alpha = \frac{f_R^{(0)} R_0^{1-1}}{1} \Rightarrow \alpha = f_R^{(0)}, \tag{6.11}$$

$$\frac{f_{RRR}^{(0)} R_0}{f_{RR}^{(0)}} + 2 = 1 \Rightarrow f_{RRR}^{(0)} R_0 = -f_{RR}^{(0)}. \tag{6.12}$$

A primeira dessas restrições, (6.10), resulta no mesmo valor para Ω_m que aqueles dados em (6.5). A equação (6.11), por sua vez, é consistente, resultando no valor 1 para o parâmetro α , tendo em vista o valor assumido $f_R^{(0)} = 1$ (5.28). Por fim, usando as expressões cosmográficas de R_0 , $f_{RR}^{(0)}$ e $f_{RRR}^{(0)}$ dadas respectivamente em (3.70), (5.40) e (5.41), em (6.12), podemos obter uma equação relacionando Ω_m aos parâmetros H_0 e (q_0, j_0, s_0) ,

$$\Omega_m = \frac{(1 + 2q_0 + j_0) [6 + q_0 (8 + q_0) + s_0] - 6 (-1 + q_0) (2 + q_0 - j_0) [3 + q_0 (5 + q_0) + j_0] H_0^2}{3 [6 + q_0 (8 + q_0) + s_0 + 3 (-2 - q_0 + j_0) (-1 + q_0) (4 + q_0) H_0^2]} \quad (6.13)$$

Atribuindo valores numéricos aos parâmetros H_0 e (q_0, j_0, s_0) ,

$$\Omega_m \simeq 0,300. \quad (6.14)$$

Mais uma vez, o valor obtido para Ω_m está próximo, mas, ainda assim fora do intervalo sugerido pelas observações $\Omega_m = 0,315 \pm 0,007$ (AGHANIM *et al.*, 2020).

Os resultados obtidos para esse segundo modelo mostram que como acontece com o caso anterior, os resultados obtidos via cosmografia não sugerem que a função $f(T)$ seja nula, tendo em vista que o valor de Ω_m que anularia o parâmetro β , que acompanha essa função, está fora do intervalo sugerido pelas observações. Além disso, por uma argumentação análoga, o valor de Ω_m em (6.14), não favorece o termo de Einstein-Hilbert, pois, para obtermos esse termo, precisamos de $\alpha = 1$, e este valor de α só é obtido se $n = 1$ que, como já vimos, não é sugerido.

6.3 Modelo $f(\mathbf{R}, \mathbf{T}) = \alpha \mathbf{R} + \beta \mathbf{R}^n + \gamma \mathbf{T}^{1/2}$

Por fim, consideraremos o modelo $f(R, T) = \alpha R + \beta R^n + \gamma T^{1/2}$. Essa forma de $f(R) = \alpha R + \beta R^n$ é interessante porque para certos valores assumidos pelos parâmetros α , β e n , podemos recuperar tanto o termo de Einstein-Hilbert, como também o modelo de Starobinsky que, até o momento, é o modelo mais bem sucedido de inflação (STAROBINSKY, 1980; STAROBINSKY, 2007; FELICE; TSUJIKAWA, 2010). Sendo que, nesse modelo, n é um número real positivo tal que $n \leq 3$, α , β e γ são três quantidades quaisquer. Em $t = t_0$ obtemos:

$$\begin{aligned}
 f_0 &= \alpha R_0 + \beta R_0^n + \gamma T_0^{1/2}, \\
 f_R^{(0)} &= \alpha + n\beta R_0^{n-1}, \\
 f_{RR}^{(0)} &= n(n-1)\beta R_0^{n-2}, \\
 f_{RRR}^{(0)} &= n(n-1)(n-2)\beta R_0^{n-3}.
 \end{aligned} \tag{6.15}$$

Resolvendo o sistema (6.15) para as quantidades de interesse, temos:

$$\gamma = \frac{f_0 - \alpha R_0 - \beta R_0^n}{T_0^{1/2}}, \tag{6.16}$$

$$\alpha = f_R^{(0)} - n\beta R_0^{n-1}, \tag{6.17}$$

$$\beta = \frac{f_{RR}^{(0)} R_0^{2-n}}{n(n-1)}, \tag{6.18}$$

$$n = \frac{f_{RRR}^{(0)} R_0}{f_{RR}^{(0)}} + 2. \tag{6.19}$$

Vamos agora analisar as condições para os parâmetros desse modelo que levariam à ação de Einstein-Hilbert, a saber: $\alpha = 1, \beta = 0, \gamma = 0$; ou ainda, $\alpha = 0, \beta = 1, n = 1, \gamma = 0$. Ao tentarmos resolver essas equações para o segundo conjunto de restrições que nos levariam à ação de Einstein-Hilbert, obtemos indeterminações matemáticas como resultados. Vamos, então, analisar o primeiro conjunto. Para termos $\beta = 0$, da equação (6.18) precisamos que

$$R_0^{2-n} = 0 \text{ ou } f_{RR}^{(0)} = 0. \tag{6.20}$$

A equação $R_0^{2-n} = 0$ não possui soluções. Vamos averiguar a segunda hipótese, $f_{RR}^{(0)} = 0$. Para isso, vamos igualar a expressão (5.40) a zero e resolver para Ω_m ,

$$\Omega_m = \frac{1 + 2q_0 + j_0}{3}. \tag{6.21}$$

Atribuindo valores aos parâmetros (q_0, j_0) ,

$$\Omega_m \simeq 0,142. \tag{6.22}$$

Vemos que o valor de Ω_m necessário para que tenhamos $\beta = 0$ está bem fora do intervalo

sugerido pelas observações, $\Omega_m = 0,315 \pm 0,007$ (AGHANIM *et al.*, 2020).

Supondo que a condição $\beta = 0$ fosse satisfeita, teríamos, neste caso, $\alpha = f_R^{(0)} = 1$, ou seja, a condição para alfa seria cumprida. Se fossem cumpridas as condições $\beta = 0$ e $\alpha = 1$, vejamos qual valor o parâmetro adimensional de matéria precisaria assumir para que a última condição $\gamma = 0$ fosse satisfeita. Neste caso, chegaríamos em $f_0 = R_0$, o mesmo que em (6.3), e que resultaria em $\Omega_m \simeq 0,333$, fora do intervalo sugerido para esse parâmetro. Mais uma vez concluímos que, por vias cosmográficas, o termo de Einstein-Hilbert não é sugerido, e que mesmo que esse fosse o caso, a anulação do termo dependente do traço do TEM não é sugerida.

A seguir, iremos também analisar as restrições que nos levariam ao modelo de Starobinsky que, além de ser o cenário inflacionário mais bem sucedido até o momento, possui em sua ação um termo linear em R . Para que esse modelo seja obtido, precisamos que: $\alpha = 1, \beta \neq 0, n = 2, \gamma = 0$. Para termos $n = 2$, de (6.19), precisamos que

$$2 = \frac{f_{RRR}^{(0)} R_0}{f_{RR}^{(0)}} + 2 \Rightarrow \frac{f_{RRR}^{(0)} R_0}{f_{RR}^{(0)}} = 0. \quad (6.23)$$

Usando as expressões para R_0 , $f_{RR}^{(0)}$ e $f_{RRR}^{(0)}$, ordenadamente (3.70), (5.40) e (5.41), e resolvendo a equação resultante para Ω_m ,

$$\Omega_m = \frac{2(3 + 5q_0 + q_0^2 + j_0)}{3(4 + q_0)}. \quad (6.24)$$

Atribuindo os valores dos parâmetros (q_0, j_0) ,

$$\Omega_m \simeq 0,300. \quad (6.25)$$

Esse valor para Ω_m , mais uma vez, não é sugerido pelos dados observacionais (AGHANIM *et al.*, 2020).

Vamos supor que a condição $n = 2$ fosse cumprida. Neste caso, para termos $\beta \neq 0$ na equação (6.18), precisamos que

$$\frac{f_{RR}^{(0)} R_0^{2-2}}{2(2-1)} \neq 0 \Rightarrow f_{RR}^{(0)} \neq 0. \quad (6.26)$$

Substituindo a expressão cosmográfica de $f_{RR}^{(0)}$, (5.40), resolvendo, em seguida, para Ω_m ,

$$\Omega_m \neq \frac{1 + 2q_0 + j_0}{3}, \quad (6.27)$$

ou, em termos numéricos,

$$\Omega_m \neq 0, 142. \quad (6.28)$$

O resultado numérico nos mostra um valor muito baixo para Ω_m , o qual está bem fora do intervalo experimental (AGHANIM *et al.*, 2020), mostrando, assim, que os dados sugerem que $\beta \neq 0$. Contudo, esse resultado só é obtido considerando $n = 2$, o que, como já vimos anteriormente, não é sugerido via dados cosmográficos.

Passemos agora à equação (6.17). Para a suposição que $n = 2$, ela nos mostra

$$\alpha = f_R^{(0)} - 2\beta R_0. \quad (6.29)$$

Lembrando que $f_R^{(0)} = 1$, (5.28), para termos $\alpha = 1$ nessa equação, o que nos daria o termo linear em R , precisamos que $\beta = 0$, o que não pode ser, já que se $\beta = 0$, não teríamos o termo quadrático que caracteriza o modelo de Starobinsky que está sendo assumido.

Por fim, analisemos agora a condição para que o termo dependente do TEM se anule, $\gamma = 0$. Vamos assumir que todas as demais restrições necessárias ao modelo de Starobinsky fossem cumpridas, a saber: $\alpha = 1$, $\beta \neq 0$ e $n = 2$. De forma que (6.16) nos traz

$$f_0 - R_0 - \beta R_0^2 = 0. \quad (6.30)$$

Usamos, então, as expressões para R_0 e f_0 , dadas na devida ordem em (3.70) e (4.39), bem como o valor $\beta = 1$, e resolvemos para Ω_m , obtendo

$$\Omega_m = \frac{4 + 5q_0 + 2j_0 + 6(2 - 3q_0 + q_0^3)H_0^2}{8 + q_0}. \quad (6.31)$$

Ou ainda, após atribuir os valores numéricos aos parâmetros (H_0, q_0, j_0) ,

$$\Omega_m \simeq 9905. \quad (6.32)$$

Tal valor está bem fora do intervalo dado pelas observações para esse parâmetro (AGHANIM *et al.*, 2020). Concluimos então que, mesmo que se as condições para termos o modelo de Starobinsky sejam cumpridas, os dados cosmográficos não sugerem um termo dependente do traço do TEM nulo.

A análise desse último modelo, $f(R, T) = \alpha R + \beta R^n + \gamma T^{1/2}$, mostrou-nos que, se tentarmos reduzi-lo àquele de Einstein, vamos nos deparar ou com indeterminações matemáticas, ou com valores de Ω_m fora do intervalo sugerido pelas observações. Se, em vez disso, tentarmos obter, a partir dele, o modelo de Starobinsky, os valor de Ω_m que nos daria $n = 2$, necessário para obter o termo quadrático em R que caracteriza esse modelo, é

um valor não sugerido pelos limites observacionais. Uma outra condição para que o termo quadrático em R esteja presente, é que $\beta \neq 0$, e isso é obtido se $n = 2$, o que, como já vimos, não é sugerido. A análise do parâmetro α , por sua vez, mostrou que, para termos o termo de Einstein-Hilbert na ação, esse parâmetro teria que ser igual a unidade, mas, para que isso ocorra, $\beta = 0$, o que não pode ser, uma vez que, estamos assumindo a presença do termo quadrático em R na ação. Assim, vemos que, de um ponto de vista observacional, dentro do cenário de Starobinsky, o termo de Einstein-Hilbert, com $\alpha = 1$, não é favorecido pelos resultados cosmográficos. Por fim, procedemos à análise das condições para que o termo dependente do TEM se anule na ação. Para isso, precisamos ter $\gamma = 0$, o que não se verifica, mesmo que as condições para os demais parâmetros ($\alpha = 1, \beta \neq 0, n = 2$) sejam cumpridas. Dessa forma, mais uma vez, vemos que os resultados sugerem um termo do tipo $f(T)$ não nulo.

No próximo capítulo, veremos uma outra forma de utilizar as equações cosmográficas para colocar possíveis restrições nos modelos de gravidade $f(R, T)$, através do uso das chamadas condições de energia.

7 CONDIÇÕES DE ENERGIA COSMOGRÁFICAS

7.1 Condições de Energia

As condições de energia, no contexto de muitas teorias gravidade, incluindo a RG, são relações aplicadas ao TEM da matéria, a fim de que ele satisfaça a ideia que “a energia deve ser positiva”. Geralmente, as condições de energia são derivadas a partir das equações de Raychaudhuri, as quais são equações puramente geométricas e, portanto, não estão vinculadas a nenhuma teoria de gravidade específica, e descrevem o comportamento gravitacional de uma congruência de curvas dos tipos espaço, tempo ou luz (HAWKING; ELLIS, 1973; CARROLL, 2004).

Para uma congruência de geodésicas do tipo tempo definidas pelo campo vetorial u^μ , a equação de Raychaudhuri é (HAWKING; ELLIS, 1973; CARROLL, 2004)

$$\frac{d\theta}{d\tau} = -\frac{1}{3}\theta^2 - \sigma^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu} + \omega^{\mu\nu}\omega_{\mu\nu} - R_{\mu\nu}u^\mu u^\nu, \quad (7.1)$$

sendo $R_{\mu\nu}$ o, já conhecido, tensor de Ricci, θ o parâmetro de expansão, $\sigma_{\mu\nu}$ é o tensor de cisalhamento e $\omega_{\mu\nu}$ é a rotação associada à congruência. Por sua vez, a equação de evolução para θ , o escalar de expansão de uma congruência de geodésicas nulas definida pelo campo vetorial nulo κ^μ , é dada por (HAWKING; ELLIS, 1973; CARROLL, 2004)

$$\frac{d\theta}{d\tau} = -\frac{1}{2}\theta^2 - \sigma^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu} + \omega^{\mu\nu}\omega_{\mu\nu} - R_{\mu\nu}\kappa^\mu \kappa^\nu. \quad (7.2)$$

Se a soma total do lado direito das equações (7.1) e (7.2) é negativa, então a expansão da congruência está decrescendo com o tempo próprio, isto é, as geodésicas na congruência estão, em todo lugar, convergindo umas para as outras. O primeiro termo do lado direito dessas equações é nitidamente negativo, como o tensor de cisalhamento é puramente espacial em ambos os índices, então, $\sigma^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu} \geq 0$. Além disso, para uma congruência de hipersuperfícies ortogonais, segue diretamente do teorema de Frobenius que $\omega_{\mu\nu} = 0$ (WALD, 1984). Assim, se assumirmos que a gravidade é atrativa em todo lugar, e

interpretarmos isso como significando que congruências de geodésicas tipos tempo e nulas, que têm rotação nula, devem sempre convergir, a fim de assegurar que os lados direitos das equações (7.1) e (7.2) sejam sempre negativos, as condições para que a gravidade seja atrativa, tornam-se, em termos geométricos, respectivamente (HAWKING; ELLIS, 1973; CARROLL, 2004):

$$R_{\mu\nu}u^\mu u^\nu \geq 0, \quad (7.3)$$

$$R_{\mu\nu}\kappa^\mu \kappa^\nu \geq 0. \quad (7.4)$$

Além das equações (7.3) e (7.4), temos similarmente outras duas condições geométricas a serem satisfeitas, de forma a capturar a ideia de atratividade para a gravidade, a saber, para qualquer vetor tipo-tempo u^μ (HAWKING; ELLIS, 1973; CARROLL, 2004):

$$G_{\mu\nu}u^\mu u^\nu \geq 0, \quad (7.5)$$

$$\begin{cases} G_{\mu\nu}u^\mu u^\nu \geq 0, \\ G_{\mu\nu}u^\nu \text{ causal.} \end{cases} \quad (7.6)$$

Embora, como já mencionado, as equações de Raychaudhuri não sejam vinculadas a nenhuma teoria de gravidade em particular, podemos usar as equações de campo de uma dada teoria de gravidade para relacionar o tensor de Ricci, $R_{\mu\nu}$, ao TEM, $T_{\mu\nu}$, de forma que possamos obter um conjunto de condições físicas para este último. Dentro da RG, em termos do TEM da matéria, as equações (7.3)-(7.6) podem ser escritas, de forma respectiva, como (HAWKING; ELLIS, 1973; CARROLL, 2004):

$$\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu} \right) u^\mu u^\nu \geq 0, \quad (7.7)$$

$$T_{\mu\nu}\kappa^\mu \kappa^\nu \geq 0, \quad (7.8)$$

$$T_{\mu\nu}u^\mu u^\nu \geq 0, \quad (7.9)$$

$$\begin{cases} T_{\mu\nu}u^\mu u^\nu \geq 0, \\ T_{\mu\nu}u^\nu \text{ causal.} \end{cases} \quad (7.10)$$

As equações (7.7) e (7.8) possuem interpretações físicas similares, a saber, que observado-

res seguindo geodésicas dos tipos tempo e nulas, verão que a gravidade tende localmente a ser atrativa em sua ação sobre materiais seguindo geodésicas tipos tempo e nula, respectivamente, ou ainda, que esses observadores seguindo tais geodésicas medirão a densidade local de matéria-energia sendo não negativa. A equação (7.9), em termos físicos, assume a positividade da densidade de energia local. Isto é, a densidade de energia total de todos os campos de matéria, conforme medida de maneira natural por qualquer observador que atravessa uma curva tipo-tempo, nunca é negativa. Já a relação (7.10), por sua vez, fisicamente nos diz que cada observador tipo-tempo medirá a densidade ordinária de matéria e energia como sendo não negativa, e medirá o fluxo total de energia-momento sendo causal, com o fluxo orientado na mesma direção que o tempo próprio do observador; em outras palavras, tal relação descarta a propagação super-luminal de energia-momento e, assim, sua interpretação, além da já familiar demanda que a densidade de energia medida localmente seja não negativa, é que a pressão seja estritamente limitada, tanto acima quanto abaixo, pela densidade de energia (HAWKING; ELLIS, 1973; CARROLL, 2004).

Por fim, considerando um fluido perfeito, em um universo plano, homogêneo e isotrópico de FLRW, para o qual o espaço-tempo é caracterizado pelo elemento de linha (3.2), essas quatro equações podem ser, respectivamente, escritas como:

$$\begin{cases} \rho_m + 3p_m \geq 0, \\ \rho_m + p_m \geq 0, \end{cases} \quad (7.11)$$

$$\rho_m + p_m \geq 0, \quad (7.12)$$

$$\begin{cases} \rho_m \geq 0, \\ \rho_m + p_m \geq 0, \end{cases} \quad (7.13)$$

$$\begin{cases} \rho_m \geq 0, \\ \rho_m \pm p_m \geq 0. \end{cases} \quad (7.14)$$

As equações (7.11)-(7.14) são as famosas condições de energia da RG: em (7.11) temos a condição de energia forte, em (7.12) temos a condição de energia nula, (7.13) nos traz a condição de energia fraca e, por fim, temos a condição de energia dominante em (7.14). Dessas equações podemos concluir que a condição fraca implica na nula; a condição forte implica, por continuidade, na nula mas não, em geral, na condição fraca; e que a condição dominante implica na fraca e, conseqüentemente, na nula, mas não, necessariamente, na condição forte (HAWKING; ELLIS, 1973; CARROLL, 2004).

7.2 Condições de Energia Dentro da Gravidade $f(\mathbf{R}, \mathbf{T})$

O ponto de partida para obtermos as condições de energia dentro da teoria de gravidade $f(R, T)$ será suas equações de campo, as quais, considerando unidades tais que $8\pi G = 1$, são (5.10),

$$f_R R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} f g_{\mu\nu} + (g_{\mu\nu} \square - \nabla_\mu \nabla_\nu) f_R = T_{\mu\nu} - f_T T_{\mu\nu} - f_T \Theta_{\mu\nu}. \quad (7.15)$$

Pelas definições dos tensores $T_{\mu\nu}$ e $\Theta_{\mu\nu}$, equações (2.7) e (5.7), respectivamente, podemos escrever o último em termos do primeiro como (HARKO *et al.*, 2011)

$$\Theta_{\mu\nu} = -2T_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} \mathcal{L}_m - 2g^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu} \partial g^{\alpha\beta}}. \quad (7.16)$$

Considerando a contribuição para o TEM da matéria como sendo aquela devido a um fluido perfeito,

$$T_{\mu\nu} (\rho_m + p_m) u_\mu u_\nu - p_m g_{\mu\nu}, \quad (7.17)$$

onde u_μ é a quadri-velocidade do fluido, e ρ_m e p_m denotam naturalmente sua densidade de energia e sua pressão, respectivamente, e assumindo $\mathcal{L}_m = -p_m$, temos que o tensor $\Theta_{\mu\nu}$ em (7.16) se torna,

$$\Theta_{\mu\nu} = -2T_{\mu\nu} - p_m g_{\mu\nu}. \quad (7.18)$$

Com este resultado, temos para as equações de campo (7.15),

$$f_R R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} f g_{\mu\nu} + (g_{\mu\nu} \square - \nabla_\mu \nabla_\nu) f_R = T_{\mu\nu} - f_T T_{\mu\nu} - f_T (-2T_{\mu\nu} - p_m g_{\mu\nu}), \quad (7.19)$$

$$f_R R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} f g_{\mu\nu} + (g_{\mu\nu} \square - \nabla_\mu \nabla_\nu) f_R = (1 + f_T) T_{\mu\nu} + p_m f_T g_{\mu\nu}, \quad (7.20)$$

$$f_R R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} f g_{\mu\nu} = (1 + f_T) T_{\mu\nu} + p_m f_T g_{\mu\nu} + (\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \square) f_R. \quad (7.21)$$

Podemos escrever esta última expressão na forma daquela de Einstein para a RG, para isso, vamos usar o seguinte artifício (SHARIF; ZUBAIR, 2012),

$$f_R R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} f g_{\mu\nu} = \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) f_R - \frac{1}{2} (f - R f_R) g_{\mu\nu}. \quad (7.22)$$

Assim, temos para (7.21),

$$\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) f_R - \frac{1}{2} (f - R f_R) g_{\mu\nu} = (1 + f_T) T_{\mu\nu} + p_m f_T g_{\mu\nu} + (\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \square) f_R, \quad (7.23)$$

ou ainda,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \frac{1}{f_R} \left[(1 + f_T) T_{\mu\nu} + p_m f_T g_{\mu\nu} + \frac{1}{2} (f - R f_R) g_{\mu\nu} + (\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \square) f_R \right]. \quad (7.24)$$

Definindo, agora, o TEM efetivo como (SHARIF; ZUBAIR, 2012)

$$T_{\mu\nu}^{ef} = \frac{1}{f_R} \left[(1 + f_T) T_{\mu\nu} + p_m f_T g_{\mu\nu} + \frac{1}{2} (f - R f_R) g_{\mu\nu} + (\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \square) f_R \right]. \quad (7.25)$$

Munidos com esta definição, podemos, enfim, expressar as equações de campo para a teoria de gravidade $f(R, T)$ na forma de “equações de campo efetivas de Einstein” (SHARIF; ZUBAIR, 2012),

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{ef}. \quad (7.26)$$

Para um universo homogêneo e isotrópico de FLRW, caracterizado pelo elemento de linha (3.2), as equações de campo (7.26) podem ser escritas como

$$3H^2 = \rho_{ef}, \quad (7.27)$$

$$- \left(2\dot{H} + 3H^2 \right) = p_{ef}, \quad (7.28)$$

onde ρ_{ef} e p_{ef} são a densidade de energia e a pressão efetivas definidas, respectivamente, como (SHARIF; ZUBAIR, 2012):

$$\rho_{ef} = \frac{1}{f_R} \left[\rho + (\rho + p) f_T + \frac{1}{2} (f - R f_R) - 3H \left(\dot{R} f_{RR} + \dot{T} f_{RT} \right) \right], \quad (7.29)$$

$$p_{ef} = \frac{1}{f_R} \left[p - \frac{1}{2} (f - R f_R) + \left(\ddot{R} + 2\dot{R}H \right) f_{RR} + \dot{R}^2 f_{RRR} + 2\dot{R}\dot{T} f_{RRT} + \left(\ddot{T} + 2\dot{T}H \right) f_{RT} + \dot{T}^2 f_{RTT} \right] \quad (7.30)$$

Tendo em vista que os modelos de gravidade $f(R, T)$ que serão aqui analisados são da forma $f(R, T) = f(R) + f(T)$, temos que as derivadas cruzadas que aparecem nas equações (7.29) e (7.30) se anulam. Assim, essas equações podem ser re-escritas, ordenadamente, como:

$$\rho_{ef} = \frac{1}{f_R} \left[\rho + (\rho + p) f_T + \frac{1}{2} (f - Rf_R) - 3H\dot{R}f_{RR} \right], \quad (7.31)$$

$$p_{ef} = \frac{1}{f_R} \left[p - \frac{1}{2} (f - Rf_R) + (\ddot{R} + 2\dot{R}H) f_{RR} + \dot{R}^2 f_{RRR} \right]. \quad (7.32)$$

Considerando a forma de (7.26), podemos escrever, de forma análoga às equações (7.7)-(7.10), as seguintes condições, de forma respectiva, para o tensor $T_{\mu\nu}^{ef}$ dentro da gravidade $f(R, T)$:

$$\left(T_{\mu\nu}^{ef} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu} \right) u^\mu u^\nu \geq 0, \quad (7.33)$$

$$T_{\mu\nu}^{ef} \kappa^\mu \kappa^\nu \geq 0, \quad (7.34)$$

$$T_{\mu\nu}^{ef} u^\mu u^\nu \geq 0, \quad (7.35)$$

$$\begin{cases} T_{\mu\nu}^{ef} u^\mu u^\nu \geq 0, \\ T_{\mu\nu}^{ef} u^\nu \text{ causal.} \end{cases} \quad (7.36)$$

Ou ainda, podemos escrever essas condições como em (7.11)-(7.14), substituindo, para isso, ρ_m e p_m por ρ_{ef} e p_{ef} , dadas em (7.31) e (7.32), na devida ordem, obtendo, assim, as condições de energia dentro da gravidade $f(R, T)$ para modelos do tipo $f(R, T) = f(R) + f(T)$:

- Condição de energia forte

$$\begin{aligned} \rho_{ef} + 3p_{ef} &= \\ \frac{1}{f_R} \left[(\rho_m + 3p_m) + (\rho_m + p_m) f_T - f + Rf_R + 3(\ddot{R} + \dot{R}H) f_{RR} + 3\dot{R}^2 f_{RRR} \right] &\geq 0, \\ \rho_{ef} + p_{ef} &= \frac{1}{f_R} \left[(\rho_m + p_m) (1 + f_T) + (\ddot{R} - \dot{R}H) f_{RR} + \dot{R}^2 f_{RRR} \right] \geq 0. \end{aligned} \quad (7.37)$$

- Condição de energia nula

$$\rho_{ef} + p_{ef} = \frac{1}{f_R} \left[(\rho_m + p_m) (1 + f_T) + (\ddot{R} - \dot{R}H) f_{RR} + \dot{R}^2 f_{RRR} \right] \geq 0. \quad (7.38)$$

- Condição de energia fraca

$$\begin{aligned} \rho_{ef} &= \frac{1}{f_R} \left[\rho_m + (\rho_m + p_m) f_T + \frac{1}{2} (f - Rf_R) - 3\dot{R}H f_{RR} \right] \geq 0, \\ \rho_{ef} + p_{ef} &= \frac{1}{f_R} \left[(\rho_m + p_m) (1 + f_T) + (\ddot{R} - \dot{R}H) f_{RR} + \dot{R}^2 f_{RRR} \right] \geq 0. \end{aligned} \quad (7.39)$$

- Condição de energia dominante

$$\begin{aligned} \rho_{ef} - p_{ef} &= \frac{1}{f_R} \left[(\rho_m - p_m) + (\rho_m + p_m) f_T + f - Rf_R - (\ddot{R} + 5\dot{R}H) f_{RR} - \dot{R}^2 f_{RRR} \right] \geq 0, \\ \rho_{ef} + p_{ef} &= \frac{1}{f_R} \left[(\rho_m + p_m) (1 + f_T) + (\ddot{R} - \dot{R}H) f_{RR} + \dot{R}^2 f_{RRR} \right] \geq 0, \\ \rho_{ef} &= \frac{1}{f_R} \left[\rho_m + (\rho_m + p_m) f_T + \frac{1}{2} (f - Rf_R) - 3\dot{R}H f_{RR} \right] \geq 0. \end{aligned} \quad (7.40)$$

As inequações (7.37)-(7.40) são, em ordem, as condições de energia forte, nula, fraca e dominante, no contexto de uma $f(R, T) = f(R) + f(T)$, para um espaço-tempo homogêneo e isotrópico de FLRW.

7.3 Condições de Energia e Cosmografia

As condições de energia (7.37)-(7.40) podem ser escritas em termos dos PC (q_0, j_0, s_0) e, dessa forma, os valores medidos desses parâmetros podem ser usados para nos dizer se essas condições são ou não satisfeitas por um modelo de gravidade $f(R, T)$ específico. Como ponto de partida, vamos considerar os valores atuais em (7.37)-(7.40), e inserir nessas equações as seguintes condições que foram assumidas aqui:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_T^{(0)} \simeq 0, \\ f_R^{(0)} = 1, \\ p_m = 0, \\ \rho_m = 3H_0^2 \Omega_m. \end{array} \right. \quad (7.41)$$

As duas primeiras condições foram assumidas em (5.28), a fim de se obter a cosmografia da gravidade $f(R, T)$, a terceira se refere a um universo preenchido com poeira, e a última, dada em (4.21), diz respeito a consideração da conservação do TEM nos modelos do tipo $f(R, T) = f(R) + f(T)$. Feitas essas considerações, as condições de energia (7.37)-(7.40), respectivamente, tornam-se:

- Condição de energia forte

$$\begin{aligned}\rho_{ef}^{(0)} + 3p_{ef}^{(0)} &= \left[3H_0^2\Omega_m - f_0 + R_0 + 3\left(\ddot{R}_0 + \dot{R}_0 H_0\right) f_{RR}^{(0)} + 3\dot{R}_0^2 f_{RRR}^{(0)} \right] \geq 0, \\ \rho_{ef}^{(0)} + p_{ef}^{(0)} &= \left[3H_0^2\Omega_m + \left(\ddot{R}_0 - \dot{R}_0 H_0\right) f_{RR}^{(0)} + \dot{R}_0^2 f_{RRR}^{(0)} \right] \geq 0.\end{aligned}\quad (7.42)$$

- Condição de energia nula

$$\rho_{ef}^{(0)} + p_{ef}^{(0)} = \left[3H_0^2\Omega_m + \left(\ddot{R}_0 - \dot{R}_0 H_0\right) f_{RR}^{(0)} + \dot{R}_0^2 f_{RRR}^{(0)} \right] \geq 0. \quad (7.43)$$

- Condição de energia fraca

$$\begin{aligned}\rho_{ef}^{(0)} &= \left[3H_0^2\Omega_m + \frac{1}{2}(f_0 - R_0) - 3\dot{R}_0 H_0 f_{RR}^{(0)} \right] \geq 0, \\ \rho_{ef}^{(0)} + p_{ef}^{(0)} &= \left[3H_0^2\Omega_m + \left(\ddot{R}_0 - \dot{R}_0 H_0\right) f_{RR}^{(0)} + \dot{R}_0^2 f_{RRR}^{(0)} \right] \geq 0.\end{aligned}\quad (7.44)$$

- Condição de energia dominante

$$\begin{aligned}\rho_{ef}^{(0)} - p_{ef}^{(0)} &= \left[3H_0^2\Omega_m - f_0 - R_0 - \left(\ddot{R}_0 + 5\dot{R}_0 H_0\right) f_{RR}^{(0)} - \dot{R}_0^2 f_{RRR}^{(0)} \right] \geq 0, \\ \rho_{ef}^{(0)} + p_{ef}^{(0)} &= \left[3H_0^2\Omega_m + \left(\ddot{R}_0 - \dot{R}_0 H_0\right) f_{RR}^{(0)} + \dot{R}_0^2 f_{RRR}^{(0)} \right] \geq 0, \\ \rho_{ef}^{(0)} &= \left[3H_0^2\Omega_m + \frac{1}{2}(f_0 - R_0) - 3\dot{R}_0 H_0 f_{RR}^{(0)} \right] \geq 0.\end{aligned}\quad (7.45)$$

Por fim, usando as expressões para R_0 , \dot{R}_0 e \ddot{R}_0 em termos do conjunto (q_0, j_0, s_0) , dadas ordenadamente nas expressões (3.70)-(3.72), obtemos as condições de energia, para modelos de gravidade $f(R, T)$ do tipo $f(R, T) = f(R) + f(T)$, em função dos parâmetros cosmológicos:

- Condição de energia forte

$$\begin{aligned}\rho_{ef}^{(0)} + 3p_{ef}^{(0)} &= -f_0 + 3H_0^2(-2 + 2q_0 + \Omega_m) - 6H_0^2[4 + q_0(7 + q_0) + j_0 + s_0]f_{RR}^{(0)} \\ &\quad + 36H_0^4(2 + q_0 - j_0)^2 f_{RRR}^{(0)} \geq 0,\end{aligned}\tag{7.46}$$

$$\rho_{ef}^{(0)} + p_{ef}^{(0)} = 3\Omega_m H_0^2 + 2H_0^2[-8 - q_0(9 + q_0) + j_0 - s_0]f_{RR}^{(0)} + 12H_0^4(2 + q_0 - j_0)^2 f_{RRR}^{(0)} \geq 0.\tag{7.47}$$

- Condição de energia nula

$$\rho_{ef}^{(0)} + p_{ef}^{(0)} = 3\Omega_m H_0^2 + 2H_0^2[-8 - q_0(9 + q_0) + j_0 - s_0]f_{RR}^{(0)} + 12H_0^4(2 + q_0 - j_0)^2 f_{RRR}^{(0)} \geq 0.\tag{7.48}$$

- Condição de energia fraca

$$\begin{aligned}\rho_{ef}^{(0)} &= \frac{1}{2}f_0 + 3H_0^2[(1 - q_0) + \Omega_m] - 6H_0^4[8 + q_0(9 + q_0) - j_0 + s_0]f_{RR}^{(0)} \\ &\quad + 36H_0^6(2 + q_0 - j_0)^2 f_{RRR}^{(0)} \geq 0,\end{aligned}\tag{7.49}$$

$$\rho_{ef}^{(0)} + p_{ef}^{(0)} = 3\Omega_m H_0^2 + 2H_0^2[-8 - q_0(9 + q_0) + j_0 - s_0]f_{RR}^{(0)} + 12H_0^4(2 + q_0 - j_0)^2 f_{RRR}^{(0)} \geq 0.\tag{7.50}$$

- Condição de energia dominante

$$\begin{aligned}\rho_{ef}^{(0)} - p_{ef}^{(0)} &= -f_0 + 3H_0^2(2 - 2q_0 + \Omega_m) + 6H_0^2[-4 + q_0(3 + q_0) + 5j_0 + s_0]f_{RR}^{(0)} \\ &\quad - 36H_0^6(2 + q_0 - j_0)^2 f_{RRR}^{(0)} \geq 0,\end{aligned}\tag{7.51}$$

$$\rho_{ef}^{(0)} + p_{ef}^{(0)} = 3\Omega_m H_0^2 + 2H_0^2[-8 - q_0(9 + q_0) + j_0 - s_0]f_{RR}^{(0)} + 12H_0^4(2 + q_0 - j_0)^2 f_{RRR}^{(0)} \geq 0,\tag{7.52}$$

$$\begin{aligned} \rho_{ef}^{(0)} &= \frac{1}{2}f_0 + 3H_0^2 [(1 - q_0) + \Omega_m] - 6H_0^4 [8 + q_0 (9 + q_0) - j_0 + s_0] f_{RR}^{(0)} \\ &+ 36H_0^6 (2 + q_0 - j_0)^2 f_{RRR}^{(0)} \geq 0. \end{aligned} \quad (7.53)$$

Na próxima seção, as equações (7.46)-(7.53) que, daqui em diante, serão coletivamente chamadas de CEC, juntamente com as equações cosmográficas para a gravidade $f(R, T)$, e os valores medidos para os parâmetros (Ω_m, H_0) e (q_0, j_0, s_0) , serão utilizados para verificarmos se alguns modelos genéricos do tipo $f(R, T) = f(R) + f(T)$ satisfazem ou não essas condições de energia.

7.4 Restringindo Modelos de Gravidade $f(\mathbf{R}, \mathbf{T})$ Usando Condições de Energia Cosmográficas

Neste seção, munidos dos valores atuais das expressões cosmográficas para a gravidade $f(R, T)$, bem como os valores experimentais mais recentes para os parâmetros $(\Omega_m, H_0, w_0, w_a)$, dados pela Colaboração Planck, $\Omega_M = 0,315 \pm 0,007$, $H_0 = 67,4 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, $w_0 = -1,03 \pm 0,03$ e $w_a = -0,29_{-0,26}^{+0,32}$ (AGHANIM *et al.*, 2020), e os valores $(q_0, j_0, s_0) = (-0,276; -0,023; -0,745)$, obtidos para os parâmetros cosmográficos em (CAPOZZIELLO *et al.*, 2018), iremos verificar se alguns modelos, bem motivados do tipo $f(R, T) = f(R) + f(T)$, satisfazem as CEC (7.46)-(7.53). A análise é direta, para isso, apenas inserimos as expressões cosmográficas obtidas no capítulo 5 e os valores numéricos dos parâmetros (Ω_m, H_0) e (q_0, j_0, s_0) nas CEC (7.46)-(7.53), e verificamos se essas últimas são satisfeitas ou violadas.

7.4.1 Modelo $f(\mathbf{R}, \mathbf{T}) = f(\mathbf{R}) + f(\mathbf{T})$

Primeiramente, vamos verificar se as condições (7.46)-(7.53) são satisfeitas para um modelo do tipo $f(R, T) = f(R) + f(T)$ qualquer. Para isso, faremos uso das equações cosmográficas para esse modelo. Inserindo, então, as expressões (5.39)-(5.41) nas CEC (7.46)-(7.53), e atribuindo valores numéricos aos parâmetros envolvidos obtemos para as condições de energia:

- Condição de energia forte

$$\rho_{ef}^{(0)} + 3p_{ef}^{(0)} \simeq 1,775 \times 10^8 > 0 \Rightarrow \textit{Satisfeita}, \quad (7.54)$$

$$\rho_{ef}^{(0)} + p_{ef}^{(0)} \simeq 5,919 \times 10^7 > 0 \Rightarrow \textit{Satisfeita}. \quad (7.55)$$

- Condição de energia nula

$$\rho_{ef}^{(0)} + p_{ef}^{(0)} \simeq 5,919 \times 10^7 > 0 \Rightarrow \textit{Satisfeita}. \quad (7.56)$$

- Condição de energia fraca

$$\rho_{ef}^{(0)} \simeq 5,919 \times 10^7 > 0 \Rightarrow \textit{Satisfeita}, \quad (7.57)$$

$$\rho_{ef}^{(0)} + p_{ef}^{(0)} \simeq 5,919 \times 10^7 > 0 \Rightarrow \textit{Satisfeita}. \quad (7.58)$$

- Condição de energia dominante

$$\rho_{ef}^{(0)} - p_{ef}^{(0)} \simeq -5,909 \times 10^7 < 0 \Rightarrow \textit{Violada}, \quad (7.59)$$

$$\rho_{ef}^{(0)} + p_{ef}^{(0)} \simeq 5,919 \times 10^7 > 0 \Rightarrow \textit{Satisfeita}, \quad (7.60)$$

$$\rho_{ef}^{(0)} \simeq 5,919 \times 10^7 > 0 \Rightarrow \textit{Satisfeita}. \quad (7.61)$$

Podemos ver de (7.54)-(7.61) que, basicamente, todas as condições de energia são satisfeitas para esse caso de uma $f(R, T) = f(R) + f(T)$ genérica. Do resultado dado em (7.59), temos que a desigualdade $\rho_{ef}^{(0)} \geq p_{ef}^{(0)}$ é a única que constitui a condição de energia dominante que é violada, o que nos diz que atualmente a densidade de energia efetiva é menor do que a pressão efetiva. Como a violação dessa condição está associada, necessariamente, aos campos clássicos de Dirac (PENROSE & RINDLER, 1984) e, possivelmente, à formação de singularidades dos tipos “*big bang*” e “*big crunch*”, temos que a violação de $\rho_{ef} \geq p_{ef}$ por esses modelos pode favorecer as chamadas cosmologias de “*big bang*” e “*big crunch*” (CATTOEN & VISSER, 2005; CATTOEN & VISSER, 2008).

7.4.2 Cenários de energia escura

7.4.2.1 Λ CDM

De forma análoga ao que foi feito anteriormente, as expressões cosmográficas para a gravidade $f(R, T)$ dentro dos principais cenários de EE serão usadas juntamente com os

valores numéricos dos parâmetros para sabermos se as condições de energia são cumpridas ou violadas dentro de cada cenário analisado. Começaremos com o modelo Λ CDM. Inserindo suas equações cosmográficas (5.73)-(5.75) nas CEC (7.46)-(7.53), obtemos os seguintes resultados para as condições de energia no cenário Padrão:

- Condição de energia forte

$$\rho_{ef}^{(0)} + 3p_{ef}^{(0)} = 26547,9 > 0 \Rightarrow \textit{Satisfeita}, \quad (7.62)$$

$$\rho_{ef}^{(0)} + p_{ef}^{(0)} = 5110,61 > 0 \Rightarrow \textit{Satisfeita}. \quad (7.63)$$

- Condição de energia nula

$$\rho_{ef}^{(0)} + p_{ef}^{(0)} = 5110,61 > 0 \Rightarrow \textit{Satisfeita}. \quad (7.64)$$

- Condição de energia fraca

$$\rho_{ef}^{(0)} = -5608,04 < 0 \Rightarrow \textit{Violada}, \quad (7.65)$$

$$\rho_{ef}^{(0)} + p_{ef}^{(0)} = 5110,61 > 0 \Rightarrow \textit{Satisfeita}. \quad (7.66)$$

- Condição de energia dominante

$$\rho_{ef}^{(0)} - p_{ef}^{(0)} = 96106,6 > 0 \Rightarrow \textit{Satisfeita}, \quad (7.67)$$

$$\rho_{ef}^{(0)} + p_{ef}^{(0)} = 5110,61 > 0 \Rightarrow \textit{Satisfeita}, \quad (7.68)$$

$$\rho_{ef}^{(0)} = -5608,04 < 0 \Rightarrow \textit{Violada}. \quad (7.69)$$

A observação das equações (7.62) e (7.69), mostra-nos que a desigualdade $\rho_{ef}^{(0)} \geq 0$ é a única que é violada dentro do cenário Padrão. A violação da condição de energia fraca tem como consequências: buracos de minhoca fisicamente atravessáveis (MORRIS; THORNE, 1998; VISSER, 1989a; VISSER, 1989b); teorias de estado estacionário, tais como aquelas de Bondi e Gold (BONDI; GOLD, 1989) e Hoyle (HOYLE, 1989), o que parece não fazer sentido dentro de um cenário com expansão

acelerada, tal como o Λ CDM; uma constante cosmológica positiva (HAWKING; ELLIS, 1973; VISSER, 1996); e as chamadas viagens hiper-rápidas (ALCUBIERRE, 1994; KRASNIKOV, 1998; OLUM, 1998). A violação da condição de energia dominante, como já mencionado, tem como consequência necessária a formação dos campos clássicos de Dirac (PENROSE & RINDLER, 1984) e, possivelmente, à formação de singularidades dos tipos “*big bang*” e “*big crunch*”, de forma que sua violação dentro do cenário Padrão pode favorecer as chamadas cosmologias de “*big bang*” e “*big crunch*” (CATTOEN & VISSER, 2005; CATTOEN & VISSER, 2008).

7.4.2.2 Quiessência

Dentro do cenário de quiescência, a cosmografia da gravidade $f(R, T)$ é dada pelas equações (5.79)-(5.81). Usando essas expressões nas CEC (7.46)-(7.53), obtemos os seguintes valores numéricos para as condições de energia nesse cenário:

- Condição de energia forte

$$\rho_{ef}^{(0)} + 3p_{ef}^{(0)} \simeq 9,562 \times 10^6 > 0 \Rightarrow \textit{Satisfeita}, \quad (7.70)$$

$$\rho_{ef}^{(0)} + p_{ef}^{(0)} \simeq 3,181 \times 10^6 > 0 \Rightarrow \textit{Satisfeita}. \quad (7.71)$$

- Condição de energia nula

$$\rho_{ef}^{(0)} + p_{ef}^{(0)} \simeq 3,181 \times 10^6 > 0 \Rightarrow \textit{Satisfeita}. \quad (7.72)$$

- Condição de energia fraca

$$\rho_{ef}^{(0)} \simeq 3,170 \times 10^6 > 0 \Rightarrow \textit{Satisfeita}, \quad (7.73)$$

$$\rho_{ef}^{(0)} + p_{ef}^{(0)} \simeq 3,181 \times 10^6 > 0 \Rightarrow \textit{Satisfeita}. \quad (7.74)$$

- Condição de energia dominante

$$\rho_{ef}^{(0)} - p_{ef}^{(0)} \simeq -3,083 \times 10^6 < 0 \Rightarrow \textit{Violada}, \quad (7.75)$$

$$\rho_{ef}^{(0)} + p_{ef}^{(0)} \simeq 3,181 \times 10^6 > 0 \Rightarrow \textit{Satisfeita}, \quad (7.76)$$

$$\rho_{ef}^{(0)} \simeq 3,170 \times 10^6 > 0 \Rightarrow \textit{Satisfeita}. \quad (7.77)$$

Podemos observar pelas equações (7.70)-(7.77) que dentro do contexto da quiessência, assim como acontece com o caso de uma $f(R, T) = f(R) + f(T)$ genérica, a única desigualdade que é violada é $\rho_{ef}^{(0)} \geq p_{ef}^{(0)}$, o que nos diz que no tempo atual a densidade de energia efetiva é menor que a pressão efetiva. Mais uma vez, há a violação da condição de energia dominante que, como já mencionado, uma vez violada, favorece as cosmologias de “*big bang*” e “*big crunch*” (CATTOEN & VISSER, 2005; CATTOEN & VISSER, 2008).

A satisfação da condição de energia forte no contexto da quiessência, bem como no cenário padrão Λ CDM é um tanto inusitada, pois a violação dessa condição dentro desses cenários era esperada, já que ela implica em uma constante cosmológica negativa e uma componente de EE postulada para ser responsável pela atual expansão acelerada do Universo (HAWKING; ELLIS, 1973; CALDWELL, 2002; CALDWELL *et al.*, 2003; DABROWSKI *et al.*, 2003)). A violação da condição nula já era esperada no caso da quiessência, tendo em vista que uma de suas implicações necessárias são as chamadas cosmologias fantasmas, isto é, aquelas com índice barotrópico $\omega < -1$ (VISSER, 1996; DABROWSKI; DENKIEWICZ, 2009), isso já não faria sentido se ocorresse no cenário Padrão, uma vez que, nele é esperado $\omega = -1$, sempre.

7.4.2.3 Quintessência

Por fim, consideraremos a cosmografia da gravidade $f(R, T)$ para o caso de quintessência. Neste cenário, as equações cosmográficas são dadas em (5.85)-(5.87) e, ao serem inseridas nas CEC (7.46)-(7.53), resultam nos seguintes valores numéricos para as condições de energia nesse cenário de EE em evolução:

- Condição de energia forte

$$\rho_{ef}^{(0)} + 3p_{ef}^{(0)} \simeq -2,633 \times 10^9 < 0 \Rightarrow \textit{Violada}, \quad (7.78)$$

$$\rho_{ef}^{(0)} + p_{ef}^{(0)} \simeq -8,776 \times 10^8 < 0 \Rightarrow \textit{Violada}. \quad (7.79)$$

- Condição de energia nula

$$\rho_{ef}^{(0)} + p_{ef}^{(0)} \simeq -8,776 \times 10^8 < 0 \Rightarrow \textit{Violada}. \quad (7.80)$$

- Condição de energia fraca

$$\rho_{ef}^{(0)} \simeq -8,776 \times 10^8 > 0 \Rightarrow \textit{Violada}, \quad (7.81)$$

$$\rho_{ef}^{(0)} + p_{ef}^{(0)} \simeq -8,776 \times 10^8 < 0 \Rightarrow \textit{Violada}. \quad (7.82)$$

- Condição de energia dominante

$$\rho_{ef}^{(0)} - p_{ef}^{(0)} \simeq 8,778 \times 10^8 > 0 \Rightarrow \textit{Satisfeita}, \quad (7.83)$$

$$\rho_{ef}^{(0)} + p_{ef}^{(0)} \simeq -8,776 \times 10^8 < 0 \Rightarrow \textit{Violada}, \quad (7.84)$$

$$\rho_{ef}^{(0)} \simeq -8,776 \times 10^8 > 0 \Rightarrow \textit{Violada}. \quad (7.85)$$

Vemos que dentro do contexto da quintessência quase todas as condições de energia são violadas. As violações dessas estão atreladas a alguns resultados interessantes. A violação da condição de energia forte tem como implicações necessárias: cosmologias de “*bounce*”(CATTOËN; VISSER, 2005; CATTOËN; VISSER, 2008a); espaços-tempo espacialmente fechados, em expansão e livres de singularidades (SENOVILLA, 1997); inflação cósmica (VISSER, 1996); uma constante cosmológica negativa e a EE postulada para ser responsável pela expansão acelerada observada no Universo atualmente (HAWKING; ELLIS, 1973; CALDWELL, 2002; CALDWELL *et al.*, 2003; DABROWSKI *et al.*, 2003); buracos negros assintoticamente planos com interiores não singulares (ANSOLDI, 2008); buracos de minhoca fisicamente atravessáveis (MOLINA-PARIS; VISSER, 1999; HOCHBERG *et al.*, 1999); e viagens “hiper-rápidas”(KRASNIKOV, 1998; OLUM, 1998; ALCUBIERRE, 1994). A violação da condição nula tem como implicações: singularidades do tipo “*big rip*”(CATTOËN; VISSER, 2005; CATTOËN; VISSER, 2008a); buracos de minhoca de Tolman e Pontes de Einstein-Rosen (BARCELÓ; VISSER, 1999); e as chamadas cosmologias fantasmas, isto é, aquelas com índice barotrópico $\omega < -1$ (VISSER, 1996; DABROWSKI; DENKIEWICZ, 2009). A violação da condição de energia fraca, por sua vez, acarreta em: buracos de minhoca fisicamente atravessáveis (MORRIS; THORNE, 1998; VISSER, 1989a; VISSER, 1989b); teorias de estado estacionário, tais como aquelas de Bondi e Gold (BONDI; GOLD, 1989) e Hoyle (HOYLE, 1989); uma constante cosmológica positiva (HAWKING; ELLIS, 1973; VISSER, 1996); e as chamadas viagens hiper-rápidas (ALCUBIERRE, 1994; KRASNIKOV, 1998; OLUM, 1998).

A equação (7.83) nos mostra que a única condição que é satisfeita no cenário de quintessência é a inigualdade $\rho_{ef}^{(0)} \geq p_{ef}^{(0)}$, dizendo-nos que, no tempo atual, a densidade

de energia efetiva é maior que a pressão efetiva. Como a violação dessa condição está associada à formação de singularidades dos tipos *big bang* e *big crunch*, sua satisfação neste cenário pode favorecer as chamadas cosmologias de *bounce*.

8 CONCLUSÕES

A descoberta da expansão acelerada do Universo no final dos anos 1990, acarretou em sérios problemas teóricos para o modelo cosmológico Padrão, e mesmo mais de vinte anos após essa importante descoberta, os “problemas da constante cosmológica” e “da coincidência” seguem sem uma resolução convincente. Diante desse cenário, surgiram duas frentes principais para tentar resolver o enigma da aceleração cósmica. De uma lado, surgiram os modelos de EE que, pela adição dessa fonte exótica às equações de campo da RG, tentam explicar através de suas propriedades não usuais a dinâmica observada (MIAO *et al.*, 2011; BAMBBA *et al.*, 2012). Contudo, tais modelos, também se deparam com graves problemas teóricos, como a origem física desse fluido escuro. Do outro lado, começaram a se multiplicar as chamadas teorias alternativas de gravidade, que através de modificações na ação de Einstein-Hilbert, buscam explicar a aceleração do Universo por meio de modificações no setor geométrico das equações de campo (SOTIRIOU; FARAONI, 2010; FELICE; TSUJIKAWA, 2010; MIAO *et al.*, 2011; HARKO *et al.*, 2011).

No contexto de gravidade modificada, se por um lado estas teorias alternativas nos brindam com uma plêiade de novas e interessantes possibilidades, por outro lado, elas nos levam ao problema da degenerescência, que surge do fato que vários desses modelos, mesmo com grandes diferenças entre eles, ajustam da mesma forma bem sucedida os dados observacionais disponíveis, deixando-nos a dúvida de qual deles seria o mais adequado. Diante desse impasse, a melhor saída parece recorrer ao uso de técnicas que não só sejam independentes de modelos particulares, mas que também nos ajudem a discriminar entre cenários rivais. Neste sentido, a Cosmografia desponta como principal candidata. Sendo em sua essência um estudo cinemático do Universo, no sentido que não postula *a priori* um modelo para descrever sua dinâmica de fundo, ela se configura como independente de modelos. Além disso, como notado e aplicado às teorias $f(R)$ e $f(\mathcal{T})$ em (CAPOZZIELLO *et al.*, 2008) e (CAPOZZIELLO *et al.*, 2011) respectivamente, a Cosmografia pode também ser usada como uma ferramenta de seleção se sua aplicação usual for invertida, isto é, se em vez de postular um modelo de gravidade *a priori* e, a partir daí, obter os PC (q_0, j_0, s_0, l_0) como um sub-produto dessa teoria, nós escrevermos uma determinada função que caracteriza um modelo de gravidade qualquer e suas primeiras derivadas em termos dos PC, a partir dos valores observacionalmente medidos desses parâmetros, po-

demos obter restrições sobre essa função e suas derivadas, e tais restrições podem nos ajudar a discriminar entre modelos rivais, caracterizando, assim, a Cosmografia como uma promissora técnica de seleção.

Motivados pelas considerações acima, no presente trabalho nos propusemos a criar a cosmografia da teoria de gravidade modificada $f(R, T)$. Para isso, partimos de suas equações de campo, considerando apenas modelos que conservam o TEM. Então, através de algumas suposições razoáveis, usamos suas equações do tipo Friedmann e do tipo Raychaudhuri para chegarmos a um sistema fechado de equações e incógnitas, o qual, quando resolvido, forneceu as equações cosmográficas desejadas. Uma característica notável dessa cosmografia é que suas equações só dependem dos parâmetros (q_0, j_0, s_0) , isso é importante porque limitar os estudos cosmográficos ao *snep* está relacionado ao fato que os próximos parâmetros cosmográficos são pobremente restringidos pelas observações (CAPOZZIELLO *et al.*, 2011; DEMIANSKI *et al.*, 2012). Além de obtermos a cosmografia para uma $f(R, T)$ qualquer, também obtivermos as equações cosmográficas dentro dos principais cenários de EE: Λ CDM, quiescência e quintessência. Isso foi feito através do uso da parametrização CPL, a qual foi escolhida a fim de reduzir a dependência dos resultados de qualquer cenário teórico subjacente.

No que se seguiu, mostramos como as equações cosmográficas podem ser usadas, de fato, para ajudar a restringir modelos do tipo $f(R, T)$. Sendo que, para isso, usamos os valores experimentais mais recentes dos parâmetros (Ω_m, H_0) , dados pela Colaboração Planck (AGHANIM *et al.*, 2020), e os valores dos PC (q_0, j_0, s_0) , dados em (CAPOZZIELLO *et al.*, 2018). Prosseguindo, escolhemos alguns modelos gerais, e escrevemos seus parâmetros característicos em termos dos PC. Em uma primeira análise mais simples, obtivermos que, para nenhuma das três parametrizações da função $f(R, T)$ que foram estudadas, há a indicação de que a contribuição do traço do TEM, presente na função $f(T)$, é nula. Também não obtivermos nenhuma sugestão de que a ação seja dada somente pelo termo de Einstein-Hilbert.

Dando continuidade ao nosso estudo de como as cosmografias obtidas poderiam se usadas para colocar restrições nos modelos do tipo $f(R, T) = f(R) + f(T)$, fizemos uma combinação interessante entre as chamadas condições de energia e Cosmografia. As primeiras, no contexto de muitas teorias métricas de gravidade, são condições impostas ao TEM para que este capture a ideia de que a energia é positiva. Tais condições, são comumente derivadas a partir das equações de Raychaudhuri. Mesmo que essas últimas não sejam vinculadas a nenhuma teoria de gravidade em particular, podemos usar as equações de campo de uma dada teoria de gravidade para relacionar o tensor de Ricci, $R_{\mu\nu}$, ao TEM, $T_{\mu\nu}$, de forma que possamos obter um conjunto de condições físicas para este último. Isso foi feito para a gravidade $f(R, T)$. Então, as condições de energia que obtivemos foram combinadas com as cosmografias obtidas para esta teoria, resultando no que

chamamos de CEC. Prosseguimos então a uma análise numérica simples e direta, na qual tão somente inserimos os valores numéricos dos parâmetros envolvidos nas CEC. Mais uma vez, usamos os valores de $(\Omega_m, H_0, w_0, w_a)$, dados pela Colaboração Planck (AGHANIM *et al.*, 2020), e os valores dos PC (q_0, j_0, s_0) , dados em (CAPOZZIELLO *et al.*, 2018). A análise mostrou que tanto uma $f(R, T)$ qualquer, quanto uma $f(R, T)$ dentro dos cenários de EE Padrão e de quiessência, satisfazem quase todas as CEC. Exatamente o contrário se verificou para o último cenário de $f(R, T)$ considerado, quintessência. Nesse último, quase todas as CEC são violadas.

Vale aqui fazer uma ressalva sobre a importância dos resultados deste trabalho. Primeiro, a cosmografia obtida para a gravidade $f(R, T)$ é inédita na literatura. Além de seu caráter inédito, essas equações cosmográficas carregam uma série de implicações importantes subjacentes, como a possibilidade de, na prática, podermos restringir modelos desta classe de teorias. Em um trabalho relacionado direto, em vez de uma análise simples e direta como a feita aqui, o espaço dos parâmetros dessa cosmografia pode ser varrido por uma análise numérica, verificando suas regiões permitidas e proibidas, de forma a se eliminar modelos inviáveis, como já foi feito para as teorias do tipo $f(R)$ (AVILES *et al.*, 2013b; PANNIA; BERGLIAFFA, 2013; CAPOZZIELLO *et al.*, 2019a; CAPOZZIELLO *et al.*, 2019b) e para as teorias $f(\mathcal{T})$ (AVILES *et al.*, 2013a; PIEDIPALUMBO *et al.*, 2015; CAPOZZIELLO *et al.*, 2019a). No caso da $f(R, T)$, isso pode ser feito com uma certa precisão numérica, já que as equações cosmográficas aqui obtidas só dependem dos parâmetros que possuem alguma restrição observacional (q_0, j_0, s_0) .

Um segundo resultado importante aqui obtido corresponde às CEC. Essa combinação de condições de energia com as equações cosmográficas podem ser uma poderosa ferramenta de seleção de modelos. Neste caso, assim como no anterior, em vez de uma análise simples e direta como a feita aqui, pode ser feita uma análise numérica mais completa no espaço dos parâmetros, que nos mostre suas regiões permitidas e proibidas. Também é possível, em um futuro trabalho, verificar se os resultados obtidos no capítulo 7 seriam alterados se, em vez de considerar os valores dos PC obtidos através da expansão de Taylor usual, usarmos os valores obtidos através de outras expansões (CAPOZZIELLO *et al.*, 2018).

Outros trabalhos relacionados ao desenvolvido aqui incluem construir uma cosmografia para outras classes de modelos do tipo $f(R, T)$, como para a sua versão métrica-afim (BARRIENTOS *et al.*, 2018), por exemplo. Além disso, à semelhança do que já foi feito para a classe de teorias $f(R)$ (BOUHMADI-LÓPEZ *et al.*, 2010), podemos aplicar a técnica cosmográfica em cenários de dimensões mais altas, como os cenários de mundo-brana dos tipos Randall-Sundrum (RANDALL; SUNDRUM, 1999b; RANDALL; SUNDRUM, 1999a) e DGP (DVALI *et al.*, 2000), ambos esses cenários se configuram como interessantes e importantes vias alternativas que buscam explicar os problemas cósmicos, e o

chamado problema da hierarquia, através da presença de dimensões extras, de forma que averiguar tais cenários de mundo-brana sob a perspectiva da Cosmografia é algo motivador e pertinente.

Na tentativa de se resolver os problemas enfrentados pelo Modelo Padrão, tanto as teorias alternativas de gravidade, quanto os modelos de EE vêm se multiplicando nos últimos anos. Na atual impossibilidade de dizermos qual modelo é o mais viável para descrever o Universo, temos que recorrer às ferramentas de seleção de modelos, que nos permitam eliminar aqueles menos apropriados. Entre essas ferramentas de seleção, a Cosmografia tem despontado como uma das principais, por seu caráter puramente cinemático e por ser independente de modelos. Os resultados para as cosmografias das teorias $f(R)$ e $f(\mathcal{T})$ obtidos, por sua ordem, em (CAPOZZIELLO *et al.*, 2008; CAPOZZIELLO *et al.*, 2011), e a cosmografia da gravidade $f(R, T)$ aqui obtida (FARIAS; MORAES, 2023), ilustram bem como a Cosmografia pode ser uma poderosa ferramenta de seleção, e isso justifica os inúmeros esforços para melhorar a precisão com a qual os PC são obtidos por vias cosmo-gráficas, uma vez que na ausência de um esquema teórico auto-consistente para descrever a dinâmica observada do Universo, as pesquisas por novos modelos cosmológicos capazes de superar os problemas do modelo Padrão Λ CDM é uma tarefa em aberto na Cosmologia moderna.

Referências

- AGHANIM, N.; AKRAMI, Y.; ASHDOWN, M.; AUMONT, J.; BACCIGALUPI, C.; BALLARDINI, M.; BANDAY, A. J.; BARREIRO, R. B.; BARTOLO, N.; BASAK, S. *et al.* Planck 2018 results-vi. cosmological parameters. **Astronomy & Astrophysics**, v. 641, n. A6, 2020. 59, 60, 62, 64, 65, 76, 84, 85
- ALAM, U.; SAHN, V.; SAINI, T. D.; STAROBINSKY, A. A. Exploring the expanding universe and dark energy using the statefinder diagnostic. **Monthly Notices Royal Astronomical Society**, v. 344, n. 1057, 2003. 23, 56
- ALBRECHT, A.; BERNSTEIN, G.; CAHN, R.; FREEDMAN, W. L.; HEWITT, J.; HU, W.; HUTH, J.; KAMIONKOWSKI, M.; KOLB, E. W.; KNOX, L.; MATHER, J. C.; STAGGS, S.; SUNTZEFF, N. B. Report of the dark energy task force. In: **Fermilab Report No. FERMILAB-FN-0793-A**. [S.l.: s.n.], 2006. 52
- ALCUBIERRE, M. The warp drive: Hyper-fast travel within general relativity. **Classical and Quantum Gravity**, v. 11, n. L73, 1994. 79, 81
- ALVARENGA, F. G.; CRUZ-DOMBRIZ, A. de la; HOUNDJO, M. J. S.; RODRIGUES, M. E.; SÁEZ-GÓMEZ, D. Dynamics of scalar perturbations in $f(r, t)$ gravity. **Physical Review D**, v. 87, n. 103526, 2013. 48, 59
- ANSOLDI, S. Spherical black holes with regular center: a review of existing models including a recent realization with gaussian sources. **arXiv preprint arXiv:0802.0330**, 2008. 81
- ARFKEN, G. B.; WEBER, H. J.; HARRIS, F. E. **Mathematical Methods For Physicists: A Comprehensive Guide**. 3rd. ed. United States of America: Academic Press, 2013. 24, 26
- ARKANI-HAMED, N.; HALL, L. J.; KOLDA, C.; MURAYAMA, H. New perspective on cosmic coincidence problems. **Physical Review Letters**, v. 85, n. 21, 2000. 13, 20
- AVILES, A.; BRAVETTI, A.; CAPOZZIELLO, S.; LUONGO, O. Cosmographic reconstruction of $f(\mathcal{T})$ cosmology. **Physical Review D**, v. 87, n. 064025, 2013. 85
- AVILES, A.; BRAVETTI, A.; CAPOZZIELLO, S.; LUONGO, O. Updated constraints on $f(r)$ gravity from cosmography. **Physical Review D**, v. 87, n. 044012, 2013. 85
- BAER, H.; CHOI, K.-Y.; KIM, J. E.; ROSZKOWSKI, L. Dark matter production in the early universe: Beyond the thermal wimp paradigm. **Physics Reports**, v. 555, n. 1, 2015. 19, 20

- BAFFOU, E. H.; KPADONOU, A. V.; RODRIGUES, M. E.; HOUNDJO, M. J. S.; TOSSA, J. Cosmological viable $f(r, t)$ dark energy model: dynamics and stability. **Astrophysics and Space Science**, v. 356, n. 173, 2015. 47
- BAMBA, K.; CAPOZZIELLO, S.; NOJIRI, S.; ODINTSOV, S. D. Dark energy cosmology: the equivalent description via different theoretical models and cosmography tests. **Astrophysics and Space Science**, v. 342, n. 155, 2012. 13, 19, 56, 58, 83
- BARCELÓ, C.; VISSER, M. Traversable wormholes from massless conformally coupled scalar fields. **Physics Letters B**, v. 466, n. 127, 1999. 81
- BARRIENTOS, E.; LOBO, F. S. N.; MENDOZA, S.; OLMO, G. J.; RUBIERA-GARCIA, D. Metric-affine $f(r, t)$ theories of gravity and their applications. **Physical Review D**, v. 97, n. 104041, 2018. 85
- BARRIENTOS, J.; RUBILAR, G. F. Comment on “ $f(r, t)$ gravity”. **Physical Review D**, v. 90, n. 028501, 2014. 14, 48, 51
- BASILAKOS, S.; NESSERIS, S.; PERIVOLAROPOULOS, L. Is the cmb shift parameter connected with the growth of cosmological perturbations? **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 387, n. 1126, 2008. 52
- BERNARDIS, P. de; ADE, P. A. R.; BOCK, J. J.; BOND, J. R.; BORRILL, J.; BOSCALERI, A.; COBLE, K.; CRILL, B. P.; GASPERIS, G. D.; FARESE, P. C.; FERREIRA, P. G.; GANGA, K.; GIACOMETTI, M.; HIVON, E.; HRISTOV, V. V.; IACOANGELI, A.; JAFFE, A. H.; LANGE, A. E.; MARTINIS, L.; MASI, S.; MASON, P. V.; MAUSKOPF, P. D.; MELCHIORRI, A.; MIGLIO, L.; MONTROY, T.; NETTERFIELD, C. B.; PASCALE, E.; PIACENTINI, F.; POGOSYAN, D.; PRUNET, S.; RAO, S.; ROMEO, G.; RUHL, J. E.; SCARAMUZZI, F.; SFORNA, D.; VITTORIO, N. A flat universe from high-resolution maps of the cosmic microwave background radiation. **Nature**, v. 404, n. 955, 2000. 22
- BONDI, H.; GOLD, T. The steady-state theory of the expanding universe. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 108, n. 252, 1989. 78, 81
- BOUHMADE-LÓPEZ, M.; CAPOZZIELLO, S.; CARDONE, V. F. Cosmography of $f(r)$ -brane cosmology. **Physical Review D**, v. 82, n. 103526, 2010. 85
- CAI, R.-G.; GUO, Z.-K.; YANG, T. Null test of the cosmic curvature using $h(z)$ and supernovae data. **Physical Review D**, v. 93, n. 043517, 2016. 22
- CALDWELL, R. A phantom menace? cosmological consequences of a dark energy component with super-negative equation of state. **Physics Letters B**, v. 545, n. 23, 2002. 80, 81
- CALDWELL, R.; KAMIONKOWSKI, M.; WEINBERG, N. Phantom energy: Dark energy with $w < -1$ causes a cosmic doomsday. **Physical Review Letters**, v. 91, n. 071301, 2003. 80, 81
- CALDWELL, R. R.; DAVE, R.; STEINHARDT, P. J. Cosmological imprint of an energy component with general equation of state. **Physical review letters**, v. 80, n. 8, 1998. 56, 58

- CAPOZZIELLO, S.; CARDONE, V. F.; SALZANO, V. Cosmography of $f(r)$ gravity. **Physical Review D**, v. 78, n. 063504, 2008. 14, 36, 42, 43, 46, 53, 58, 83, 86
- CAPOZZIELLO, S.; CARDONE, V. F.; TROISI, A. Reconciling dark energy models with $f(r)$ theories. **Physical Review D**, v. 71, n. 043503, 2005. 38, 39, 40
- CAPOZZIELLO, S.; D'AGOSTINO, R.; LUONGO, O. Cosmographic analysis with chebyshev polynomials. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 476, n. 3924, 2018. 59, 76, 84, 85
- CAPOZZIELLO, S.; D'AGOSTINO, R.; LUONGO, O. Extended gravity cosmography. **International Journal of Modern Physics D**, v. 28, n. 10, 2019. 85
- CAPOZZIELLO, S.; D'AGOSTINO, R.; LUONGO, O. Kinematic model-independent reconstruction of palatini $f(r)$ cosmology. **General Relativity and Gravitation**, v. 51, n. 2, 2019. 85
- CAPOZZIELLO, S.; LAZKOZ, R.; SALZANO, V. Comprehensive cosmographic analysis by markov chain method. **Physical Review D**, v. 84, n. 124061, 2011. 14, 32, 46, 83, 84, 86
- CAPOZZIELLO, S.; STABILE, A.; TROISI, A. Newtonian limit of $f(r)$ gravity. **Physical Review D**, v. 76, n. 104019, 2007. 14, 44
- CARROLL, S. **Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity**. 1rd. ed. New York: Addison-Wesley, 2004. 67, 68, 69
- CARVALHO, G. A.; ROCHA, F.; OLIVEIRA, H. O.; LOBATO, R. V. General approach to the lagrangian ambiguity in $f(r, t)$ gravity. **The European Physical Journal C**, v. 81, n. 134, 2020. 47
- CATTOËN, C.; VISSER, M. Necessary and sufficient conditions for big bangs, bounces, crunches, rips, sudden singularities and extremality events. **Classical and Quantum Gravity**, v. 22, n. 4913, 2005. 81
- CATTOËN, C.; VISSER, M. Cosmodynamics: Energy conditions, hubble bounds, density bounds, time and distance bounds. **Classical and Quantum Gravity**, v. 25, n. 165013, 2008. 81
- CATTOËN, C.; VISSER, M. Cosmographic hubble fits to the supernova data. **Physical Review D**, v. 78, n. 063501, 2008. 32
- CERVANTES-COTA, J. L.; SMOOT, G. Cosmology today-a brief review. **AIP Conference Proceedings**, v. 1396, n. 28, 2011. 12, 19
- CHAKRABORTY, S. An alternative $f(r, t)$ gravity theory and the dark energy problem. **General Relativity and Gravitation**, v. 45, n. 2039, 2013. 47, 59
- CHEVALLIER, M.; POLARSKI, D. Accelerating universes with scaling dark matter. **International Journal of Modern Physics D**, v. 10, n. 02, 2001. 52
- CHIBA, T.; SMITHAND, T. L.; ERICKCEK, A. L. Solar system constraints to general $f(r)$ gravity. **Physical Review D**, v. 75, n. 124014, 2007. 14, 44

- DABROWSKI, M.; DENKIEWICZ, T. Barotropic index w-singularities in cosmology. **Physical Review D**, v. 79, n. 063521, 2009. 80, 81
- DABROWSKI, M.; STACHOWIAK, T.; LOWSKI, M. S. Phantom cosmologies. **Physical Review D**, v. 68, n. 103519, 2003. 80, 81
- DAS, A.; RAHAMAN, F.; GUHA, B.; RAY, S. Compact stars in $f(r, t)$ gravity. **The European Physical Journal C**, v. 76, n. 654, 2016. 47
- DEMIANSKI, M.; PIEDIPALUMBO, E.; RUBANO, C.; SCUDELLARO, P. High-redshift cosmography: new results and implications for dark energy. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 426, n. 1396, 2012. 84
- D'INVERNO, R. **Introducing Einstein's Relativity**. 1rd. ed. New York: Oxford University Press, 1992. 16, 17, 18, 21, 22, 24, 25, 28, 52
- DODELSON, S. **An Introduction to Modern Cosmology**. 1rd. ed. United States of America: Academic Press, 2003. 24, 25, 28
- DUNAJSKI, M.; GIBBONS, G. colocar. **Classical Quantum Gravity**, v. 25, n. 235012, 2008. 23
- DUNSBY, P. K. S.; LUONGO, O. On the theory and applications of modern cosmography. **International Journal of Geometric Methods in Modern Physics**, v. 13, n. 3, 2016. 23
- DVALI, G.; GABADADZE, G.; PORRATI, M. 4d gravity on a brane in 5d minkowski space. **Physics Letters B**, v. 485, n. 208, 2000. 85
- DWIGHT, H. B. **Table of Integrals and Other Mathematical Data**. 3rd. ed. New York: The Macmillan Company, 1957. 24, 26
- FARIAS, I. S.; MORAES, P. H. R. S. Using cosmographic energy conditions to constrain $f(r, t)$ gravity models. **The European Physical Journal Plus**, v. 138, n. 469, 2023. 86
- FELICE, A. D.; TSUJIKAWA, S. $f(r)$ theories. **Living Reviews in Relativity**, v. 13, n. 3, 2010. 37, 38, 44, 60, 61, 62, 83
- FROLOV, A. V. Singularity problem with $f(r)$ models for dark energy. **Physical Review Letters**, v. 101, n. 6, 2008. 41, 50
- HARKO, T. Thermodynamic interpretation of the generalized gravity models with geometry-matter coupling. **Physical Review D**, v. 90, n. 044067, 2014. 49
- HARKO, T.; LOBO, F. S. N. $f(r, l_m)$ gravity. **The European Physical Journal C**, v. 70, n. 373, 2010. 49
- HARKO, T.; LOBO, F. S. N.; MINAZZOLI, O. Extended $f(r, l_m)$ gravity with generalized scalar field and kinetic term dependences. **Physical Review D**, v. 87, n. 047501, 2013. 49
- HARKO, T.; LOBO, F. S. N.; NOJIRI, S.; ODINTSOV, S. D. $f(r, t)$ gravity. **Physical Review D**, v. 84, n. 024020, 2011. 13, 14, 37, 44, 45, 46, 47, 49, 70, 83

- HAWKING, S. W.; ELLIS, G. F. R. **The large scale structure of space-time**. 1rd. ed. England: Cambridge University Press, 1973. 67, 68, 69, 79, 80, 81
- HOCHBERG, D.; MOLINA-PARIS, M.; VISSER, M. Tolman wormholes violate the strong energy condition. **Physical Review D**, v. 59, n. 044011, 1999. 81
- HOYLE, F. A new model for the expanding universe. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 108, n. 372, 1989. 78, 81
- JAMIL, M.; MOMENI, D.; RAZA, M.; MYRZAKULOV, R. Reconstruction of some cosmological models in $f(r, t)$ cosmology. **The European Physical Journal C**, v. 72, n. 1999, 2012. 47
- JASSAL, H. K.; BAGLA, J. S.; PADMANABHAN, T. Wmap constraints on low redshift evolution of dark energy. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 356, n. L11, 2005. 52
- JORAS, S. E. Some remarks on $f(r)$ theories of gravity. In: **International Journal of Modern Physics: Conference Series**. [S.l.: s.n.], 2011. v. 3, p. 36–47. 41, 50
- JR., S. I. dos S.; CARVALHO, G. A.; MORAES, P. H. R. S.; LENZI, C. H.; MALHEIRO, M. A conservative energy-momentum tensor in the $f(r, t)$ gravity and its implications for the phenomenology of neutron stars. **The European Physical Journal Plus**, v. 134, n. 398, 2019. 47, 49
- KRASNIKOV, S. Hyperfast travel in general relativity. **Physical Review D**, v. 57, n. 4760, 1998. 79, 81
- KUMAR, P.; SINGH, C. P. Viscous cosmology with matter creation in modified $f(r, t)$ gravity. **Astrophysics and Space Science**, v. 357, n. 120, 2015. 14, 51
- KUNZ, M. The phenomenological approach to modeling the dark energy. **Comptes Rendus Physique**, v. 13, n. 539, 2012. 13, 20
- LIDDLE, A. **An Introduction to Modern Cosmology**. 3rd. ed. New York: John Wiley & Sons, 2015. 24, 25, 28
- LINDER, E. V. Exploring the expansion history of the universe. **Physical Review Letters**, v. 90, n. 9, 2003. 52, 53
- MARTIN, J. Everything you always wanted to know about the cosmological constant problem (but were afraid to ask). **Comptes Rendus Physique**, v. 13, n. 566, 2012. 13, 20
- MIAO, L.; XIAO-DONG, L.; SHUANG, W.; YI, W. Dark energy. **Communications in Theoretical Physics**, v. 56, n. 525, 2011. 12, 13, 18, 19, 20, 83
- MOLINA-PARIS, M.; VISSER, M. Minimal conditions for the creation of a friedmann-robertson-walker universe from a ‘bounce’. **Physics Letters B**, v. 455, n. 90, 1999. 81
- MORAES, P. H. R. S. The trace of the trace of the energy momentum tensor dependent einstein’s field equations. **The European Physical Journal C**, v. 79, n. 674, 2019. 47

- MORAES, P. H. R. S.; CORREA, R. A. C.; RIBEIRO, G. Evading the non continuity equation in the $f(r, t)$ cosmology. **The European Physical Journal C**, v. 78, n. 192, 2018. 14, 44, 47, 51
- MORAES, P. H. R. S.; RIBEIRO, G.; CORREA, R. A. C. A transition from a decelerated to an accelerated phase of the universe expansion from the simplest non-trivial polynomial function of t in the $f(r, t)$ formalism. **Astrophysics and Space Science**, v. 361, n. 227, 2016. 14, 47, 51
- MORAES, P. H. R. S.; SAHOO, P. K. The simplest non-minimal matter-geometry coupling in the $f(r, t)$ cosmology. **The European Physical Journal C**, v. 77, n. 480, 2017. 14, 47, 51
- MORAES, P. H. R. S.; SANTOS, J. R. L. A complete cosmological scenario from $f(r, t^\phi)$ gravity theory. **The European Physical Journal C**, v. 76, n. 60, 2016. 14, 51
- MORRIS, M.; THORNE, K. Wormholes in space-time and their use for interstellar travel: A tool for teaching general relativity. **American Journal of Physics**, v. 56, n. 395, 1998. 78, 81
- NETTERFIELD, C. B.; ADE, P. A. R.; BOCK, J. J.; BOND, J. R.; BORRILL, J.; BOSCALERI, A.; COBLE, K.; CONTALDI, C. R.; CRILL, B. P.; BERNARDIS, P. de; FARESE, P.; GANGA, K.; GIACOMETTI, M.; HIVON, E.; HRISTOV, V. V.; IACOANGELI, A.; JAFFE, A. H.; JONES, W. C.; LANGE, A. E.; MARTINIS, L.; MASI, S.; MASON, P.; MAUSKOPF, P. D.; MELCHIORRI, A.; MONTROY, T.; PASCALE, E.; PIACENTINI, F.; POGOSYAN, D.; PONGETTI, F.; PRUNET, S.; ROMEO, G.; RUHL, J. E.; SCARAMUZZI, F. A measurement by boomerang of multiple peaks in the angular power spectrum of the cosmic microwave background. **The Astrophysical Journal**, v. 571, n. 604, 2002. 22
- NOJIRI, S.; ODINTSOV, S. D. Unified cosmic history in modified gravity: From $f(r)$ theory to lorentz non-invariant models. **Physics Reports**, v. 505, n. 59, 2011. 13, 20
- OLUM, K. Superluminal travel requires negative energies. **Physical Review Letters**, v. 81, n. 3567, 1998. 79, 81
- OVERDUIN, J. M.; WESSON, P. S. Dark matter and background light. **Physics Reports**, v. 402, n. 267, 2004. 19, 20
- PADMANABHAN, T. Cosmological constant-the weight of the vacuum. **Physics Reports**, v. 380, n. 235, 2003. 12, 19
- PANNIA, F. A. T.; BERGLIAFFA, S. E. P. Constraining $f(r)$ theories with cosmography. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, v. 1308, n. 030, 2013. 85
- PEEBLES, P. J. E.; RATRA, B. The cosmological constant and dark energy. **Reviews of Modern Physics**, v. 75, n. 559, 2003. 13, 18, 20
- PERLMUTTER, S.; ALDERING, G.; GOLDHABER, G.; KNOP, R. A.; NUGENT, P.; CASTRO, P. G.; DEUSTUA, S.; FABBRO, S.; GOOBAR, A.; GROOM, D. E.; HOOK, I. M.; KIM, A. G.; KIM, M. Y.; LEE, J. C.; NUNES, N. J.; PAIN, R.; PENNYPACKER, C. R.; QUIMBY, R.; LIDMAN, C.; ELLIS, R. S.; IRWIN, M.;

- MCCMAHON, R. G.; RUIZ-LAPUENTE, P.; WALTON, N.; SCHAEFER, B.; BOYLE, B. J.; FILIPPENKO, A. V.; MATHESON, T.; FRUCHTER, A. S.; PANAGIA, N.; NEWBERG, H. J. M.; COUCH, W. J. Measurements of ω and λ from 42 high-redshift supernovae. **The Astrophysical Journal**, v. 517, n. 565, 1999. 12, 19
- PIEDIPALUMBO, E.; MOGLIE, E. D.; CIANCI, R. Updated $f(t)$ gravity constraints from high-redshift cosmography. **International Journal of Modern Physics D**, v. 24, n. 14, 2015. 85
- RANDALL, L.; SUNDRUM, R. An alternative to compactification. **Physical Review Letters**, v. 83, n. 23, 1999. 85
- RANDALL, L.; SUNDRUM, R. Large mass hierarchy from a small extra dimension. **Physical Review Letters**, v. 83, n. 17, 1999. 85
- RAPETTI, D.; ALLENA, S. W.; AMIN, M. A.; BLANDFORD, R. D. A kinematical approach to dark energy studies. **Monthly Notices Royal Astronomical Society**, v. 375, n. 1510, 2007. 23
- RATRA, B.; PEEBLES, P. J. E. Cosmological consequences of a rolling homogeneous scalar field. **Physical Review D**, v. 37, n. 12, 1988. 56, 58
- RIESS, A. G.; FILIPPENKO, A. V.; CHALLIS, P.; CLOCCHIATTI, A.; DIERCKS, A.; GARNAVICH, P. M.; GILLILADN, R. L.; HOGAN, C. J.; JHA, S.; KIRSHNER, R. P.; LEIBUNDGUT, B.; PHILLIPS, M. M.; REISS, D.; SCHMIDT, B. P.; SCHOMMER, R. A.; SMITH, R. C.; SPYROMILIO, J.; STUBBS, C.; SUNTZEFF, N. B.; TONRY, J. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. **The Astronomical Journal**, v. 116, n. 1009, 1998. 12, 19
- SABATTA, V. de; GASPERINI, M. **Introduction to Gravitation**. 1rd. ed. Singapura: World Scientific, 1985. 17, 18, 21, 22
- SAHNI, V.; SAINI, T. D.; STAROBINSKY, A. A.; ALAM, U. Statefinder-a new geometrical diagnostic of dark energy. **Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters**, v. 77, n. 5, 2003. 23, 56
- SENOVILLA, J. Singularity theorems and their consequences. **General Relativity and Gravitation**, v. 29, n. 701, 1997. 81
- SHABANI, H.; FARHOUDI, M. $f(r, t)$ cosmological models in phase space. **Physical Review D**, v. 88, n. 044048, 2013. 47
- SHABANI, H.; FARHOUDI, M. Cosmological and solar system consequences of $f(r, t)$ gravity models. **Physical Review D**, v. 90, n. 044031, 2014. 47
- SHABANI, H.; ZIAIE, A. H. Late-time cosmological evolution of a general class of $f(r, t)$ gravity with minimal curvature-matter coupling. **The European Physical Journal C**, v. 77, n. 507, 2017. 47, 49
- SHABANI, H.; ZIAIE, A. H. Interpretation of $f(r, t)$ gravity in terms of a conserved effective fluid. **International Journal of Modern Physics A**, v. 33, n. 8, 2018. 47

- SHARIF, M.; ZUBAIR, M. Energy conditions constraints and stability of power law solutions in $f(r,t)$ gravity. **Journal of the Physical Society of Japan**, v. 82, n. 1, 2012. 70, 71
- SHARIF, M.; ZUBAIR, M. Reconstruction and stability of $f(r, t)$ gravity with ricci and modified ricci dark energy. **Astrophysics and Space Science**, v. 349, n. 529, 2014. 47
- SINGH, V.; SINGH, C. P. Friedmann cosmology with matter creation in modified $f(r, t)$ gravity. **International Journal of Theoretical Physics**, v. 55, n. 1257, 2016. 14, 47, 51
- SOTIRIOU, T. P.; FARAONI, V. $f(r)$ theories of gravity. **Reviews of Modern Physics**, v. 82, n. 451, 2010. 37, 38, 44, 83
- STAROBINSKY, A. A. A new type of isotropic cosmological models without singularity. **Physics Letters**, v. 91B, n. 1, 1980. 62
- STAROBINSKY, A. A. Disappearing cosmological constant in $f(r)$ gravity. **Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters**, v. 86, n. 3, 2007. 62
- STOMPOR, R.; ABROE, M.; ADE, P.; BALBI, A.; BARBOSA, D.; BOCK, J.; BORRILL, J.; BOSCALERI, A.; BERNARDIS, P. de; FERREIRA, P. G.; HANANY, S.; HRISTOV, V.; JAFFE, A. H.; LEE, A. T.; PASCALE, E.; RABII, B.; RICHARDS, P. L.; SMOOT, G. F.; WINANT, C. D.; WU, J. H. P. Cosmological implications of the maxima-1 high-resolution cosmic microwave background anisotropy measurement. **The Astrophysical Journal**, v. 561, n. L7, 2001. 22
- VELTEN, H.; CARAMÊS, T. R. P. Cosmological inviability of $f(r, t)$ gravity. **Physical Review D**, v. 95, n. 123536, 2017. 49
- VISSER, M. Traversable wormholes from surgically modified schwarzschild spacetimes. **Nuclear Physics B**, v. 311, n. 203, 1989. 78, 81
- VISSER, M. Traversable wormholes: Some simple examples. **Physical Review D**, v. 39, n. 3182, 1989. 78, 81
- VISSER, M. **Lorentzian Wormholes: From Einstein to Hawking**. 2rd. ed. New York: American Institute of Physics Press, 1996. 79, 80, 81
- VISSER, M. Cosmography: Cosmology without the einstein equations. **General Relativity and Gravitation**, v. 37, n. 1541, 2005. 14, 21, 22, 36
- WALD, R. M. **General Relativity**. 1rd. ed. Chicago: (University of Chicago Press, 1984. 67
- WEINBERG, S. **Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of The General Theory of Relativity**. 1rd. ed. New York: Jhon Willey & Sons, 1972. 14, 17, 18, 21, 24, 25, 28, 33, 36
- WEINBERG, S. The cosmological constant problem. **Reviews of Modern Physics**, v. 61, n. 1, 1989. 13, 18, 20, 21, 22
- WOODARD, R. Avoiding dark energy with $1/r$ modifications of gravity. In: _____. **The Invisible Universe: Dark Matter and Dark Energy**. Berlin: Springer, 2007. p. 403–433. 41, 50

XU, M.-X.; HARKO, T.; LIANG, S.-D. Quantum cosmology of $f(r, t)$ gravity. **The European Physical Journal C**, v. 76, n. 449, 2016. 14, 44, 47

ZAREGONBADI, R.; FARHOUDI, M.; RIAZI, N. Dark matter from $f(r, t)$ gravity. **Physical Review D**, v. 94, n. 084052, 2016. 47

ZLATEV, I.; WANG, L.; STEINHARDT, P. J. Quintessence, cosmic coincidence, and the cosmological constant. **Physical Review Letters**, v. 82, n. 5, 1999. 56, 58

FOLHA DE REGISTRO DO DOCUMENTO

1. CLASSIFICAÇÃO/TIPO TD	2. DATA 01 de agosto de 2023	3. DOCUMENTO N° DCTA/ITA/TD-029/2023	4. N° DE PÁGINAS 95
5. TÍTULO E SUBTÍTULO: COSMOGRAFIA DAS TEORIAS $f(R, T)$ DE GRAVIDADE MODIFICADA			
6. AUTORA(ES): Iolanda dos Santos Farias			
7. INSTITUIÇÃO(ÕES)/ÓRGÃO(S) INTERNO(S)/DIVISÃO(ÕES): Instituto Tecnológico de Aeronáutica – ITA			
8. PALAVRAS-CHAVE SUGERIDAS PELA AUTORA: Cosmografia; Gravitação; Cosmologia.			
9. PALAVRAS-CHAVE RESULTANTES DE INDEXAÇÃO: Cosmologia; Gravidade; Universo; Física; Física nuclear.			
10. APRESENTAÇÃO: (X) Nacional () Internacional ITA, São José dos Campos. Curso de Doutorado. Programa de Pós-Graduação em Física. Área de Física Nuclear. Orientador: Prof. D. Pedro Henrique Ribeiro da Silva Moraes. Defesa em 13/07/2023. Publicada em 2023.			
11. RESUMO: <p>A descoberta da expansão acelerada do Universo colocou o Modelo Padrão da Cosmologia diante de enormes desafios teóricos, que têm nos chamados “problemas da constante cosmológica” e “da coincidência” seus principais representantes. A dificuldade do modelo ΛCDM em explicar tais problemas abriu espaço para o desenvolvimento de teorias de gravidade modificada, que buscam uma forma alternativa à Relatividade Geral de Einstein para explicar os principais enigmas cósmicos. Contudo, nos últimos anos, esses cenários alternativos se tornaram tão numerosos que o surgimento de técnicas que sejam independentes do modelo e que, ao mesmo tempo, ajudem a discriminar entre eles se tornou algo imprescindível. A Cosmografia, como o estudo cinemático do Universo, talvez seja a maior representante dessa classe de técnicas. Este trabalho tem como principal objetivo obter a cosmografia das teorias de gravidade modificada $f(R, T)$, com o intuito de oferecer uma ferramenta observacional para selecionar modelos cosmologicamente viáveis.</p>			
12. GRAU DE SIGILO: (X) OSTENSIVO () RESERVADO () SECRETO			