

Dissertação apresentada à Pró-Reitoria de Pós-Graduação do Instituto Tecnológico de Aeronáutica, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestra em Ciências no Programa de Pós-Graduação em Física, Área de Física Nuclear.

Adla Medeiros Rosa

**DESCRIÇÃO DE ESTRELAS DE NÊUTRONS A PARTIR DO
METAMODELO**

Dissertação aprovada em sua versão final pelos abaixo assinados:



Prof. Dr. Odilon Lourenço da Silva Filho
Orientador

Campo Montenegro
São José dos Campos, SP – Brasil
2026

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

Divisão de Informação e Documentação

Rosa, Adla Medeiros Rosa

Descrição de Estrelas de Nêutrons a partir do Metamodelo / Adla Medeiros Rosa.

São José dos Campos, 2026.

66f.

Dissertação de mestrado – Curso de Pós Graduação em Física. Área de Física Nuclear – Instituto Tecnológico de Aeronáutica, 2026. Orientadores: Prof. Dr. Odilon Lourenço da Silva Filho.

1. Estrelas de nêutrons. 2. Metamodelos. 3. Equações de estado. 4. Matéria nuclear. 5. Diagramas. 6. Física nuclear. 7. Física I. Instituto Tecnológico de Aeronáutica. II. Descrição de Estrelas de Nêutrons a partir do Metamodelo

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

ROSA, Adla Medeiros. **Descrição de Estrelas de Nêutrons a partir do Metamodelo**. 2026. 66f. Dissertação de mestrado em Física Nuclear – Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos.

CESSÃO DE DIREITOS

NOME DO AUTOR: Adla Medeiros Rosa

TÍTULO DO TRABALHO: Descrição de Estrelas de Nêutrons a partir do Metamodelo.

TIPO DO TRABALHO/ANO: Dissertação / 2026

É concedida ao Instituto Tecnológico de Aeronáutica permissão para reproduzir cópias desta dissertação e para emprestar ou vender cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta dissertação pode ser reproduzida sem a sua autorização (do autor).

Adla Medeiros Rosa

Rua República do Líbano, 385

12216-590, São José dos Campos-SP

DESCRIÇÃO DE ESTRELAS DE NÊUTRONS A PARTIR DO METAMODELO

Adla Medeiros Rosa

Composição da Banca Examinadora:

Prof. Dr.	Franciole da Cunha Marinho	Presidente	-	ITA
Prof. Dr.	Odilon Lourenço da Silva Filho	Orientador	-	ITA
Prof. Dr ^a .	Laura Paulucci Marinho	Membro Interno	-	ITA
Prof. Dr ^a .	Carolina Loureiro Benone	Membro Externo	-	UFPA

ITA

Dedico essa dissertação aos meus pais Ailton e Guelda e à minha avó Gisala, meus maiores incentivadores.

Agradecimentos

Primeiramente, gostaria de agradecer a Deus por ter me capacitado para entrar no mestrado e cursá-lo, aos meus pais que sempre me motivaram, apoiaram e acreditaram em mim.

Aos meus amigos e amigas da graduação, Maurício, Raynara e Wellington e aos amigos da pós graduação que cursaram disciplinas comigo e me ajudaram com elas.

A minha amiga Thais que me ajudou na tradução dos textos científicos que serviram para este trabalho e que sempre está ao meu lado, nos momentos bons e ruins.

Agradeço ao Wesley Spalenza pelo apoio e por me acompanhar desde quando eu era aluna do ensino médio, obrigada por tudo.

Ao doutorando e amigo Giovani Voloski que me ajudou a desenvolver alguns códigos em python e esteve comigo nos momentos de ansiedade e desespero. A Maria minha amiga.

Ao Prof. Dr. Odilon Lourenço que é meu orientador, obrigada pela orientação e confiança depositada na realização deste trabalho.

Ao ITA e aos funcionários dessa instituição de ensino renomada e acolhedora.

Agradeço a CAPES pelo fomento da bolsa de mestrado e ao apoio à pós-graduação.

“A gravidade explica os movimentos dos planetas, mas não pode explicar quem colocou os planetas em movimento. Deus governa todas as coisas e sabe tudo que é ou que pode ser feito.”

— ISAAC NEWTON

Resumo

Esta dissertação tem como conteúdo o estudo da equação de estado da matéria nuclear densa e suas implicações na estrutura de estrelas de nêutrons a partir do metamodelo, construído a partir da expansão da densidade de energia em torno da densidade de saturação da matéria nuclear simétrica, permitindo associar de forma direta cada termo da expansão aos parâmetros empíricos nucleares, como a incompressibilidade, a energia de simetria e suas derivadas. Essa formulação possibilita analisar de forma independente como as variações de tais parâmetros afetam algumas propriedades macroscópicas das estrelas de nêutrons. A partir da equação de estado construída pelo metamodelo, incluindo as contribuições cinética e potencial, as equações de Tolman-Oppenheimer-Volkoff foram resolvidas numericamente, resultando em diagramas massa-raio para diferentes combinações dos parâmetros empíricos. Observou-se que os parâmetros isoescalares, como a incompressibilidade K_{sat} e o skewness Q_{sat} , influenciam principalmente a massa máxima das estrelas, enquanto os parâmetros isovetoriais, em especial a inclinação da energia de simetria L_{sym} e a curvatura K_{sym} , influenciam de forma mais sensível os seus raios. As soluções obtidas mostraram boa concordância com os vínculos observacionais astrofísicos atuais, incluindo os advindos da missão NICER e do evento GW170817 relacionado à emissão de ondas gravitacionais oriundas da coalescência de estrelas de nêutrons.

Abstract

This work focuses on the study of the equation of state of dense nuclear matter and its implications for the structure of neutron stars, based on the metamodel constructed through the expansion of the energy density around the saturation density of symmetric nuclear matter. This formulation allows each term of the expansion to be directly associated with nuclear empirical parameters, such as the incompressibility, the symmetry energy, and their derivatives. It thus enables an independent analysis of how variations in these parameters affect macroscopic properties of neutron stars. From the equation of state obtained with the metamodel, including both kinetic and potential contributions, the Tolman–Oppenheimer–Volkoff equations were solved numerically, resulting in mass–radius diagrams for different combinations of the empirical parameters. It was observed that the isoscalar parameters, such as the incompressibility K_{sat} and the skewness Q_{sat} , mainly influence the maximum stellar mass, whereas the isovector parameters, especially the slope of the symmetry energy L_{sym} and the curvature K_{sym} , have a more pronounced effect on the stellar radii. The obtained solutions show good agreement with current astrophysical observational constraints, including those from the NICER mission and from the GW170817 event, associated with the emission of gravitational waves arising from the neutron stars merger.

Lista de Figuras

FIGURA 2.1 – Três primeiros estados estacionários do poço quadrado infinito em uma dimensão. Figura extraída de (GRIFFITHS, 2018).	22
FIGURA 2.2 – Espaço tridimensional das componentes do vetor de onda.	25
FIGURA 2.3 – Octante de uma camada esférica no espaço k . Figura extraída de (GRIFFITHS, 2018).	26
FIGURA 3.1 – Energia por partícula do metamodelo em função da razão ρ/ρ_{sat} para diferentes valores da fração de prótons y	43
FIGURA 3.2 – Pressão do metamodelo em função da razão ρ/ρ_{sat} para diferentes valores da fração de prótons y	44
FIGURA 3.3 – Potencial químico de prótons do metamodelo em função da razão ρ/ρ_{sat} para diferentes valores da fração de prótons y	44
FIGURA 3.4 – Potencial químico de nêutrons do metamodelo em função da razão ρ/ρ_{sat} para diferentes valores da fração de prótons y	45
FIGURA 5.1 – Diagramas massa-raio construídos a partir do metamodelo para parametrizações com diferentes valores de K_{sat}	52
FIGURA 5.2 – Diagramas massa-raio construídos a partir do metamodelo para parametrizações com diferentes valores de Q_{sat}	53
FIGURA 5.3 – Diagramas massa-raio construídos a partir do metamodelo para parametrizações com diferentes valores de Z_{sat}	53
FIGURA 5.4 – Diagramas massa-raio construídos a partir do metamodelo para parametrizações com diferentes valores de E_{sym}	54
FIGURA 5.5 – Diagramas massa-raio construídos a partir do metamodelo para parametrizações com diferentes valores de L_{sym}	54
FIGURA 5.6 – Diagramas massa-raio construídos a partir do metamodelo para parametrizações com diferentes valores de K_{sym}	55

-
- FIGURA 5.7 – Diagramas massa-raio construídos a partir do metamodelo para parametrizações com diferentes valores de Q_{sym} 56
- FIGURA 5.8 – Diagramas massa-raio construídos a partir do metamodelo para parametrizações com diferentes valores de Z_{sym} 56

Lista de Abreviaturas e Siglas

BPS	Baym, Pethick e Sutherland
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
ELFc	Energy functional with Low-density correction, versão c
EOS	Equation of State
ISS	International Space Station
MNS	Matéria Nuclear Simétrica
NN	Nucleon-Nucleon
NICER	Neutron star interior composition explorer
PSR	Pulsating Source of Radio
RMF	Relativistic mean-field
TOV	Tolman-Oppenheimer-Volkoff

Lista de Símbolos

ρ_{sat}	Densidade de saturação
ρ_p	Densidade de prótons
ρ_n	Densidade de nêutrons
E_{sat}	Energia de saturação
K_{sat}	Incompressibilidade (módulo de compressão)
Q_{sat}	Skewness isoescalar
Z_{sat}	Kurtosis isoescalar
m_{sat}^*/m	Mssa efetiva do nucleon
E_{sym}	Energia de simetria
L_{sym}	Inclinação da energia de simetria
K_{sym}	Curvatura da energia de simetria
Q_{sym}	Skewness isovetorial
Z_{sym}	Kurtosis isovetorial
T	Temperatura
e_{is}	Energia isoescalar
e_{iv}	Energia isovetorial
$V(x)$	Potencial
E_{Tot}	Energia Total
$\psi(x)$	Função de onda
δ_{mn}	Delta de Kronecker
k_F	Momento de Fermi
E_F	Energia de Fermi
γ	Fator de degenerescência
\mathcal{E}	Densidade de energia
P	Pressão
m_p^*	Massa efetiva de prótons
m_n^*	Massa efetiva de nêutrons
y	Fração de prótons
\mathcal{E}^*_{kin}	Densidade de energia cinética
E^*_{kin}	Energia cinética total

P_{kin}^*	Pressão cinética
P^*kin, n	Pressão cinética de nêutrons
$P_{kin,p}^*$	Pressão cinética de prótons
$\mu_{kin,p}^*$	Potencial cinético de prótons
$\mu_{kin,n}^*$	Potencial cinético de nêutrons
μ'_p	Potencial linha de prótons
μ'_n	Potencial linha de nêutrons
V	Volume
P	Pressão
E	Energia
N_i	Número de partícula
E_{pot}	Energia total potencial
\mathcal{E}_{pot}	Densidade de energia potencial
P_{pot}	Pressão potencial
$\mu_{pot,p}$	Potencial químico potencial de prótons
$\mu_{pot,n}$	Potencial químico potencial de nêutrons
v_{sat}	v de saturação
v_{sym}	v de simetria
u_j	Função u_j
b_{sat}	b de saturação
b_{sym}	b de simetria
$\xi(\delta)$	Função $\xi(\delta)$
Δm_{sat}^*	Variação da massa efetiva de saturação
m_μ	massa dos múons
\mathcal{E}_{crosta}	Densidade de energia da crosta
\mathcal{E}_{mm}	Densidade de energia do metamodelo
P_{crosta}	Pressão da crosta
P_{mm}	Pressão do metamodelo

Sumário

1	INTRODUÇÃO	16
2	MODELO DO GÁS DE FERMI	19
2.1	Poço quadrado infinito (1D)	20
2.2	Gás de elétrons livres (3D)	23
2.3	Gás de nucleons (parte cinética)	28
3	METAMODELO	30
3.1	Parte cinética	30
3.1.1	Densidade de energia e energia por partícula	31
3.1.2	Pressão	32
3.1.3	Potenciais químicos	33
3.2	Parte potencial	37
3.2.1	Densidade de energia e energia por partícula	37
3.2.2	Pressão	38
3.2.3	Potenciais químicos	39
3.3	Forma completa	40
4	ESTRELAS DE NÊUTRONS	46
4.1	Pulsares	46
4.2	Teoria envolvida	48
4.3	Estrutura	48
5	DIAGRAMAS MASSA-RAIO OBTIDOS PELO METAMODELO	51
6	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	57

REFERÊNCIAS	59
APÊNDICE A – RELAÇÕES ÚTEIS	63
A.1 Derivadas em relação a ρ_p e ρ_n	63
A.2 Cálculo da parte potencial do metamodelo	63
APÊNDICE B – AS EQUAÇÕES DE TOLMAN-OPPENHEIMER-VOLKOFF (TOV)	65

1 Introdução

Estrelas com massas superiores a aproximadamente oito massas solares ($8M_{\odot}$) percorrem uma sequência de fases de fusão nuclear iniciando com a queima de hidrogênio em hélio e avançando para elementos mais pesados como o ferro. O ferro tem uma energia de ligação por nucleon¹ elevada (a maior de todas), marcando o limite do processo da fusão exoenergética, que consiste na fusão de dois núcleos atômicos leves que resulta num núcleo mais pesado, liberando uma grande quantidade de energia. Quando o núcleo estelar acumula ferro, a produção de energia por fusão é cessada e o equilíbrio hidrostático da estrela é rompido. O resultado consiste no colapso gravitacional do núcleo, frequentemente acompanhado por uma supernova. O remanescente desse processo pode ser uma estrela de nêutrons ou um buraco negro, dependendo da massa final do núcleo (SHAPIRO; TEUKOLSKY, 1983). Estrelas de nêutrons, apesar do nome sugestivo, são compostas também por outros hádrons (partículas compostas por quarks ligados pela interação forte), tais como prótons. Sua crosta superficial contém também elétrons, núcleos, dentre outros componentes. Além disso, esses objetos astrofísicos possuem massas típicas entre $1,1M_{\odot}$ e $2M_{\odot}$, confinadas em raios de ordem de 10 km a 14 km, implicando em densidades centrais que podem ultrapassar algumas vezes a densidade de saturação nuclear. Nesta condição extrema de densidade, a matéria se encontra em um regime inatingível em laboratórios, com a possibilidade de surgimento de novos graus de liberdade como híperons e/ou quarks desconfinados. A equação de estado (EOS) da matéria densa (LATTIMER; PRAKASH, 2016) é uma peça fundamental que conecta a microfísica das partículas sujeitas a interação forte às propriedades macroscópicas de estrelas de nêutrons fornecidas, por exemplo, por missões como a NICER (Neutron Star Interior Composition Explorer) promovida pela NASA, que consiste na observação de estrelas compactas a partir de um telescópio de raios X instalado na Estação Espacial Internacional (GENDREAU; ARZOU-MANIAN, 2017).

Ao longo do tempo, foram empregadas diferentes abordagens para modelar a matéria nuclear e assim obter suas equações de estado (EOSs). Dentre os modelos fenomenológicos não relativísticos, destacam-se os modelos de Skyrme (SKYRME, 1956) e de Gogny (DE-CHARGÉ; GOGNY, 1980), nos quais a energia total do sistema é descrita como uma função

¹Prótons ou nêutrons.

apenas da densidade nuclear no caso da matéria nuclear simétrica. No contexto relativístico, há também os chamados modelos relativísticos de campo médio (RMF, do inglês Relativistic Mean-Field), baseados em Teoria Quântica de Campos e construídos a partir de densidades lagrangianas que supõem, na maioria das vezes, interações entre os férmions mediadas por mésons escalares e vetoriais, cuja intensidade pode ser constante ou dependente do meio. Para um estudo sistemático de um conjunto grande de parametrizações de dois dos modelos citados acima (Skyrme e RMF), indicamos ao leitor os trabalhos da referências (DUTRA *et al.*, 2012; DUTRA *et al.*, 2014). Outra forma de descrição da matéria nuclear é através do uso de cálculos de primeiros princípios (*ab initio*), que têm como ponto de partida interações nucleônicas realistas ajustadas por dados de espalhamento nucleon-nucleon (NN). Métodos como Quantum Monte Carlo (CARLSON *et al.*, 2014), self-consistent Greens Functions (SOMÀ, 2020) e In-Medium Similarity Renormalization Group (HERGERT, 2017), também permitem investigar as propriedades da matéria nuclear. No entanto, tais abordagens permanecem limitadas a densidades próximas da densidade de saturação ou até no máximo duas vezes este valor, o que faz necessária a extrapolação para o regime de altas densidades, relevantes para o estudo de estrelas de nêutrons (HEBELER *et al.*, 2015).

No trabalho (MARGUERON *et al.*, 2018a; MARGUERON *et al.*, 2018b), os autores propuseram a descrição da matéria nuclear através do chamado metamodelo. A fundamentação teórica deste modelo foi inspirada na expansão de Taylor em torno da densidade de saturação da matéria nuclear simétrica (ρ_{sat}). A partir desta perspectiva, sua densidade de energia, que depende da densidade total ρ , do parâmetro de assimetria do sistema e da temperatura T , é escrita como a soma da parte cinética (versão não relativística) e de uma parte potencial, que por sua vez é expressa como uma expansão no parâmetro $x = (\rho - \rho_{sat})/(3\rho_{sat})$ em torno de $x = 0$, truncada em uma ordem N qualquer. A vantagem de se construir um modelo desta forma é a possibilidade de poder ajustá-lo para reproduzir modelos hadrônicos da categoria *ab initio*, ou fenomenológicos. Foi mostrado em (MARGUERON *et al.*, 2018a) que diferentes modelos hadrônicos não relativísticos e também relativísticos são muito bem reproduzidos quando se usa a expansão em ordem $N = 4$, por exemplo, ou seja, o metamodelo pode ser usado para substituir modelos mais sofisticados sem perda de suas principais características. Os coeficientes presentes no metamodelo são dados por combinações lineares dos parâmetros de bulk da matéria nuclear, que por sua vez são obtidos em $T = 0$ a partir de derivadas sucessivas com relação a x em torno de $x = 0$ (i) da energia por partícula da matéria simétrica (setor isoscalar: ρ_{sat} , E_{sat} , K_{sat} , Q_{sat} , Z_{sat}) e, (ii) da energia de simetria do sistema (setor isovetorial: E_{sym} , L_{sym} , K_{sym} , Q_{sym} , Z_{sym}). Ainda, uma das vantagens deste tipo de modelo é a não correlação prévia dos parâmetros de bulk, o que torna possível, para um determinado sistema nuclear, tais como a matéria que descreve uma estrela de nêutrons, por exemplo, a investigação da real influência de cada um destes parâmetros independentemente dos

demais.

Esta dissertação tem como objetivo central o estudo da EOS da matéria nuclear densa por meio do metamodelo e aplicação desta estrutura teórica na análise da física de estrelas de nêutrons. Para atingir esse propósito geral, foram estabelecidos alguns objetivos específicos, que se complementam de forma progressiva. Em primeiro lugar, estudamos a termodinâmica do metamodelo, apresentando sua formulação matemática e a relação direta entre a expansão em torno da densidade de saturação e os parâmetros de bulk (ou parâmetros empíricos nucleares). Esse passo inicial foi fundamental para construir uma base sólida, na qual grandezas como energia por partícula, pressão e potenciais químicos de prótons e nêutrons puderam ser obtidas de forma sistemática e fisicamente consistente. A próxima análise consistiu na descrição das estrelas de nêutrons a partir do metamodelo, que foi usado para estudar a influência dos parâmetros de bulk no diagrama massa-raio das estrelas, verificando quais deles são os mais relevantes. Todo o estudo foi organizado da seguinte forma: No Capítulo 2 abordamos o modelo do gás de Fermi, dando como exemplos o gás de elétrons e o gás de nucleons (prótons ou nêutrons), este último sendo aplicado na formulação do metamodelo. O Capítulo 3 mostra a termodinâmica do metamodelo propriamente dito, com suas expressões para energia, pressão e potenciais químicos, estabelecendo a base teórica do metamodelo. O Capítulo 4 descreve as estrelas de nêutrons. No Capítulo 5 apresentamos os diagramas massa-raio obtidos a partir do metamodelo e investigamos o impacto dos parâmetros de bulk nestes diagramas. Finalmente, no Capítulo 6 apresentamos as conclusões. Para complementar o trabalho, incluímos um apêndice onde estão detalhadas as derivadas utilizadas no desenvolvimento das expressões do Capítulo 3 e um apêndice que mostra as equações de Tolman-Oppenheimer-Volkoff, que governam o equilíbrio hidrostático das estrelas compactas.

2 Modelo do gás de Fermi

A força nuclear é responsável por manter prótons e nêutrons ligados no interior dos núcleos atômicos. Essa interação ocorre por meio da troca de mésons entre os nucleons (WALECKA, 2004). Diferentemente do caso da interação eletromagnética, que possui uma formulação única e bem definida, não existe uma descrição única e completa da interação nuclear. Por isso, diversos modelos teóricos e fenomenológicos foram desenvolvidos (e continuam sendo propostos) com o objetivo de reproduzir de forma precisa os observáveis da física nuclear (SKYRME, 1956; DUTRA *et al.*, 2014).

De modo geral, parte-se da proposição de uma interação cujos parâmetros livres são ajustados para reproduzir os dados experimentais conhecidos de sistemas de dois nucleons, tanto em estados ligados (de energia negativa) quanto em processos de espalhamento (de energia positiva). Uma vez obtido esse ajuste, a mesma interação pode ser utilizada para calcular propriedades de núcleos leves e pesados, bem como da matéria nuclear e das estrelas de nêutrons. Na astrofísica, em particular, a modelagem de estrelas de nêutrons depende diretamente da equação de estado, que relaciona grandezas termodinâmicas associadas aos nucleons. Nesse contexto, considera-se satisfatório um modelo hadrônico capaz de descrever de forma consistente os diversos núcleos finitos, a matéria nuclear infinita, e os observáveis astrofísicos disponíveis.

Geralmente, a densidade de energia de um modelo hadrônico é composta por um termo cinético e um termo potencial, que contém em grande parte a informação da interação nuclear proposta. Como os nucleons são férmions, ou seja, objetos de spin semi-inteiro, pode-se descrever o modelo hadrônico como um gás de Fermi. Em particular, o termo cinético corresponde a um gás de Fermi não interagente, que representa um modelo ideal no qual um conjunto de partículas, obedecendo à estatística de Fermi–Dirac, é considerado não interagente e confinado em um potencial externo. Nesse regime, as partículas seguem o princípio de exclusão de Pauli, que impede que duas delas ocupem simultaneamente o mesmo estado quântico (PAULI, 1925). A estatística que fundamenta esse modelo foi formulada em 1926 pelo físico italiano Enrico Fermi, em paralelo com Paul Dirac (DIRAC, 1926), como uma generalização da mecânica estatística clássica para partículas indistinguíveis com spin semi-inteiro (FERMI, 1926).

O gás de Fermi possui aplicações amplas em diferentes contextos físicos. No caso da física nuclear, o núcleo atômico é descrito como um sistema de férmions confinados, no qual a energia de Fermi estabelece a escala para processos de excitação e decaimento (SCHUCK; RING, 1980). Em astrofísica, o modelo é essencial para explicar a estabilidade das anãs brancas e das estrelas de nêutrons, em que a pressão de degenerescência eletrônica ou bariônica se opõe ao colapso gravitacional (SHAPIRO; TEUKOLSKY, 1983).

Apesar de sua simplicidade, o gás de Fermi fornece previsões quantitativas muito boas em diversos regimes de densidade. Por isso, quase um século após sua formulação, o modelo continua sendo uma ferramenta conceitual poderosa em várias áreas da física teórica e aplicada. Neste capítulo, apresentaremos os fundamentos do modelo de gás de Fermi não interagente e sua aplicação, por exemplo, ao caso do gás de elétrons. Em seguida, mostraremos como ele pode ser utilizado para descrever um gás de nucleons livres.

2.1 Poço quadrado infinito (1D)

Começaremos apresentando o poço quadrado infinito em uma dimensão. A teoria usada na solução da equação de Schrödinger independente do tempo (estados estacionários) nesse caso é aplicada diretamente na construção do gás de Fermi não interagente em três dimensões. Esta subseção foi baseada em (GRIFFITHS, 2018).

Considere o potencial dado por

$$V(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq a, \\ \infty, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.1)$$

Uma partícula nesse potencial está completamente livre, exceto nas duas extremidades ($x = 0$) e ($x = a$), onde uma força infinita a impede de escapar. Fora do poço temos que $\psi(x) = 0$, ou seja, a probabilidade de encontrar a partícula ali é zero. Dentro do poço, onde $V(x) = 0$, a equação de Schrödinger independente do tempo é dada por,

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} = E\psi, \quad (2.2)$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -k^2\psi, \quad (2.3)$$

com $k \equiv \sqrt{2mE}/\hbar$. A solução geral desta equação para $E > 0$ é

$$\psi(x) = A \sin(kx) + B \cos(kx), \quad (2.4)$$

onde A e B são constantes arbitrárias. $\psi(x)$ e $\frac{d\psi}{dx}$ são contínuos, porém, quando o potencial tende ao infinito apenas a primeira condição se aplica.

A continuidade de $\psi(x)$ implica em

$$\psi(0) = \psi(a) = 0. \quad (2.5)$$

Então, temos que

$$\psi(0) = A \sin 0 + B \cos 0 = B, \quad (2.6)$$

portanto, $B = 0$, o que leva a

$$\psi(x) = A \sin kx. \quad (2.7)$$

Logo, $\psi(a) = A \sin(ka)$ de modo que ou $A = 0$ ou então $\sin(ka) = 0$, o que significa que

$$ka = 0, \pm\pi, \pm2\pi, \pm3\pi, \dots \quad (2.8)$$

Porém, note que $k = 0$ não nos interessa, pois implicaria $\psi = 0$. Ainda, as soluções negativas não trazem nada de novo, já que $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$ e podemos absorver o sinal negativo em A . Portanto,

$$k_n = \frac{n\pi}{a}, \quad \text{com } n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.9)$$

Note então que a condição de contorno em $x = a$ não determina a constante A e sim a constante k e, conseqüentemente, os possíveis valores de E , dados por

$$E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2}. \quad (2.10)$$

Veja que no domínio quântico, uma partícula no poço quadrado infinito necessariamente assume um desses valores possíveis (permitidos) de energia.

Para encontrar a constante A usamos a condição de normalização da função de onda:

$$\int_0^a |A|^2 \sin^2(kx) dx = |A|^2 \frac{a}{2} = 1, \quad \text{então } |A|^2 = \frac{2}{a}. \quad (2.11)$$

Logo, $A = \sqrt{2/a}$. Note que escolhemos a raiz real positiva já que a fase de A não possui nenhum significado físico. Dentro do poço, as soluções são então dadas por

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right). \quad (2.12)$$

Note que a equação de Schrödinger independente do tempo fornece um conjunto infinito de soluções, uma para cada número inteiro positivo n . As primeiras dessas soluções estão representadas na Figura (2.1).

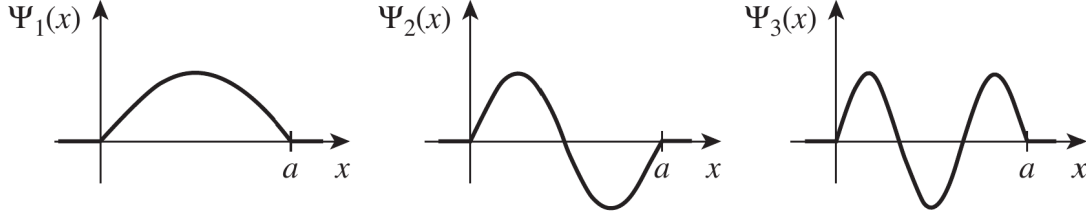


FIGURA 2.1 – Três primeiros estados estacionários do poço quadrado infinito em uma dimensão. Figura extraída de (GRIFFITHS, 2018).

Elas se parecem com as ondas estacionárias em uma corda de comprimento a . A função de onda ψ_1 está associada com o estado de menor energia, chamado de estado fundamental, enquanto que as demais, ψ_n , são relacionadas com os chamados estados excitados, cujas energias aumentam proporcionalmente com n^2 . Além disso, temos que as funções ψ_n são alternadamente pares e ímpares em relação ao centro do poço. Temos também que, na medida em que a energia aumenta, cada estado sucessivo possui um nó a mais. Ainda, as funções ψ_n são mutuamente ortogonais, ou seja, atendem a

$$\begin{aligned}
 \int \psi_m(x)^* \psi_n(x) dx &= \frac{2}{a} \int_0^a \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx \\
 &= \frac{1}{a} \int_0^a \left[\cos\left(\frac{(m-n)\pi}{a}x\right) - \cos\left(\frac{(m+n)\pi}{a}x\right) \right] dx \\
 &= \left\{ \frac{1}{(m-n)\pi} \sin\left(\frac{(m-n)\pi}{a}x\right) - \frac{1}{(m+n)\pi} \sin\left(\frac{(m+n)\pi}{a}x\right) \right\} \Bigg|_0^a \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin[(m-n)\pi]}{(m-n)} - \frac{\sin[(m+n)\pi]}{(m+n)} \right] = 0, \tag{2.13}
 \end{aligned}$$

para $m \neq n$. Para $m = n$ este cálculo não funciona. Nesse caso, a normalização diz que a integral deve ser igual a 1. Dessa forma, é possível combinar a ortogonalidade e a condição de normalização em uma só relação, dada por

$$\int \psi_m(x)^* \psi_n(x) dx = \delta_{mn}, \tag{2.14}$$

onde a função delta de Kronecker, δ_{mn} , é definida por

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 1, & m = n. \end{cases} \tag{2.15}$$

As funções ψ são ditas também serem completas, pois qualquer outra função $f(x)$

pode ser expressa como uma combinação linear delas:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right). \quad (2.16)$$

A Eq. (2.16) é a chamada de série de Fourier da função $f(x)$ e o fato de que qualquer função pode ser expandida desta forma é chamado de Teorema de Dirichlet. Os coeficientes c_n podem ser obtidos para uma dada função $f(x)$ da seguinte maneira:

$$\int \psi_m^*(x) f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int \psi_m(x)^* \psi_n(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \delta_{mn} = c_m. \quad (2.17)$$

Perceba que o delta de Kronecker anula todos os termos na soma, exceto aquele para o qual $n = m$. Assim, o n -ésimo coeficiente na expansão de $f(x)$ é,

$$c_n = \int \psi_n^*(x) f(x) dx. \quad (2.18)$$

Note que as funções de onda satisfazem quatro propriedades. São elas: i) são alternadamente par e ímpar em relação ao centro do poço; ii) conforme a energia aumenta, cada estado ganha mais um nó; iii) são mutuamente ortogonais e iv) são completas. Estas propriedades não são peculiares ao poço quadrado infinito. A primeira é verdadeira sempre que o próprio potencial é uma função simétrica; a segunda é universal, independentemente da forma do potencial. A ortogonalidade também é bastante geral. A completude vale para a maioria dos potenciais.

2.2 Gás de elétrons livres (3D)

Tratemos agora de um sistema mais realista, mais especificamente, elétrons em um objeto sólido tridimensional. Consideremos a teoria do gás de elétrons livres de Sommerfeld (SOMMERFELD, 1928), que desconsidera as interações repulsivas elétron-elétron e os trata como partículas livres confinadas em uma caixa, isto é, o análogo tridimensional do poço quadrado infinito unidimensional apresentado na subseção anterior. Novamente, usamos como base a referência (GRIFFITHS, 2018).

Suponha que o objeto em questão seja um sólido retangular de dimensões L_x, L_y, L_z e que um elétron em seu interior não esteja sujeito a nenhuma força, exceto nas paredes

impenetráveis. Nesse caso, o potencial ao qual os elétrons estão submetidos é dado por

$$V(x, y, z) = \begin{cases} 0, & 0 < x < L_x, 0 < y < L_y, 0 < z < L_z; \\ \infty, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.19)$$

A equação de Schrödinger independente do tempo é escrita como

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi = E \psi. \quad (2.20)$$

Usando o método de separação de variáveis, temos $\psi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$ que leva a

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 X}{dx^2} = E_x X, \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 Y}{dy^2} = E_y Y, \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 Z}{dz^2} = E_z Z, \quad (2.21)$$

onde $E = E_x + E_y + E_z$. Ainda, definindo

$$k_x = \frac{\sqrt{2mE_x}}{\hbar}, \quad k_y = \frac{\sqrt{2mE_y}}{\hbar}, \quad k_z = \frac{\sqrt{2mE_z}}{\hbar}, \quad (2.22)$$

obtemos as seguintes soluções gerais

$$X(x) = A_x \sin(k_x x) + B_x \cos(k_x x), \quad (2.23)$$

$$Y(y) = A_y \sin(k_y y) + B_y \cos(k_y y), \quad (2.24)$$

$$Z(z) = A_z \sin(k_z z) + B_z \cos(k_z z). \quad (2.25)$$

As condições de contorno aqui resultam em

$$X(0) = Y(0) = Z(0) = 0, \quad (2.26)$$

que por sua vez gera $B_x = B_y = B_z = 0$ e $X(L_x) = Y(L_y) = Z(L_z) = 0$, levando a

$$k_x L_x = n_x \pi, \quad k_y L_y = n_y \pi, \quad k_z L_z = n_z \pi, \quad (2.27)$$

com

$$n_x = 1, 2, 3, \dots, \quad n_y = 1, 2, 3, \dots, \quad n_z = 1, 2, 3, \dots \quad (2.28)$$

As funções de onda normalizadas são dadas por

$$\psi_{n_x, n_y, n_z} = \sqrt{\frac{8}{L_x L_y L_z}} \sin\left(\frac{n_x \pi}{L_x} x\right) \sin\left(\frac{n_y \pi}{L_y} y\right) \sin\left(\frac{n_z \pi}{L_z} z\right) \quad (2.29)$$

e as energias permitidas são

$$E_{n_x, n_y, n_z} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m} \left(\frac{n_x^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2}{L_y^2} + \frac{n_z^2}{L_z^2} \right) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}, \quad (2.30)$$

onde k é a magnitude do vetor de onda $\mathbf{k} \equiv k_x \hat{\mathbf{x}} + k_y \hat{\mathbf{y}} + k_z \hat{\mathbf{z}}$.

Considerando um espaço tridimensional com eixos k_x, k_y, k_z e planos desenhados em $k_x = (\pi/L_x), (2\pi/L_x), (3\pi/L_x), \dots$, em $k_y = (\pi/L_y), (2\pi/L_y), (3\pi/L_y), \dots$ e em $k_z = (\pi/L_z), (2\pi/L_z), (3\pi/L_z), \dots$, cada ponto de interseção representa um estado estacionário distinto de uma partícula, veja a Fig. (2.2).

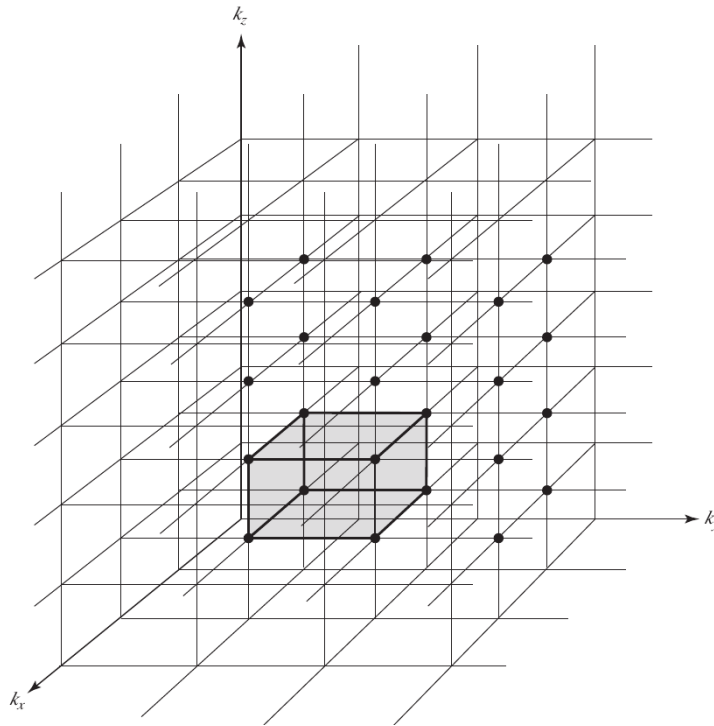


FIGURA 2.2 – Espaço tridimensional das componentes do vetor de onda. Cada ponto representa um estado estacionário. A parte sombreada indica um “bloco” onde há um único estado (de dois elétrons). Figura extraída de (GRIFFITHS, 2018).

Cada bloco nessa grade, e portanto cada estado, ocupa um volume dado por

$$\Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z = \frac{\pi^3}{L_x L_y L_z} = \frac{\pi^3}{V}, \quad (2.31)$$

no “espaço k ”, onde $V \equiv L_x L_y L_z$ é o volume do próprio objeto. Suponha que nossa amostra contenha N átomos e cada átomo contribua com d elétrons livres. Como os elétrons são férmions idênticos, sujeitos ao princípio de exclusão de Pauli, apenas dois (um com spin para cima e outro com spin para baixo) podem ocupar cada estado de partícula única. Os elétrons preencherão um octante de uma esfera no espaço k cujo raio,

k_F , é determinado pelo fato de que cada par de elétrons requer um volume π^3/V :

$$\frac{1}{8} \left(\frac{4}{3} \pi k_F^3 \right) = \frac{Nd}{2} \left(\frac{\pi^3}{V} \right), \quad (2.32)$$

que leva a

$$k_F = (3\pi^2 \rho)^{1/3}, \quad (2.33)$$

com $\rho = Nd/V$ sendo a densidade de elétrons, ou seja, o número de elétrons por volume.

A fronteira que separa os estados ocupados dos não ocupados no espaço k é chamada de superfície de Fermi. A energia correspondente, chamada de energia de Fermi, é dada por

$$E_F = E(k = k_F) = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m} (3\rho\pi^2)^{2/3}, \quad (2.34)$$

onde usamos a Eq. (2.33). A energia total do sistema pode ser calculada da seguinte forma: uma camada de espessura dk contém um volume $\frac{1}{8} (4\pi k^2) dk$, conforme ilustra a Fig. (2.3) a seguir.

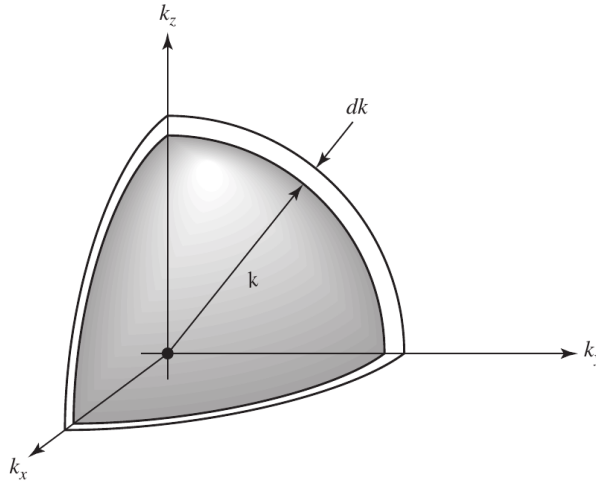


FIGURA 2.3 – Octante de uma camada esférica no espaço k . Figura extraída de (GRIFFITHS, 2018).

Então, o número de estados eletrônicos na camada é dado por

$$dN(k) = \frac{\gamma \left[\left(\frac{1}{2} \right) \pi k^2 dk \right]}{\left(\frac{\pi^3}{V} \right)} = \frac{\gamma V}{2\pi^2} k^2 dk, \quad (2.35)$$

onde γ é a degenerescência do sistema. Note que o número total N , que é uma função de k , é obtido pela integração da expressão acima. A partir disso, pode-se também obter

densidade integrando $dN(k)$ desde $k = 0$ até $k = k_F$:

$$\rho = \frac{N}{V} = \frac{1}{V} \int dN(k) = \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^{k_F} k^2 dk = \frac{\gamma}{6\pi^2} k_F^3. \quad (2.36)$$

Como no caso dos elétrons temos que $\gamma = 2$, a expressão acima torna-se $\rho = k_F^3/(3\pi^2)$, exatamente igual à relação apresentada anteriormente na Eq. (2.33).

A energia de cada estado é $\hbar^2 k^2/2m$. Portanto, a energia de $V k^2 dk/\pi^2$ estados é

$$dE = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \frac{V}{\pi^2} k^2 dk. \quad (2.37)$$

A energia total do sistema é então obtida pela integração da expressão acima (desde $k = 0$ até $k = k_F$ no lado direito), o que leva a

$$E_{\text{tot}} = \int dE = \frac{\hbar^2 V}{2\pi^2 m} \int_0^{k_F} k^4 dk = \frac{\hbar^2 k_F^5 V}{10\pi^2 m} = \frac{\hbar^2 V (3\rho\pi^2)^{5/3}}{10\pi^2 m} = \frac{3\hbar^2 V}{10m} (3\pi^2)^{2/3} \rho^{5/3}. \quad (2.38)$$

Esta energia quântica desempenha um papel análogo à energia interna de um gás clássico. A partir desta quantidade, podemos também definir a densidade de energia total como sendo a energia total por volume:

$$\mathcal{E} = \frac{E_{\text{tot}}}{V} = \frac{3\hbar^2}{10m} (3\pi^2)^{2/3} \rho^{5/3}. \quad (2.39)$$

Calculemos agora a pressão que gás de elétrons exerce nas paredes do sólido. De uma forma geral, tal quantidade é dada por

$$P = -\frac{\partial E_{\text{tot}}}{\partial V}, \quad (2.40)$$

que pode ser reescrita, notando-se que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \rho} &= \frac{\partial (E_{\text{tot}}/V)}{\partial (N/V)} = \frac{\partial (E_{\text{tot}}/V)}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial (N/V)} = -\left(\frac{1}{V} \frac{\partial E_{\text{tot}}}{\partial V} - \frac{E_{\text{tot}}}{V^2} \right) \frac{V^2}{N} \\ &= \frac{V}{N} \left(-\frac{\partial E_{\text{tot}}}{\partial V} \right) + \frac{E_{\text{tot}}}{N} = \frac{P + \mathcal{E}}{\rho}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Logo,

$$P = \rho \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \rho} - \mathcal{E} = \rho^2 \frac{\partial (\mathcal{E}/\rho)}{\partial \rho} = \frac{\hbar^2}{5m} (3\pi^2)^{2/3} \rho^{5/3} = \frac{2}{3} \mathcal{E}. \quad (2.42)$$

Esta é a pressão interna, chamada de pressão de degenerescência, que ajuda a estabilizar o sólido e que nada tem a ver com a repulsão elétron-elétron, que na verdade foi completamente descartada, e nem com o movimento térmico, já que estamos tratando um sistema

a temperatura nula. Este é um efeito estritamente quântico e deriva essencialmente da necessidade de antissimetrização das funções de onda de férmions idênticos, que é o caso dos elétrons descritos aqui.

2.3 Gás de nucleons (parte cinética)

Na subseção anterior, apresentamos o modelo de Sommerfeld para o gás de elétrons livres, no qual partículas fermiônicas não interagentes são confinadas em uma região tridimensional de volume $V = L_x L_y L_z$. A solução da equação de Schrödinger para esse sistema leva a estados quantizados no espaço dos momentos, definidos por números quânticos inteiros (n_x, n_y, n_z) , e ao surgimento de uma energia característica, a energia de Fermi, que marca o limite entre os estados ocupados e desocupados a temperatura nula. O mesmo formalismo pode ser estendido para descrever a parte cinética de um gás de nucleons, isto é, um sistema formado por prótons e nêutrons confinados em um volume macroscópico.

Assim como no caso eletrônico, cada nucleon ocupa um estado quântico distinto em virtude do princípio de exclusão de Pauli. Diferentemente do gás de elétrons, o gás de nucleons apresenta, entretanto, duas espécies de férmions: prótons e nêutrons, cada uma com sua própria densidade de partículas e correspondente energia de Fermi, dados por

$$\rho_{p,n} = \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^{k_{F_{p,n}}} k^2 dk = \frac{1}{3\pi^2} k_{F_{p,n}}^3 \quad (2.43)$$

e

$$E_{F_{p,n}} = \frac{\hbar^2 k_{F_{p,n}}^2}{2m_{p,n}} = \frac{\hbar^2}{2m_{p,n}} (3\pi^2 \rho_{p,n})^{2/3}, \quad (2.44)$$

respectivamente, onde m_p e m_n são as massas de prótons e nêutrons. Assim como no caso dos elétrons, cada nucleon tem degenerescência $\gamma = 2$ (cada estado pode ter a componente z de spin como sendo $1/2$ ou $-1/2$).

As partes cinéticas da densidade de energia e pressão são dadas por

$$\mathcal{E}_{kin} = \mathcal{E}_p + \mathcal{E}_n = \frac{3\hbar^2}{10m_p} (3\pi^2)^{2/3} \rho_p^{5/3} + \frac{3\hbar^2}{10m_n} (3\pi^2)^{2/3} \rho_n^{5/3} \quad (2.45)$$

e

$$P_{kin} = \frac{\hbar^2}{5m_p} (3\pi^2)^{2/3} \rho_p^{5/3} + \frac{\hbar^2}{5m_n} (3\pi^2)^{2/3} \rho_n^{5/3} = \frac{2}{3} \mathcal{E}_p + \frac{2}{3} \mathcal{E}_n, \quad (2.46)$$

em direta aplicação das Eqs. (2.39) e (2.42). Estas expressões representam, portanto, a generalização direta do gás de elétrons livres para um gás de nucleons degenerado, no

qual coexistem duas espécies fermiônicas submetidas ao princípio da exclusão de Pauli. Esse modelo simples fornece uma base fundamental para compreender o comportamento quântico da matéria nuclear em regimes de altas densidades e temperatura nula. Ele serve como ponto de partida para a construção de modelos mais sofisticados, nos quais a parte potencial, que descreve as interações efetivas entre os nucleons, não é descartada. Esse é o caso do modelo hadrônico que apresentaremos no capítulo seguinte.

3 Metamodelo

Neste capítulo, trataremos do metamodelo propriamente dito. De modo geral, metamodelos, ou “modelos de modelos”, são estruturas estatísticas ou matemáticas destinadas à representação aproximada do comportamento de sistemas complexos e computacionalmente onerosos. O uso dessa ferramenta é particularmente indicado em situações nas quais o modelo original é não analítico e apresenta implementação numérica difícil e/ou de alto custo computacional. A ideia fundamental consiste em construir uma função capaz de reproduzir, com boa precisão, a relação entre as variáveis de entrada e de saída do modelo completo (TIMOTHY *et al.*, 2001; JIN *et al.*, 2003). Este conceito foi aplicado na descrição da matéria nuclear em (MARGUERON *et al.*, 2018a). Nesse trabalho, os autores expandiram a densidade de energia do sistema nuclear em torno da densidade de saturação, da matéria nuclear simétrica (MNS), ρ_{sat} ¹, com os coeficientes da expansão dados em termos dos chamados parâmetros nucleares empíricos (ou parâmetros de bulk) da MNS. A ideia central é que, em vez de se supor uma forma funcional exata para a dependência da energia com a densidade e a assimetria, como nos modelos de Skyrme ou nos modelos de campo médio relativístico, o metamodelo propõe uma expansão em série da equação de estado, de modo que cada coeficiente da expansão esteja diretamente associado a um parâmetro nuclear empírico.

Basicamente, a estrutura do metamodelo para a densidade de energia é dada pela soma de uma parte cinética e uma parte potencial, esta última expressa explicitamente como uma série de Taylor em torno de ρ_{sat} . Nas próximas subseções, mostraremos essas duas partes, começando pelo termo cinético. Todas as demais quantidades termodinâmicas serão derivadas a partir desta grandeza.

3.1 Parte cinética

A estrutura da parte cinética da densidade de energia do metamodelo é determinada a partir do modelo do gás de Fermi não interagente; portanto, sua forma é aquela apresentada na Eq. (2.45). No entanto, o metamodelo considera que a massa do nucleon pode

¹A densidade de saturação ρ_{sat} é definida como sendo a densidade na qual a energia por partícula do sistema apresenta um mínimo.

depende do meio nuclear, mais especificamente da densidade total do sistema, $\rho = \rho_p + \rho_n$, e da fração de prótons, $y = \rho_p/\rho$, isto é, $m_p \rightarrow m_p^*(\rho, y)$ e $m_n \rightarrow m_n^*(\rho, y)$. Essa quantidade será denominada massa efetiva do nucleon.

3.1.1 Densidade de energia e energia por partícula

Com essa consideração e utilizando as relações $\rho_p = y\rho$ e $\rho_n = (1 - y)\rho$, onde y é a fração de prótons do sistema e $\rho = \rho_p + \rho_n$, a densidade de energia cinética do metamodelo pode ser reescrita como uma função de ρ e y da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{kin}^* &= \frac{3}{10} (3\pi^2)^{2/3} \left[\frac{\rho_p^{5/3}}{m_p^*(\rho, y)} + \frac{\rho_n^{5/3}}{m_n^*(\rho, y)} \right] = \frac{3}{10} (3\pi^2)^{2/3} \rho^{5/3} \left[\frac{y^{5/3}}{m_p^*(\rho, y)} + \frac{(1-y)^{5/3}}{m_n^*(\rho, y)} \right] \\ &= \mathcal{E}_{kin,p}^* + \mathcal{E}_{kin,n}^*, \end{aligned} \quad (3.1)$$

com

$$\mathcal{E}_{kin,i}^* = \frac{3(3\pi^2)^{2/3}}{10 m_i^*(\rho, y)} \rho_i^{5/3}, \quad (3.2)$$

para $i = p, n$. O símbolo * na densidade de energia, e nas demais grandezas que ainda aparecerão no texto, indica que a respectiva quantidade depende da massa efetiva do nucleon, ou seja, é uma função de $m_i^*(\rho, y)$. A partir daqui, adota-se o sistema de unidades em que $\hbar = c = 1$. Desse modo, a massa é expressa em MeV, as densidades em MeV³ e a densidade de energia em MeV⁴. Com a densidade de energia determinada, é possível obter as demais quantidades termodinâmicas do sistema. Por exemplo, a energia por partícula é escrita como

$$E_{kin}^* = \frac{\mathcal{E}_{kin}^*}{\rho} = \frac{3}{10} (3\pi^2 \rho)^{2/3} \left[\frac{y^{5/3}}{m_p^*(\rho, y)} + \frac{(1-y)^{5/3}}{m_n^*(\rho, y)} \right] = E_{kin,p}^* + E_{kin,n}^*, \quad (3.3)$$

onde

$$E_{kin,i}^* = \frac{3(3\pi^2)^{2/3}}{10 \rho m_i^*(\rho, y)} \rho_i^{5/3}. \quad (3.4)$$

Note que o caso particular no qual $m_p^*(\rho, y) = m_n^*(\rho, y) = m$ leva a

$$E_{kin} = \frac{3}{10m} (3\pi^2 \rho)^{2/3} [y^{5/3} + (1-y)^{5/3}]. \quad (3.5)$$

Ainda, definindo a função

$$H_n(y) = 2^{n-1} [y^n + (1-y)^n], \quad (3.6)$$

podemos reescrever a expressão anterior como

$$E_{kin} = \frac{3}{10m} \left(\frac{3\pi^2}{2} \right)^{2/3} H_{5/3}(y) \rho^{2/3}. \quad (3.7)$$

Este é exatamente o termo cinético descrito na Eq. (1) da Ref. (DUTRA *et al.*, 2012), que trata do modelo de Skyrme.

3.1.2 Pressão

A pressão devida ao termo cinético da densidade de energia é calculada através da seguinte definição

$$P' = \rho^2 \frac{\partial(\mathcal{E}_{kin}^*/\rho)}{\partial\rho} = \rho^2 \frac{\partial E_{kin}^*}{\partial\rho} \quad (3.8)$$

com $E_{kin}^* = E_{kin}^*(\rho, y, m_p^*(\rho, y), m_n^*(\rho, y))$ dado pela Eq. (3.3) e com a derivada sendo calculada a y fixo. Logo,

$$P' = \rho^2 \left(\frac{\partial E_{kin}^*}{\partial m_p^*} \frac{\partial m_p^*}{\partial\rho} + \frac{\partial E_{kin}^*}{\partial m_n^*} \frac{\partial m_n^*}{\partial\rho} + \frac{\partial E_{kin}^*}{\partial\rho} \right) = \rho \frac{\partial \mathcal{E}_{kin}^*}{\partial m_p^*} \frac{\partial m_p^*}{\partial\rho} + \rho \frac{\partial \mathcal{E}_{kin}^*}{\partial m_n^*} \frac{\partial m_n^*}{\partial\rho} + \rho^2 \frac{\partial E_{kin}^*}{\partial\rho}. \quad (3.9)$$

A derivada do último termo é dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_{kin}^*}{\partial\rho} &= \frac{\partial}{\partial\rho} \left\{ \frac{3}{10} (3\pi^2)^{2/3} \rho^{2/3} \left[\frac{y^{5/3}}{m_p^*} + \frac{(1-y)^{5/3}}{m_n^*} \right] \right\} \\ &= \frac{3}{10} (3\pi^2)^{2/3} \frac{2}{3} \rho^{-1/3} \left[\frac{y^{5/3}}{m_p^*} + \frac{(1-y)^{5/3}}{m_n^*} \right], \end{aligned} \quad (3.10)$$

logo,

$$P' = \rho \frac{\partial \mathcal{E}_{kin}^*}{\partial m_p^*} \frac{\partial m_p^*}{\partial\rho} + \rho \frac{\partial \mathcal{E}_{kin}^*}{\partial m_n^*} \frac{\partial m_n^*}{\partial\rho} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{10} (3\pi^2)^{2/3} \rho^{5/3} \left[\frac{y^{5/3}}{m_p^*} + \frac{(1-y)^{5/3}}{m_n^*} \right]. \quad (3.11)$$

Note ainda que o termo $A \equiv \rho^2 \partial E_{kin}^* / \partial\rho$ pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} A &= \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{10} (3\pi^2)^{2/3} \rho^{5/3} \left[\frac{y^{5/3}}{m_p^*} + \frac{(1-y)^{5/3}}{m_n^*} \right] = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{10} (3\pi^2)^{2/3} \left[\frac{(\rho y)^{5/3}}{m_p^*} + \frac{[\rho(1-y)]^{5/3}}{m_n^*} \right] \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{10} (3\pi^2)^{2/3} \left(\frac{\rho_p^{5/3}}{m_p^*} + \frac{\rho_n^{5/3}}{m_n^*} \right) = \frac{2}{3} \mathcal{E}_{kin}^* = \frac{2}{3} \mathcal{E}_{kin,p}^* + \frac{2}{3} \mathcal{E}_{kin,n}^*, \end{aligned} \quad (3.12)$$

que leva a

$$P' = P_{kin}^* + \rho \frac{\partial \mathcal{E}_{kin}^*}{\partial m_p^*} \frac{\partial m_p^*}{\partial\rho} + \rho \frac{\partial \mathcal{E}_{kin}^*}{\partial m_n^*} \frac{\partial m_n^*}{\partial\rho}, \quad (3.13)$$

onde

$$P_{kin}^* = P_{kin,p}^* + P_{kin,n}^*, \quad (3.14)$$

e

$$P_{kin,i}^* = \frac{2}{3} \mathcal{E}_{kin,i}^*, \quad (3.15)$$

para $i = p, n$. Nos cálculos acima usamos o fato de \mathcal{E}_{kin}^* poder ser dado em função de ρ e y . Ainda, as derivadas $\partial m_i^*/\partial \rho$ são tomadas a y constante.

Usando também a relação expressa na Eq. (22) de (DUTRA M. LOURENÇO FILHO; MARGUERON, 2023), a saber,

$$\frac{\partial \mathcal{E}_{kin,i}^*}{\partial m_i^*} = \frac{\mathcal{E}_{kin,i}^* - 3P_{kin,i}^*}{m_i^*}, \quad (3.16)$$

junto com a Eq. (3.15), chega-se finalmente em

$$P' = P_{kin}^* - \frac{3}{2} \frac{\rho}{m_p^*} P_{kin,p}^* \frac{\partial m_p^*}{\partial \rho} - \frac{3}{2} \frac{\rho}{m_n^*} P_{kin,n}^* \frac{\partial m_n^*}{\partial \rho}. \quad (3.17)$$

Note os termos de correção devido às derivadas da massa efetiva em relação à densidade (dois últimos termos), ou seja, a influência do meio na massa do nucleon altera diretamente a forma final da pressão do sistema.

Para o caso particular $m_p^*(\rho, y) = m_n^*(\rho, y) = m$, temos que as derivadas da expressão anterior são nulas. Como consequência, a pressão torna-se

$$\begin{aligned} P' &= P_{kin} = P_{kin,p} + P_{kin,n} = \frac{2}{3} \mathcal{E}_{kin,p} + \frac{2}{3} \mathcal{E}_{kin,n} = \frac{2}{3} \mathcal{E}_{kin} = \frac{2}{3} \rho E_{kin} \\ &= \frac{1}{5m} \left(\frac{3\pi^2}{2} \right)^{2/3} H_{5/3}(y) \rho^{5/3}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

onde $\mathcal{E}_{kin} = \mathcal{E}_{kin,p} + \mathcal{E}_{kin,n}$, com

$$\mathcal{E}_{kin,i} = \frac{3(3\pi^2)^{2/3}}{10m} \rho_i^{5/3}. \quad (3.19)$$

Esta forma para a pressão é exatamente igual ao termo cinético dado na Eq. (6) de (DUTRA *et al.*, 2012) para o modelo de Skyrme.

3.1.3 Potenciais químicos

O potencial químico é a grandeza que quantifica a variação da energia de um sistema termodinâmico em função da variação do número de partículas que o compõem. Como na matéria nuclear assimétrica existem dois tipos de partículas, prótons e nêutrons, há,

portanto, dois potenciais químicos associados. De forma geral, o potencial químico de uma partícula q qualquer é definido como

$$\mu_q = \left. \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \rho_q} \right|_{\rho_i \neq q}, \quad (3.20)$$

em que a derivada é calculada mantendo-se constantes todas as demais densidades das partículas $i \neq q$. No caso da parte cinética do metamodelo, utilizamos o fato de que a Eq. (3.1) pode ser expressa em termos apenas de ρ_p e ρ_n , uma vez que as massas efetivas também podem ser escritas em função dessas quantidades, dado que $\rho = \rho(\rho_p, \rho_n)$ e $y = y(\rho_p, \rho_n)$. Assim, podemos escrever $\mathcal{E}_{kin}^* = \mathcal{E}_{kin}^*(\rho_p, \rho_n, m_p^*(\rho_p, \rho_n), m_n^*(\rho_p, \rho_n))$. Sabe-se que a energia cinética total é dada por $\mathcal{E}_{kin,p}^* + \mathcal{E}_{kin,n}^*$.

Fazendo a diferencial de $\mathcal{E}_{kin,p}^*$:

$$d\mathcal{E}_{kin,p}^* = \left. \frac{\partial \mathcal{E}_{kin,p}^*}{\partial \rho_p} \right|_{m_p^*} d\rho_p + \left. \frac{\partial \mathcal{E}_{kin,p}^*}{\partial m_p^*} \right|_{\rho_p} dm_p^*. \quad (3.21)$$

Agora diferencial de m_p^* :

$$dm_p^* = \left. \frac{\partial m_p^*}{\partial \rho_p} \right|_{\rho_n} d\rho_p + \left. \frac{\partial m_p^*}{\partial \rho_n} \right|_{\rho_p} d\rho_p. \quad (3.22)$$

Temos que $d\rho_n = 0$, logo,

$$dm_p^* = \left. \frac{\partial m_p^*}{\partial \rho_p} \right|_{\rho_n} d\rho_p. \quad (3.23)$$

Substituindo $d\mathcal{E}_{kin,p}^*$

$$d\mathcal{E}_{kin,p}^* = \left. \frac{\partial \mathcal{E}_{kin,p}^*}{\partial \rho_p} \right|_{m_p^*} d\rho_p + \left. \frac{\partial \mathcal{E}_{kin,p}^*}{\partial m_p^*} \right|_{\rho_p} \left. \frac{\partial m_p^*}{\partial \rho_p} \right|_{\rho_n} d\rho_p, \quad (3.24)$$

então,

$$\left. \frac{\partial \mathcal{E}_{kin,p}^*}{\partial \rho_p} \right|_{\rho_n} = \left. \frac{\partial \mathcal{E}_{kin,p}^*}{\partial \rho_p} \right|_{m_p^*} + \left. \frac{\partial \mathcal{E}_{kin,p}^*}{\partial m_p^*} \right|_{\rho_p} \left. \frac{\partial m_p^*}{\partial \rho_p} \right|_{\rho_n}. \quad (3.25)$$

Vamos fazer o análogo para as partes dos nêutrons,

$$d\mathcal{E}_{kin,n}^* = \left. \frac{\partial \mathcal{E}_{kin,n}^*}{\partial \rho_n} \right|_{m_n^*} d\rho_n + \left. \frac{\partial \mathcal{E}_{kin,n}^*}{\partial m_n^*} \right|_{\rho_n} dm_n^*, \quad (3.26)$$

temos que, $d\rho_n = 0$, então,

e

$$dm_n^* = \left. \frac{\partial m_n^*}{\partial \rho_p} \right|_{\rho_n} d\rho_p + \underbrace{\left. \frac{\partial m_n^*}{\partial \rho_n} \right|_{\rho_p} d\rho_n}_0, \quad (3.27)$$

logo,

$$dm_n^* = \left. \frac{\partial m_n^*}{\partial \rho_p} \right|_{\rho_p} d\rho_p, \quad (3.28)$$

e portanto,

$$\left. \frac{\partial \mathcal{E}_{kin,n}^*}{\partial \rho_p} \right|_{\rho_n} = \left. \frac{\partial \mathcal{E}_{kin}^*}{\partial m_n^*} \right|_{\rho_n} \left. \frac{\partial m_n^*}{\partial \rho_p} \right|_{\rho_n}. \quad (3.29)$$

Fazendo, $\mathcal{E}_{kin}^* = \mathcal{E}_{kin,p}^* + \mathcal{E}_{kin,n}^*$

$$\left. \frac{\partial \mathcal{E}_{kin,p}^*}{\partial \rho_p} \right|_{\rho_n} = \left. \frac{\partial \mathcal{E}_{kin,p}^*}{\partial \rho_p} \right|_{\rho_p} + \left. \frac{\partial \mathcal{E}_{kin,n}^*}{\partial \rho_p} \right|_{\rho_n}, \quad (3.30)$$

substituindo,

$$\left. \frac{\partial \mathcal{E}_{kin}^*}{\partial \rho_p} \right|_{\rho_n} = \left. \frac{\partial \mathcal{E}_{kin,p}^*}{\partial \rho_p} \right|_{m_p^*} + \left. \frac{\partial \mathcal{E}_{kin,p}^*}{\partial m_p^*} \right|_{\rho_p} \left. \frac{\partial m_p^*}{\partial \rho_p} \right|_{\rho_n} + \left. \frac{\partial \mathcal{E}_{kin,p}^*}{\partial m_n^*} \right|_{\rho_n} \left. \frac{\partial m_n^*}{\partial \rho_p} \right|_{\rho_n} \quad (3.31)$$

Então, termos enfim, a seguinte relação,

$$\begin{aligned} \mu'_p &= \left. \frac{\partial \mathcal{E}_{kin}^*}{\partial \rho_p} \right|_{\rho_n} = \frac{\partial}{\partial \rho_p} (\mathcal{E}_{kin,p}^* + \mathcal{E}_{kin,n}^*) \Big|_{\rho_n} = \frac{\partial \mathcal{E}_{kin,p}^*}{\partial m_p^*} \frac{\partial m_p^*}{\partial \rho_p} + \frac{\partial \mathcal{E}_{kin,n}^*}{\partial m_n^*} \frac{\partial m_n^*}{\partial \rho_p} + \frac{\partial \mathcal{E}_{kin,p}^*}{\partial \rho_p}, \\ &= \mu_{kin,p}^* + \frac{\partial \mathcal{E}_{kin,p}^*}{\partial m_p^*} \frac{\partial m_p^*}{\partial \rho_p} + \frac{\partial \mathcal{E}_{kin,n}^*}{\partial m_n^*} \frac{\partial m_n^*}{\partial \rho_p}, \end{aligned} \quad (3.32)$$

onde

$$\begin{aligned}\mu_{kin,p}^* &= \frac{\partial \mathcal{E}_{kin,p}^*}{\partial \rho_p} = \frac{3}{10} (3\pi^2)^{2/3} \frac{\partial}{\partial \rho_p} \left(\frac{\rho_p^{5/3}}{m_p^*} + \frac{\rho_n^{5/3}}{m_n^*} \right) = \frac{5}{3} \cdot \frac{3}{10m_p^*} (3\pi^2 \rho_p)^{2/3} \\ &= \frac{5}{3} \frac{\mathcal{E}_{kin,p}^*}{\rho_p}.\end{aligned}\quad (3.33)$$

Utilizando novamente a Eq. (3.16), chegamos em

$$\mu'_p = \mu_{kin,p}^* - \frac{3}{2} \frac{P_{kin,p}^*}{m_p^*} \frac{\partial m_p^*}{\partial \rho_p} - \frac{3}{2} \frac{P_{kin,n}^*}{m_n^*} \frac{\partial m_n^*}{\partial \rho_p}.\quad (3.34)$$

Adotando o mesmo procedimento para o cálculo do potencial químico de nêutrons, chegamos em

$$\begin{aligned}\mu'_n &= \left. \frac{\partial \mathcal{E}_{kin}^*}{\partial \rho_n} \right|_{\rho_p} \\ &= \left. \frac{\partial}{\partial \rho_n} (\mathcal{E}_{kin,p}^* + \mathcal{E}_{kin,n}^*) \right|_{\rho_p} = \frac{\partial \mathcal{E}_{kin,p}^*}{\partial m_p^*} \frac{\partial m_p^*}{\partial \rho_n} + \frac{\partial \mathcal{E}_{kin,n}^*}{\partial m_n^*} \frac{\partial m_n^*}{\partial \rho_n} + \frac{\partial \mathcal{E}_{kin,p}^*}{\partial \rho_n}, \\ &= \mu_{kin,n}^* + \frac{\partial \mathcal{E}_{kin,p}^*}{\partial m_p^*} \frac{\partial m_p^*}{\partial \rho_n} + \frac{\partial \mathcal{E}_{kin,n}^*}{\partial m_n^*} \frac{\partial m_n^*}{\partial \rho_n} + \frac{\partial \mathcal{E}_{kin,p}^*}{\partial \rho_n}, \\ &= \mu_{kin,n}^* - \frac{3}{2} \frac{P_{kin,p}^*}{m_p^*} \frac{\partial m_p^*}{\partial \rho_n} - \frac{3}{2} \frac{P_{kin,n}^*}{m_n^*} \frac{\partial m_n^*}{\partial \rho_n},\end{aligned}\quad (3.35)$$

onde $\mu_{kin,n}^* = \partial \mathcal{E}_{kin,n}^* / \partial \rho_n = 5\mathcal{E}_{kin,n}^* / (3\rho_n)$. Note, novamente, o efeito da massa efetiva na forma nos potenciais químicos: o aparecimento dos dois últimos termos nas Eqs. (3.34) e (3.35). Ainda, o caso particular de massas constantes e iguais leva a $\mu'_p = \mu_{kin,p}^* = 5\mathcal{E}_{kin,p}^* / (3\rho_p)$ e a $\mu'_n = \mu_{kin,n}^* = 5\mathcal{E}_{kin,n}^* / (3\rho_n)$.

Os potenciais químicos poderiam ter sido calculados usando a dependência da densidade de energia em ρ e y da seguinte forma

$$\mu'_p = \left. \frac{\partial \mathcal{E}_{kin}^*}{\partial \rho_p} \right|_{\rho_n} = \left. \frac{\partial \mathcal{E}_{kin}^*}{\partial \rho} \right|_y + \frac{(1-y)}{\rho} \left. \frac{\partial \mathcal{E}_{kin}^*}{\partial y} \right|_{\rho},\quad (3.36)$$

$$\mu'_n = \left. \frac{\partial \mathcal{E}_{kin}^*}{\partial \rho_n} \right|_{\rho_p} = \left. \frac{\partial \mathcal{E}_{kin}^*}{\partial \rho} \right|_y - \frac{y}{\rho} \left. \frac{\partial \mathcal{E}_{kin}^*}{\partial y} \right|_{\rho},\quad (3.37)$$

onde as derivadas dadas nas Eqs. (A.1)-(A.4) do Apêndice A.1 foram usadas.

Com todas as expressões analíticas obtidas, podemos agora verificar se a parte cinética do modelo é termodinamicamente consistente, ou seja, se obedece à equação de Euler para

sistemas a temperatura nula, dada por (GREINER *et al.*, 1997)

$$PV + E = \sum_i \mu_i N_i. \quad (3.38)$$

Ao dividir toda a expressão por V , chegamos à seguinte forma

$$P + \mathcal{E} = \sum_i \mu_i \rho_i. \quad (3.39)$$

A partir das Eqs. (3.1) e (3.17) temos que

$$P' + \mathcal{E}_{kin}^* = \frac{5}{3} \mathcal{E}_{kin,p}^* + \frac{5}{3} \mathcal{E}_{kin,n}^* - \frac{3}{2} \frac{\rho}{m_p^*} P_{kin,p}^* \frac{\partial m_p^*}{\partial \rho} - \frac{3}{2} \frac{\rho}{m_n^*} P_{kin,n}^* \frac{\partial m_n^*}{\partial \rho}, \quad (3.40)$$

onde usamos, uma vez mais, a Eq. (3.15). Além disso, temos que

$$\begin{aligned} \mu'_p \rho_p + \mu'_n \rho_n &= \frac{5}{3} \frac{\mathcal{E}_{kin,p}^*}{\rho_p} \rho_p - \frac{3}{2} \frac{P_{kin,p}^*}{m_p^*} \frac{\partial m_p^*}{\partial \rho_p} \rho_p - \frac{3}{2} \frac{P_{kin,n}^*}{m_n^*} \frac{\partial m_n^*}{\partial \rho_p} \rho_p \\ &+ \frac{5}{3} \frac{\mathcal{E}_{kin,n}^*}{\rho_n} \rho_n - \frac{3}{2} \frac{P_{kin,p}^*}{m_p^*} \frac{\partial m_p^*}{\partial \rho_n} \rho_n - \frac{3}{2} \frac{P_{kin,n}^*}{m_n^*} \frac{\partial m_n^*}{\partial \rho_n} \rho_n \\ &= \frac{5}{3} \mathcal{E}_{kin,p}^* + \frac{5}{3} \mathcal{E}_{kin,n}^* - \frac{3}{2} \frac{P_{kin,p}^*}{m_p^*} \frac{\partial m_p^*}{\partial \rho} (\rho_p + \rho_n) - \frac{3}{2} \frac{P_{kin,n}^*}{m_n^*} \frac{\partial m_n^*}{\partial \rho} (\rho_p + \rho_n) \\ &= \frac{5}{3} \mathcal{E}_{kin,p}^* + \frac{5}{3} \mathcal{E}_{kin,n}^* - \frac{3}{2} \frac{P_{kin,p}^*}{m_p^*} \frac{\partial m_p^*}{\partial \rho} \rho - \frac{3}{2} \frac{P_{kin,n}^*}{m_n^*} \frac{\partial m_n^*}{\partial \rho} \rho, \end{aligned} \quad (3.41)$$

mostrando que

$$P' + \mathcal{E}_{kin}^* = \mu'_p \rho_p + \mu'_n \rho_n, \quad (3.42)$$

confirmando assim a consistência da parte cinética.

3.2 Parte potencial

3.2.1 Densidade de energia e energia por partícula

Nesta seção, apresentamos as quantidades termodinâmicas associadas à parte potencial do metamodelo utilizado em (MARGUERON *et al.*, 2018a), começando pela densidade de

energia, expressa como uma expansão em série de Taylor dada por

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{pot} &= \rho \left[(v_{sat,0} + v_{sym,0} \delta^2) u_0(x, \delta) + (v_{sat,1} + v_{sym,1} \delta^2) x u_1(x, \delta) \right. \\ &\quad \left. + (v_{sat,2} + v_{sym,2} \delta^2) \frac{x^2}{2!} u_2(x, \delta) + (v_{sat,3} + v_{sym,3} \delta^2) \frac{x^3}{3!} u_3(x, \delta) + \dots \right] \\ &= \rho \sum_{j=0}^N \frac{1}{j!} (v_{sat,j} + v_{sym,j} \delta^2) x^j u_j(x, \delta),\end{aligned}\tag{3.43}$$

onde $x = (\rho - \rho_{sat})/(3\rho_{sat})$, $\delta = (\rho_n - \rho_p)/(\rho_n + \rho_p) = 1 - 2y$,

$$u_j(x, \delta) = 1 - (-3x)^{N+1-j} e^{-\xi(\delta)(3x+1)},\tag{3.44}$$

$N = 4$ e $\xi(\delta) = b_{sat} + b_{sym} \delta^2$, com $b_{sat} = 6,9$ e $b_{sym} = 0$, conforme usado em (MARGUERON *et al.*, 2018a). Embora o último parâmetro seja nulo, mantivemos a forma de $\xi(\delta)$ com os dois termos para deixar as expressões do modelo mais gerais possíveis, ou seja, permitindo possíveis casos nos quais $b_{sym} \neq 0$. A motivação para o formato da Eq. (3.43) e a relação entre os coeficientes da série $(v_{sat,j}, v_{sym,j})$ e os parâmetros de bulk serão discutidas na próxima seção.

Com a Eq. (3.43) definida, podemos obter as demais quantidades. A energia por partícula é escrita como

$$E_{pot} = \frac{\mathcal{E}_{pot}}{\rho} = \sum_{j=0}^N \frac{1}{j!} (v_{sat,j} + v_{sym,j} \delta^2) x^j u_j(x, \delta).\tag{3.45}$$

3.2.2 Pressão

A pressão é dada por

$$\begin{aligned}P_{pot} &= \rho^2 \frac{\partial(\mathcal{E}_{pot}/\rho)}{\partial \rho} = \rho^2 \frac{\partial E_{pot}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \rho} \\ &= \frac{\rho^2}{3\rho_{sat}} \left[\sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{i!} (v_{sat,i+1} + v_{sym,i+1} \delta^2) x^i u_{i+1}(x, \delta) + \sum_{j=0}^N \frac{1}{j!} (v_{sat,j} + v_{sym,j} \delta^2) x^j \frac{\partial u_j(x, \delta)}{\partial x} \right],\end{aligned}\tag{3.46}$$

com

$$\frac{\partial u_j(x, \delta)}{\partial x} = 3(-3x)^{N-j} e^{-\xi(\delta)(3x+1)} [N + 1 - j - 3x\xi(\delta)].\tag{3.47}$$

Para este cálculo usamos algumas derivações mostradas explicitamente do Apêndice A.2.

3.2.3 Potenciais químicos

Por fim, obtemos os potenciais químicos, começando com o potencial químico de prótons. Para facilitar o cálculo, podemos usar o fato de que \mathcal{E}_{pot} é uma função de ρ e δ . Dessa forma temos

$$\mu_{pot,p} = \frac{\partial \mathcal{E}_{pot}}{\partial \rho_p} = \left. \frac{\partial \mathcal{E}_{pot}}{\partial \rho} \right|_{\delta} + \frac{\partial \delta}{\partial \rho_p} \left. \frac{\partial \mathcal{E}_{pot}}{\partial \delta} \right|_{\rho}. \quad (3.48)$$

O primeiro termo pode ser obtido usando a seguinte relação

$$P_{pot} = \rho^2 \frac{\partial (\mathcal{E}_{pot}/\rho)}{\partial \rho} = \rho^2 \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathcal{E}_{pot}}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho^2} \mathcal{E}_{pot} \right) = \rho \frac{\partial \mathcal{E}_{pot}}{\partial \rho} - \mathcal{E}_{pot}, \quad (3.49)$$

que leva a

$$\frac{\partial \mathcal{E}_{pot}}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} (P_{pot} + \mathcal{E}_{pot}). \quad (3.50)$$

Logo,

$$\mu_{pot,p} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \mathcal{E}_{pot}}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial \mathcal{E}_{pot}}{\partial \delta} \frac{\partial \delta}{\partial \rho_p} = \frac{1}{\rho} (P_{pot} + \mathcal{E}_{pot}) - \frac{2\rho_n}{\rho^2} \frac{\partial \mathcal{E}_{pot}}{\partial \delta}, \quad (3.51)$$

com

$$\frac{\partial \mathcal{E}_{pot}}{\partial \delta} = \rho \sum_{j=0}^N \frac{x^j}{j!} \left[2\delta v_{sym,j} u_j(x, \delta) + (v_{sat,j} + v_{sym,j} \delta^2) \frac{\partial u_j}{\partial \delta} \right] \quad (3.52)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_j}{\partial \delta} &= \frac{\partial}{\partial \delta} \left[1 - (-3x)^{N+1-j} e^{-(b_{sat} + b_{sym} \delta^2)(3x+1)} \right] \\ &= \left[-(-3x)^{N+1-j} (-2\delta b_{sym})(3x+1) e^{-(b_{sat} + b_{sym} \delta^2)(3x+1)} \right] \\ &= (u_j - 1)(-2\delta b_{sym})(3x+1) = (1 - u_j)(2\delta b_{sym})(3x+1) \\ &= 2(3x+1)b_{sym}\delta[1 - u_j(x, \delta)], \end{aligned} \quad (3.53)$$

onde usamos $\partial \delta / \partial \rho_p = -2\rho_n / \rho^2$. O mesmo procedimento é adotado para a determinação do potencial químico dos nêutrons, dado por

$$\mu_{pot,n} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \mathcal{E}_{pot}}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial \mathcal{E}_{pot}}{\partial \delta} \frac{\partial \delta}{\partial \rho_n} = \frac{1}{\rho} (P_{pot} + \mathcal{E}_{pot}) + \frac{2\rho_p}{\rho^2} \frac{\partial \mathcal{E}_{pot}}{\partial \delta}, \quad (3.54)$$

na qual utilizamos a relação $\partial\delta/\partial\rho_n = 2\rho_p/\rho^2$. Note que a equação de Euler é satisfeita também para a parte potencial do modelo, já que

$$\begin{aligned}\mu_{pot,p}\rho_p + \mu_{pot,n}\rho_n &= \frac{\rho_p + \rho_n}{\rho}(P_{pot} + \mathcal{E}_{pot}) - \frac{2\rho_p\rho_n}{\rho^2}\frac{\partial\mathcal{E}_{pot}}{\partial\delta} + \frac{2\rho_p\rho_n}{\rho^2}\frac{\partial\mathcal{E}_{pot}}{\partial\delta} \\ &= P_{pot} + \mathcal{E}_{pot},\end{aligned}\quad (3.55)$$

comprovando assim a consistência termodinâmica.

3.3 Forma completa

A partir da determinação das partes cinética e potencial, podemos formular o modelo completo como a soma dessas duas contribuições. Assim, densidade de energia e energia por partícula são expressas por

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{mm}(\rho, y) &= \mathcal{E}_{kin}^* + \mathcal{E}_{pot} = \mathcal{E}_{kin,p}^* + \mathcal{E}_{kin,n}^* + \mathcal{E}_{pot}, \\ &= \frac{3}{10}(3\pi^2)^{2/3}\rho^{5/3}\left[\frac{y^{5/3}}{m_p^*(\rho, y)} + \frac{(1-y)^{5/3}}{m_n^*(\rho, y)}\right] + \rho\sum_{j=0}^N\frac{1}{j!}(v_{sat,j} + v_{sym,j}\delta^2)x^j u_j(x, \delta),\end{aligned}\quad (3.56)$$

com o uso das Eqs. (3.2), (3.43) e (3.44), e

$$\begin{aligned}E_{mm}(\rho, y) &= \frac{\mathcal{E}_{mm}(\rho, y)}{\rho} \\ &= \frac{3}{10}(3\pi^2)^{2/3}\rho^{2/3}\left[\frac{y^{5/3}}{m_p^*(\rho, y)} + \frac{(1-y)^{5/3}}{m_n^*(\rho, y)}\right] + \sum_{j=0}^N\frac{1}{j!}(v_{sat,j} + v_{sym,j}\delta^2)x^j u_j(x, \delta).\end{aligned}\quad (3.57)$$

Pressão e potenciais químicos são, respectivamente, dados por

$$\begin{aligned}P_{mm}(\rho, y) &= P' + P_{pot} \\ &= P_{kin,p}^* + P_{kin,n}^* - \frac{3}{2}\rho\left(\frac{P_{kin,p}^*}{m_p^*}\frac{\partial m_p^*}{\partial\rho} + \frac{P_{kin,n}^*}{m_n^*}\frac{\partial m_n^*}{\partial\rho}\right) + P_{pot},\end{aligned}\quad (3.58)$$

dadas as Eqs. (3.15) e (3.46),

$$\begin{aligned}\mu_{mm,p}(\rho, y) &= \mu'_p + \mu_{pot,p} \\ &= \mu_{kin,p}^* - \frac{3}{2}\left(\frac{P_{kin,p}^*}{m_p^*}\frac{\partial m_p^*}{\partial\rho_p} + \frac{P_{kin,n}^*}{m_n^*}\frac{\partial m_n^*}{\partial\rho_p}\right) + \frac{1}{\rho}(P_{pot} + \mathcal{E}_{pot}) - \frac{2\rho_n}{\rho^2}\frac{\partial\mathcal{E}_{pot}}{\partial\delta},\end{aligned}\quad (3.59)$$

e

$$\begin{aligned}\mu_{mm,n}(\rho, y) &= \mu'_n + \mu_{pot,n} \\ &= \mu_{kin,n}^* - \frac{3}{2} \left(\frac{P_{kin,p}^*}{m_p^*} \frac{\partial m_p^*}{\partial \rho_n} + \frac{P_{kin,n}^*}{m_n^*} \frac{\partial m_n^*}{\partial \rho_n} \right) + \frac{1}{\rho} (P_{pot} + \mathcal{E}_{pot}) + \frac{2\rho_p}{\rho^2} \frac{\partial \mathcal{E}_{pot}}{\partial \delta},\end{aligned}\quad (3.60)$$

dada a Eq. (3.52). Para determinar completamente o metamodelo, é preciso fornecer a expressão da massa efetiva do nucleon, nesse caso, uma quantidade que varia com o meio nuclear, mais especificamente em função de ρ e y . Tomaremos aqui a forma usada em (MARGUERON *et al.*, 2018a) para esta quantidade:

$$\frac{m_i^*(\rho, \delta)}{m} = \left[1 + (\kappa_{sat} + \tau_3 \kappa_{sym} \delta) \frac{\rho}{\rho_{sat}} \right]^{-1}, \quad (3.61)$$

com $\tau_3 = 1$ para nêutrons e $\tau_3 = -1$ para prótons, onde κ_{sat} e κ_{sym} são constantes de cada parametrização, e $m = 939$ MeV é a massa de repouso do nucleon.

Com isso, podemos agora discutir os coeficientes da expansão dada na Eq. (3.56). As propriedades gerais das interações nucleares, tanto relativísticas quanto não relativísticas, são frequentemente descritas em termos dos chamados parâmetros nucleares empíricos, definidos como os coeficientes da seguinte expansão em série no parâmetro x (PIEKAREWICZ; CENTELLES, 2009):

$$e_{is} = E_{sat} + \frac{1}{2} K_{sat} x^2 + \frac{1}{3!} Q_{sat} x^3 + \frac{1}{4!} Z_{sat} x^4 + \dots, \quad (3.62)$$

$$e_{iv} = E_{sym} + L_{sym} x + \frac{1}{2} K_{sym} x^2 + \frac{1}{3!} Q_{sym} x^3 + \frac{1}{4!} Z_{sym} x^4 + \dots, \quad (3.63)$$

onde e_{is} representa a energia isoescalar, em que a energia isoescalar é a energia por partícula para matéria simétrica, ou seja, para $y = 1/2$, e e_{iv} é a contribuição para matéria assimétrica, ambas contribuindo para a energia por nucleon da matéria nuclear da seguinte forma

$$e(\rho, y) = e_{is}(\rho) + e_{iv}(\rho) \delta^2. \quad (3.64)$$

A componente isovetorial e_{iv} é identificada com a energia de simetria do sistema em função da densidade, $S(\rho)$, na aproximação parabólica em δ , ou seja, $S(\rho) = \frac{1}{2} (\partial^2 e / \partial \delta^2)_{\delta=0} = e_{iv}(\rho)$. Os parâmetros empíricos que aparecem nas expansões (3.62) e (3.63) são usualmente agrupados em dois conjuntos: o canal isoescalar e o canal isovetorial. O primeiro inclui a energia de saturação $E_{sat} = e_{is}(\rho_{sat}) = e(\rho_{sat}, 1/2)$, a incompressibilidade K_{sat} , o coeficiente de skewness isoescalar Q_{sat} e a kurtosis isoescalar Z_{sat} , todos também em $\rho = \rho_{sat}$. Já o canal isovetorial compreende a energia de simetria na densidade de saturação $E_{sym} = S(\rho_{sat}) = e_{iv}(\rho_{sat})$, sua inclinação L_{sym} , sua incompressibilidade (ou

curvatura) isovetorial K_{sym} , seu coeficiente de skewness isovetorial Q_{sym} e sua kurtosis isovetorial Z_{sym} , todas em $\rho = \rho_{sat}$. Embora a nomenclatura desses parâmetros varie na literatura, as Eqs. (3.62) e (3.63) estabelecem definições inequívocas. Uma síntese detalhada das diferentes terminologias empregadas pode ser encontrada no apêndice de (JIN *et al.*, 2003).

Cada parametrização do metamodelo é especificada pelos coeficientes $v_{sat,j}$ e $v_{sym,j}$, juntamente com as constantes κ_{sat} e κ_{sym} . Dessa forma, para $N = 4$, correspondente à ordem da expansão adotada nesta dissertação, uma parametrização é completamente descrita por 12 parâmetros. Esses parâmetros, por sua vez, são expressos em termos dos parâmetros nucleares empíricos ρ_{sat} , E_{sat} , K_{sat} , Q_{sat} , Z_{sat} , E_{sym} , L_{sym} , K_{sym} , Q_{sym} e Z_{sym} , além de $m_p^*(\rho_{sat}, 0) = m_n^*(\rho_{sat}, 0) \equiv m_{sat}^*$ e $\Delta m_{sat}^* = m_n^*(\rho_{sat}, 1) - m_p^*(\rho_{sat}, 1)$. Os dois últimos são extraídos diretamente da Eq. (3.61). Os coeficientes $v_{sat,j}$ são obtidos impondo $\mathcal{E}_{mm}(\rho, 1/2) = e_{is}(\rho)$, enquanto os coeficientes $v_{sym,j}$ são determinados a partir da condição $S_{mm}(\rho) = \frac{1}{2}(\partial^2 E_{mm}/\partial \delta^2)_{\delta=0} = e_{iv}(\rho)$. Para essas últimas relações, é necessário considerar também expansões adequadas da parte cinética do metamodelo. As formas funcionais são dadas em (MARGUERON *et al.*, 2018a). Além disso, é importante destacar que a função $u_j(x, \delta)$, presente na parte potencial, não é considerada na determinação dos coeficientes $v_{sat,j}$ e $v_{sym,j}$, ou seja, foi adotado $u_j = 1$ nesse procedimento. Somente após essa etapa a função foi incorporada ao metamodelo, com o objetivo de corrigir o comportamento em baixas densidades, conforme a versão ELFc discutida em (MARGUERON *et al.*, 2018a) e utilizada nesta dissertação.

A variação das quantidades termodinâmicas do metamodelo em função da densidade é mostrada nas figuras a seguir, utilizando os valores centrais dos intervalos dos parâmetros

nucleares empíricos dados por (MARGUERON *et al.*, 2018a)

$$\rho_{sat} = (0,155 \pm 0,005) \text{ fm}^{-3}, \quad (3.65)$$

$$E_{sat} = (-15,8 \pm 0,3) \text{ MeV}, \quad (3.66)$$

$$\frac{m_{sat}^*}{m} = 0,75 \pm 0,1, \quad (3.67)$$

$$K_{sat} = (230 \pm 20) \text{ MeV}, \quad (3.68)$$

$$Q_{sat} = (300 \pm 400) \text{ MeV}, \quad (3.69)$$

$$Z_{sat} = (-500 \pm 1000) \text{ MeV}, \quad (3.70)$$

$$\frac{\Delta m_{sat}^*}{m} = 0,1 \pm 0,1, \quad (3.71)$$

$$E_{sym} = (32 \pm 2) \text{ MeV}, \quad (3.72)$$

$$L_{sym} = (60 \pm 15) \text{ MeV}, \quad (3.73)$$

$$K_{sym} = (-100 \pm 100) \text{ MeV}, \quad (3.74)$$

$$Q_{sym} = (0 \pm 400) \text{ MeV}, \quad (3.75)$$

$$Z_{sym} = (-500 \pm 1000) \text{ MeV}. \quad (3.76)$$

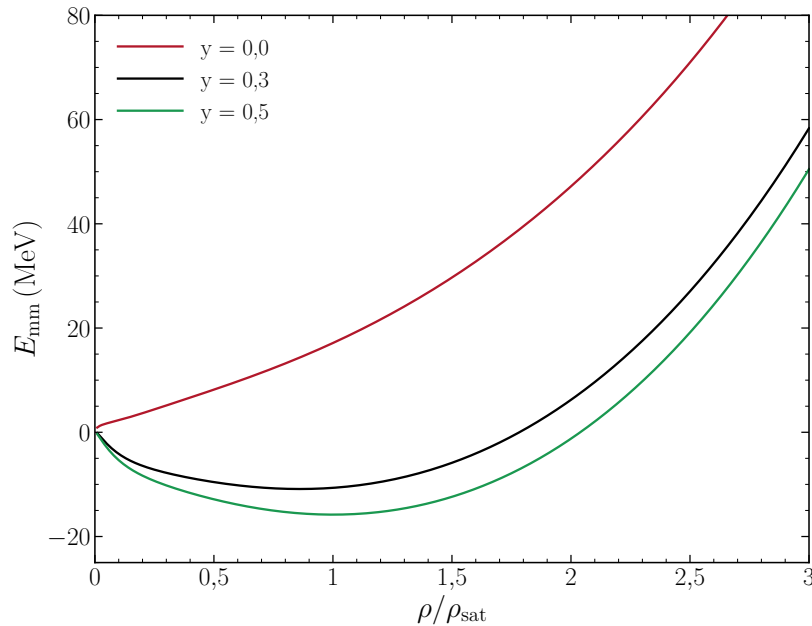


FIGURA 3.1 – Energia por partícula do metamodelo em função da razão ρ/ρ_{sat} para diferentes valores da fração de prótons y .

Note que a energia por partícula do metamodelo, mostrada na Fig. 3.1, apresenta um mínimo em $y = 0,5$ para $\rho/\rho_{sat} = 1$, exatamente como esperado, uma vez que o modelo foi construído para reproduzir a energia de ligação nesse ponto, igual a $-15,8$ MeV. Essa estrutura, por outro lado, é perdida no caso da matéria pura de nêutrons, para a qual $y = 0$. Note que a pressão se anula exatamente em $\rho/\rho_{sat} = 1$, Fig. 3.2, devido à relação

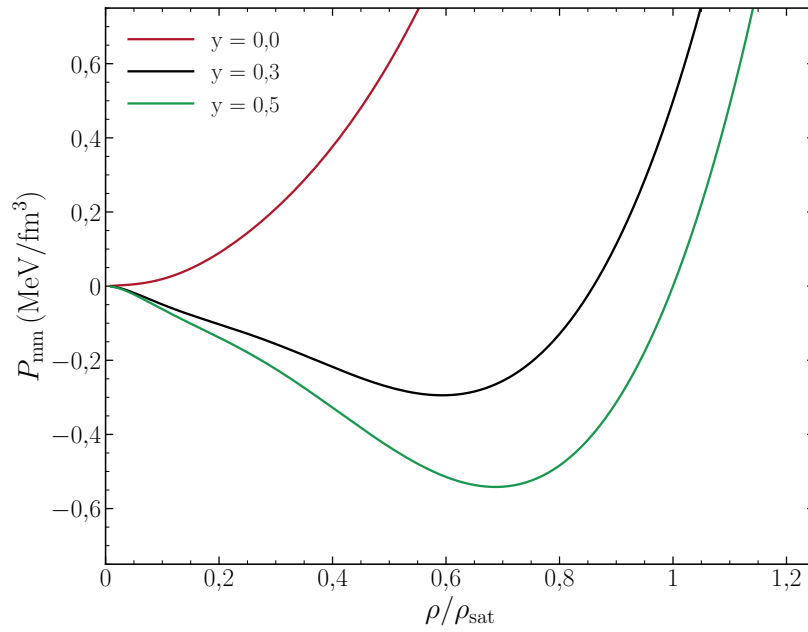


FIGURA 3.2 – Pressão do metamodelo em função da razão ρ/ρ_{sat} para diferentes valores da fração de prótons y .

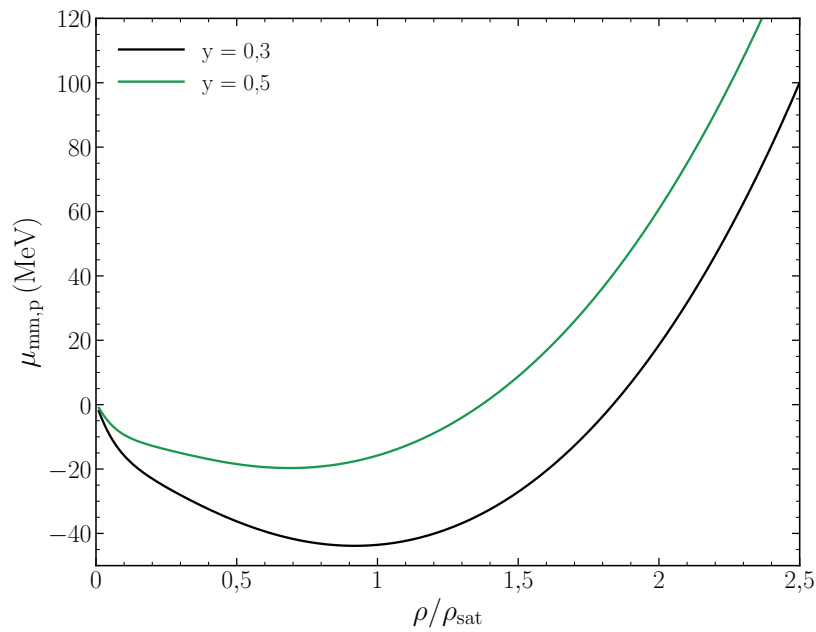


FIGURA 3.3 – Potencial químico de prótons do metamodelo em função da razão ρ/ρ_{sat} para diferentes valores da fração de prótons y .

termodinâmica prevista em modelos que apresentam um mínimo na energia por partícula. Finalmente, veja que $\mu_{mm,p}(\rho, 1/2) = \mu_{mm,n}(\rho, 1/2)$ conforme as Eqs. (3.59) e (3.60).

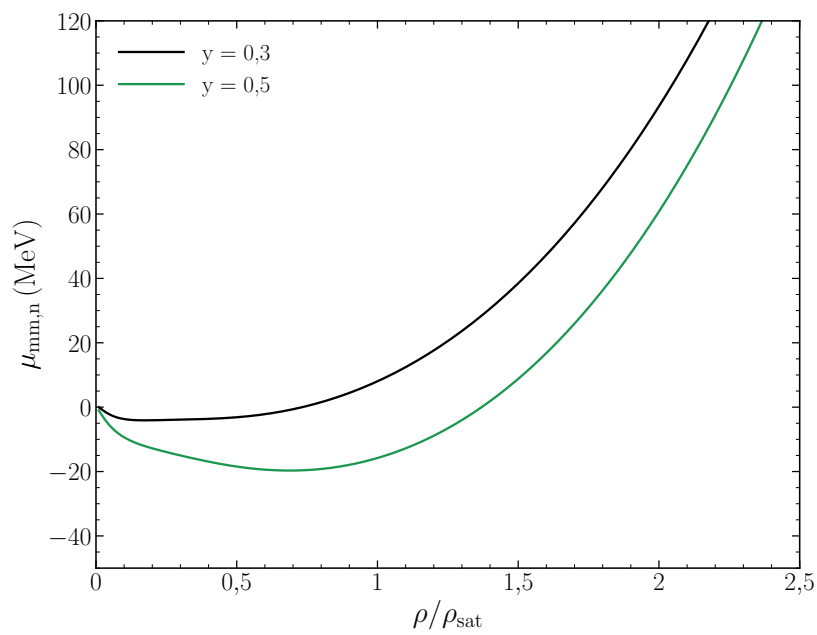


FIGURA 3.4 – Potencial químico de nêutrons do metamodelo em função da razão ρ/ρ_{sat} para diferentes valores da fração de prótons y .

4 Estrelas de nêutrons

Em 1932, o nêutron foi descoberto por James Chadwick, que comprovou sua existência ao bombardear berílio com partículas α , recebendo o Prêmio Nobel de Física em 1935. No ano seguinte, Baade e Zwicky (BAADE; ZWICKY, 1934) propuseram que as supernovas seriam explosões estelares que dariam origem a *estrelas de nêutrons* (GLENDEENING, 1996). Décadas depois, Rosenfeld recordou a discussão de 1931 entre Bohr e Landau, em que este já sugeria a existência de “estrelas estranhas” (YAKOVLEV *et al.*, 2012). A confirmação observacional, contudo, só viria após a descoberta dos pulsares (HEWISH *et al.*, 1968).

A hipótese de Baade e Zwicky (BAADE; ZWICKY, 1934) motivou Oppenheimer e Volkoff a aplicarem a relatividade geral ao estudo dessas estrelas, formulando as equações de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) (OPPENHEIMER; VOLKOFF, 1939), apresentadas no Apêndice B. Em 1939, eles consideraram uma configuração composta por gás livre de nêutrons e obtiveram uma massa máxima de cerca de $0,7 M_{\odot}$ (SCHAFFNER-BIELICH, 2020). Com base nas soluções aproximadas de Tolman (1939), concluiu-se que forças repulsivas não aumentariam esse limite, hipótese hoje superada pela compreensão moderna das interações nucleares. Posteriormente, Woltjer (1964) mostrou que a conservação do fluxo magnético durante o colapso de uma estrela poderia gerar campos de 10^{12} – 10^{13} G (WOLTJER, 1964). Pouco depois, Pacini (1967) propôs que a energia rotacional de uma estrela de nêutrons magnetizada poderia alimentar a radiação observada (PACINI, 1967). Em 1967, a estudante Jocelyn Bell, sob a orientação de Anthony Hewish, detectou pulsos de rádio com período de 1,33 s, revelando o primeiro pulsar (SCHAFFNER-BIELICH, 2020). Essa descoberta confirmou, mais de trinta anos após as previsões teóricas, a existência efetiva das estrelas de nêutrons.

4.1 Pulsares

Acredita-se que os pulsares sejam estrelas de nêutrons em rotação e fortemente magnetizadas. Quando o eixo magnético está inclinado em relação ao eixo de rotação, a radiação emitida em torno do eixo magnético varre o espaço como um farol. Se a linha de visada da Terra atravessar esse cone de emissão, observamos pulsos periódicos de radiação (GLEN-

DENNING, 1996). A intensidade e o formato dos pulsos variam de acordo com o ângulo de inclinação e com as propriedades do campo magnético da estrela. Em alguns casos, como na Nebulosa do Caranguejo, a emissão se estende do rádio até os raios X, embora a maioria dos pulsares seja observada apenas em frequências de rádio (GLENDEENING, 1996).

Desde a descoberta do primeiro pulsar, PSR 1919+21, por Hewish e Bell em 1967 (HEWISH *et al.*, 1968), milhares de pulsares foram identificados, incluindo os da Nebulosa do Caranguejo e de Vela, ambos localizados em remanescentes de supernova (GLENDEENING, 1996). Esses dois objetos, com períodos de 33 ms e 89 ms, respectivamente, confirmaram que as fontes pulsantes eram de fato estrelas de nêutrons, e não anãs brancas. A maioria dos pulsares conhecidos foi descoberta nas décadas seguintes por radiotelescópios como os de Arecibo, Jodrell Bank, Molonglo e Green Bank. Já foram identificados pulsares fora da Via Láctea, como o PSR 0540–69 na Grande Nuvem de Magalhães e o PSR 0042–73 na Pequena Nuvem de Magalhães (GLENDEENING, 1996). Estima-se que, até 2022, cerca de 3.300 pulsares sejam conhecidos em nossa Galáxia.

Pulsares também foram detectados em sistemas binários. O mais notável é o pulsar de Hulse e Taylor (1974), no sistema PSR 1913+16, cuja órbita revelou indiretamente a emissão de ondas gravitacionais. Outro caso importante é o pulsar descoberto por Wolszczan (WOLSZCZAN, 1991), com período de 27,9 ms, e o pulsar de milissegundo PSR 1937+21, descoberto por Backer *et al.* (1982) (BACKER *et al.*, 1982), com período de apenas 1,56 ms, o primeiro dessa classe. Em 1991, Manchester, Lyne, Robison, D’Amico, Bailes e Lim (MANCHESTER *et al.*, 1991) confirmaram a presença de dez pulsares de milissegundo em aglomerados globulares, ambientes onde a densidade estelar é milhares de vezes maior que no disco da Galáxia, favorecendo a formação de sistemas binários. Pouco depois, Wolszczan e Frail (WOLSZCZAN; FRAIL, 1992) descobriram planetas orbitando um pulsar de milissegundo, os primeiros planetas detectados fora do Sistema Solar (GLENDEENING, 1996).

O modelo para explicar os pulsares foi proposto por Pacini (PACINI, 1967) e Gold (T., 1968), que mostraram que uma estrela de nêutrons magnetizada em rotação pode emitir radiação periódica estável. A energia irradiada pelo pulsar do Caranguejo é da ordem de 10^{38} erg/s, e a energia rotacional armazenada em uma estrela de ~ 10 km e massa solar pode chegar a 10^{44} erg (GLENDEENING, 1996). Pela conservação do momento angular e do fluxo magnético, o colapso estelar intensifica tanto a rotação quanto o campo magnético, atingindo valores típicos de 10^{12} G. O torque magnético e o vento de partículas relativísticas produzem uma desaceleração gradual da rotação (spin-down) (GOLDREICH; JULIAN, 1969). Os efeitos do vento e da radiação de dipolo rotativo são observados, por exemplo, na Nebulosa do Caranguejo, cujos filamentos de gás são acelerados até velocidades próximas de $0,5c$. A luminosidade e a expansão dessa nebulosa inspiraram

Pacini (PACINI, 1967) a propor que o objeto central é uma estrela de nêutrons magnetizada em rotação. Segundo as equações de Oppenheimer–Volkoff, a densidade de energia é máxima no centro da estrela e decresce até a superfície, o que implica que o objeto deve ser eletricamente neutro e composto predominantemente por nêutrons (GLENDEENING, 1996). As estrelas de nêutrons apresentam densidades centrais da ordem de várias vezes a densidade de saturação da matéria nuclear. Suas camadas externas são formadas por elementos pesados, principalmente ferro, produto final das reações de fusão no progenitor. Mesmo em estágios avançados de resfriamento, a temperatura superficial dessas estrelas permanece elevada quando comparada aos padrões terrestres (GLENDEENING, 1996).

4.2 Teoria envolvida

Estrelas de nêutrons são mantidas coesas principalmente pela gravidade, e não pela força nuclear, embora esta desempenhe papel fundamental na determinação de suas propriedades internas. A força nuclear forte é de curto alcance, atuando apenas entre nucleons vizinhos, enquanto a gravitação é de longo alcance e age sobre toda a massa-energia do sistema. Em objetos tão compactos e massivos, a gravidade é, portanto, a força dominante de ligação (GLENDEENING, 1996). Pode-se estimar a energia de ligação gravitacional por nucleon de uma estrela de nêutrons típica (com $M \approx 1,4 M_{\odot}$ e $R \approx 10$ km) $E_G/A \sim \frac{3GMm_N}{5R} \approx 150$ MeV por nucleon, valor muito superior à energia de ligação nuclear em densidade de saturação, que é de cerca de 16 MeV por nucleon. Isso ilustra que o confinamento gravitacional é centenas de vezes mais intenso que o das forças nucleares que mantêm os núcleos atômicos coesos.

Em densidades próximas e acima da densidade de saturação, a parte repulsiva da interação nuclear torna-se dominante. A energia necessária para comprimir a matéria até as densidades encontradas no centro das estrelas de nêutrons mais massivas é da ordem de 200–300 MeV por nucleon. Dessa forma, a energia total de ligação gravitacional líquida de uma estrela próxima ao limite máximo de massa é de aproximadamente 100 MeV por nucleon, em comparação com nucleons isolados no infinito. Assim, embora a força nuclear atue contra a compressão, ela é a responsável por definir a equação de estado da matéria densa, que por sua vez determina a estrutura e a estabilidade das estrelas de nêutrons (GLENDEENING, 1996).

4.3 Estrutura

A estrutura de uma estrela de nêutrons é altamente estratificada, com propriedades físicas que variam drasticamente da superfície até o centro. Partindo das regiões mais

externas, podemos identificar sucessivamente a atmosfera, a crosta, dividida em partes externa e interna, e o núcleo, que por sua vez se subdivide em núcleo externo e núcleo interno. Cada uma dessas camadas apresenta composições, densidades e comportamentos distintos, mas todas se mantêm em equilíbrio sob a ação conjunta da gravidade e da pressão da matéria degenerada (SCHAFFNER-BIELICH, 2020).

- **Atmosfera:** parte da estrela extremamente fina, cuja espessura varia de milímetros a centímetros. Assim, sua contribuição para o raio total da estrela pode ser desprezada (SCHAFFNER-BIELICH, 2020). Apesar de ser delgada, a atmosfera determina as propriedades espectrais observadas, já que o livre caminho médio dos fótons é menor que a própria espessura atmosférica. A composição atmosférica varia conforme a história evolutiva da estrela. Em sistemas binários, pode ser dominada por hidrogênio proveniente da acreção do material da companheira. Em estrelas isoladas, que se movem pelo meio interestelar, a atmosfera também tende a ser composta por hidrogênio. Já em estrelas recém-formadas, a atmosfera reflete o material *fallback* da supernova, rico em elementos pesados (SCHAFFNER-BIELICH, 2020).
- **Crosta externa:** a crosta externa é bem descrita pelo modelo BPS proposto por Baym, Pethick e Sutherland (BAYM *et al.*, 1971), no qual se supõe equilíbrio β . Diferentemente das anãs-brancas, compostas por hélio ou carbono-oxigênio, as estrelas de nêutrons contêm elementos mais pesados produzidos durante a supernova. Nêutrons podem ser facilmente capturados pelos núcleos, pois não há barreira de Coulomb (SCHAFFNER-BIELICH, 2020). Com o aumento da densidade, a energia de Fermi dos elétrons torna-se comparável à energia de ligação atômica, e a pressão passa a ser dominada pela degenerescência eletrônica, enquanto a densidade de energia é dominada pela massa nuclear. Dessa forma, a equação de estado da crosta externa é análoga à das anãs-brancas (SCHAFFNER-BIELICH, 2020). À medida que a densidade cresce, torna-se energeticamente favorável a conversão de prótons e elétrons em nêutrons. A composição nuclear muda quando a energia de Fermi dos elétrons iguala a diferença de energia entre nêutrons e prótons. Para determinar a configuração mais estável em cada densidade, busca-se o núcleo que minimiza a energia total do sistema, levando em conta a energia de ligação $E_b(A, Z)$ de cada espécie nuclear (SCHAFFNER-BIELICH, 2020).
- **Crosta interna:** a crosta interna inicia-se na densidade de *neutron drip*, cerca de 4×10^{11} g/cm³, ponto em que nêutrons começam a escapar dos núcleos e formam um líquido separado. Essa condição ocorre quando o potencial químico por bárion se iguala à massa de repouso do nêutron. O valor exato da densidade de *neutron drip* depende do modelo nuclear, uma vez que pequenas variações no potencial nucleônico afetam significativamente o potencial químico e, portanto, a densidade correspon-

dente (SCHAFFNER-BIELICH, 2020). A estrutura da crosta interna é semelhante à da crosta externa: uma rede de núcleos imersos em um mar de elétrons e nêutrons livres. Os nêutrons formam um superfluido que rotaciona junto com a estrela e, durante a rotação, esse superfluido desenvolve vórtices quantizados que carregam o momento angular, permanecendo irrotacional fora dos núcleos dos vórtices (SCHAFFNER-BIELICH, 2020).

- **Núcleo externo:** no núcleo externo, a estrutura cristalina desaparece e os núcleos se dissolvem, formando um fluido homogêneo de nêutrons com baixa fração de prótons e elétrons em equilíbrio β . Essa região pode ser tratada como *bulk matter*, descrita por propriedades macroscópicas contínuas, como densidade, temperatura e pressão (SCHAFFNER-BIELICH, 2020). É nessa região que a matéria de nêutrons, propriamente dita, se torna dominante.
- **Núcleo interno:** o núcleo interno representa a região mais profunda e densa da estrela de nêutrons, onde as densidades podem ultrapassar várias vezes a densidade de saturação nuclear. Nessas condições extremas, as incertezas sobre a equação de estado tornam-se significativas. Modelos teóricos baseados na cromodinâmica quântica e em interações de muitos corpos preveem que, além de nêutrons e prótons, podem surgir partículas exóticas, como híperons (Λ , Σ , Ξ), condensados de mésons (π^- ou K^-), e possivelmente matéria de quarks desconfiados (GLENDEENING, 1996). A presença dessas partículas afeta a rigidez da equação de estado e, conseqüentemente, a massa máxima que a estrela pode sustentar. Assim, o estudo do núcleo interno constitui uma das principais ligações entre a astrofísica observacional e a física das interações fortes em regime de densidade extrema.

No capítulo seguinte, utilizaremos o metamodelo para descrever o núcleo interno das estrelas de nêutrons e, junto com equações específicas para a crosta, construiremos os diagramas massa–raio a partir da solução das equações de Tolman–Oppenheimer–Volkoff (TOV), analisando como os parâmetros nucleares empíricos afetam essas curvas.

5 Diagramas massa-raio obtidos pelo metamodelo

Neste capítulo, calculamos os diagramas massa-raio a partir da solução das equações TOV, dadas nas Eqs. (B.9)-(B.10) do Apêndice B, com o objetivo de verificar o efeito dos parâmetros nucleares empíricos nessas curvas. Assim como discutido em (MARGUERON *et al.*, 2018b), deixaremos de fora desta análise alguns desses parâmetros, ou seja, fixaremos em todas as curvas os valores $E_{sat} = -15,8$ MeV, $\rho_{sat} = 0,155$ fm⁻³, $m_{sat}^*/m = 0,75$ e $\Delta m_{sat}^*/m = 0,1$. A razão para mantermos tais quantidades inalteradas é que esses parâmetros empíricos são suficientemente bem conhecidos (caso de E_{sat} e ρ_{sat}) e têm um impacto muito pequeno na equação de estado do metamodelo, conforme mostrado em (MARGUERON *et al.*, 2018b).

As equações para densidade de energia e pressão que servem como input para as Eqs. (B.9)-(B.10) são dadas da seguinte forma

$$\varepsilon = \mathcal{E}_{crosta} + \mathcal{E}_{mm}(\rho, y) + m\rho + \frac{\mu_e^4(\rho_e)}{4\pi^2} + \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\sqrt{\mu_\mu^2(\rho_e) - m_\mu^2}} dk k^2 (k^2 + m_\mu^2)^{1/2}, \quad (5.1)$$

$$p = P_{crosta} + P_{mm}(\rho, y) + \frac{\mu_e^4(\rho_e)}{12\pi^2} + \frac{1}{3\pi^2} \int_0^{\sqrt{\mu_\mu^2(\rho_e) - m_\mu^2}} dk k^4 (k^2 + m_\mu^2)^{-1/2}, \quad (5.2)$$

nas quais os dois últimos termos são devidos às contribuições dos léptons ao sistema da matéria estelar: elétrons sem massa e múons de massa $m_\mu = 105,7$ MeV. O potencial químico dos elétrons é uma função da densidade dessas partículas, ou seja, $\mu_e = (3\pi^2\rho_e)^{1/3}$. As condições de neutralidade de cargas e equilíbrio químico que devem ser atendidas na descrição das estrelas de nêutrons são dadas por (GLENDENNING, 1996)

$$\rho_p(\rho, y) - \rho_e = \rho_\mu(\rho_e) \quad (5.3)$$

e

$$\mu_{mm,n}(\rho, y) - \mu_{mm,n}(\rho, y) = \mu_e(\rho_e), \quad (5.4)$$

com $\rho_\mu = [(\mu_\mu^2 - m_\mu^2)^{3/2}]/(3\pi^2)$ e $\mu_\mu = \mu_e$, onde os potenciais químicos de prótons e nêutrons são os dados pelo metamodelo nas Eqs. (3.59)-(3.60). Para cada densidade ρ , essas duas últimas equações são resolvidas simultaneamente para determinar y e ρ_e , quantidades então usadas nas Eqs. (5.1)-(5.2). A contribuição da crosta estelar, representada por $\mathcal{E}_{\text{crosta}}$ e P_{crosta} , é dividida em partes externa e interna. A crosta externa é descrita pela EOS de Baym-Pethick-Sutherland (BPS) no intervalo de densidades $0,6295 \times 10^{-11} \text{ fm}^{-3} \leq \rho \leq 0,199 \times 10^{-3} \text{ fm}^{-3}$ (Tabela 5 de (BAYM *et al.*, 1971)). A crosta interna é modelada utilizando a interação nuclear de Skyrme SLy4 (CHABANAT *et al.*, 1998), dentro de uma abordagem de gota líquida compressível, para o intervalo de densidades $0,20905 \times 10^{-3} \text{ fm}^{-3} \leq \rho \leq 0,73174 \times 10^{-1} \text{ fm}^{-3}$ (Tabela 3 de (DOUCHIN; HAENSEL, 2001)). Finalmente, o núcleo da estrela é representado aqui pelas equações do metamodelo, ou seja, \mathcal{E}_{mm} e P_{mm} , para o intervalo $\rho \geq 0,5\rho_{\text{sat}}$. Ressaltamos também que, precisamos restringir o intervalo de densidades de tal forma que a velocidade do som, dada por $v_s^2 = \partial p / \partial \varepsilon$, seja sempre menor que a unidade, já que o metamodelo descrito aqui é não-relativístico.

Começamos mostrando o efeito da variação dos parâmetros isoescares. Na Fig. 5.1 variamos a incompressibilidade. Note que a variação de K_{sat} no intervalo mostrado não

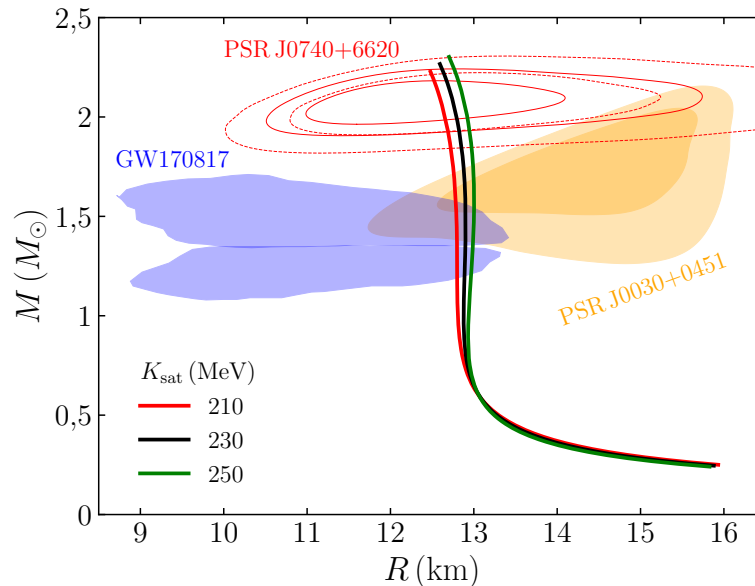


FIGURA 5.1 – Diagramas massa-raio construídos a partir do metamodelo para parametrizações com diferentes valores de K_{sat} . Na figura também comparamos os resultados do modelo com os contornos referentes à análise NICER-XMM-Newton dos pulsares (i) PSR J0030+0451: contornos laranja (VINCI-GUERRA *et al.*, 2024), e (ii) PSR J0740+6620: contorno vermelho sólido (SALMI *et al.*, 2024) e contorno vermelho tracejado (DITTMANN *et al.*, 2024). Também comparamos os resultados com os dados observacionais relativos ao evento GW170817: contornos azuis (ABBOTT *et al.*, 2018).

gera muito impacto nos diagramas. Como esperado, a massa máxima produzida pelas parametrizações é maior para valores maiores de K_{sat} . Lembremos que a incompressibilidade é uma medida do quanto o sistema é incompressível e, portanto, do quanto pode suportar a gravidade no caso da estrutura estelar. Na Fig. 5.2, a variação é feita no parâmetro Q_{sat} e, finalmente, Z_{sat} é variado na Fig. 5.3. É possível perceber que, à medida que Q_{sat}

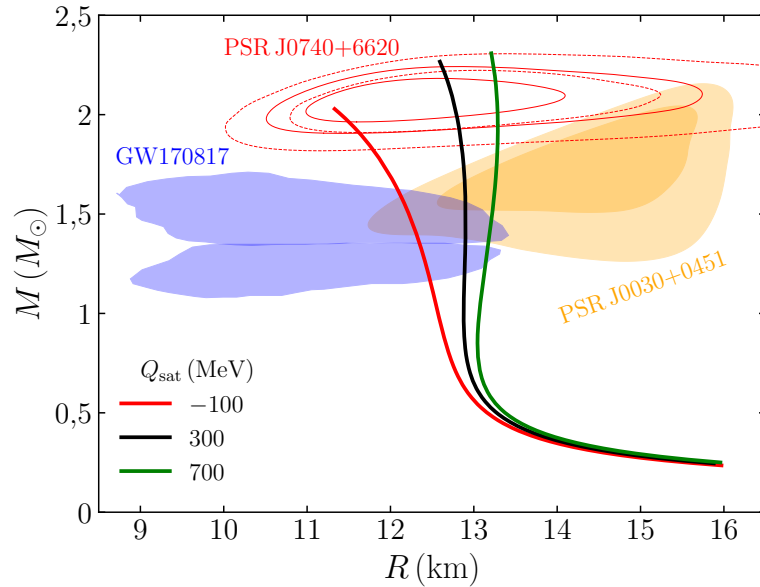


FIGURA 5.2 – Diagramas massa-raio construídos a partir do metamodelo para parametrizações com diferentes valores de Q_{sat} . Os dados representados pelos contornos são os mesmos mostrados na Fig. 5.1.

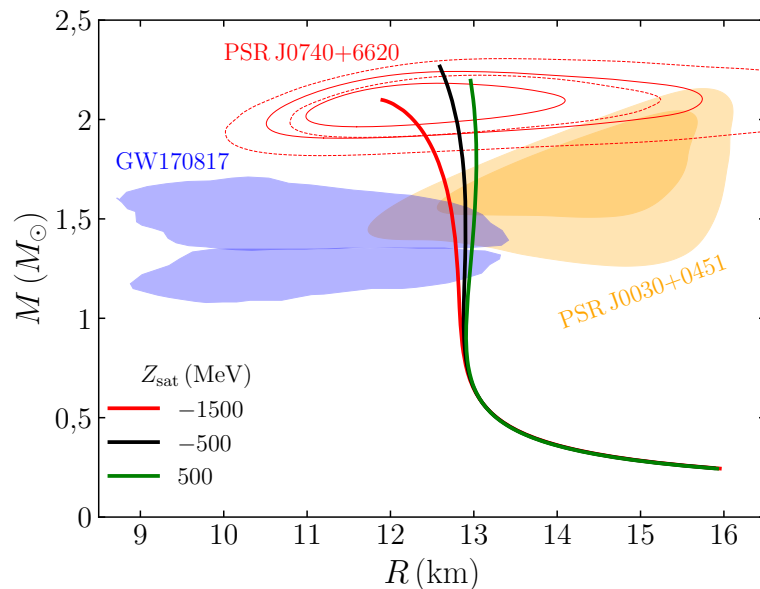


FIGURA 5.3 – Diagramas massa-raio construídos a partir do metamodelo para parametrizações com diferentes valores de Z_{sat} . Os dados representados pelos contornos são os mesmos mostrados na Fig. 5.1.

aumenta, a massa máxima também cresce, indicando que a equação de estado se torna mais “dura”. Observa-se ainda que, para estrelas com massa superior a aproximadamente

$0,5M_{\odot}$, o raio também aumenta. Com relação à variação de Z_{sat} , nota-se que seu impacto é menor do que o causado por Q_{sat} . Além disso, observa-se que os efeitos tornam-se mais pronunciados para estrelas de maiores massas ($\gtrsim 1,25M_{\odot}$), em comparação com o caso anterior, indicando que esse parâmetro empírico é mais relevante em densidades mais altas.

Passamos agora a analisar, nas próximas figuras, o efeito dos parâmetros empíricos isovetoriais, começando por E_{sym} , cuja variação é exibida na Fig. 5.4. A figura mostra

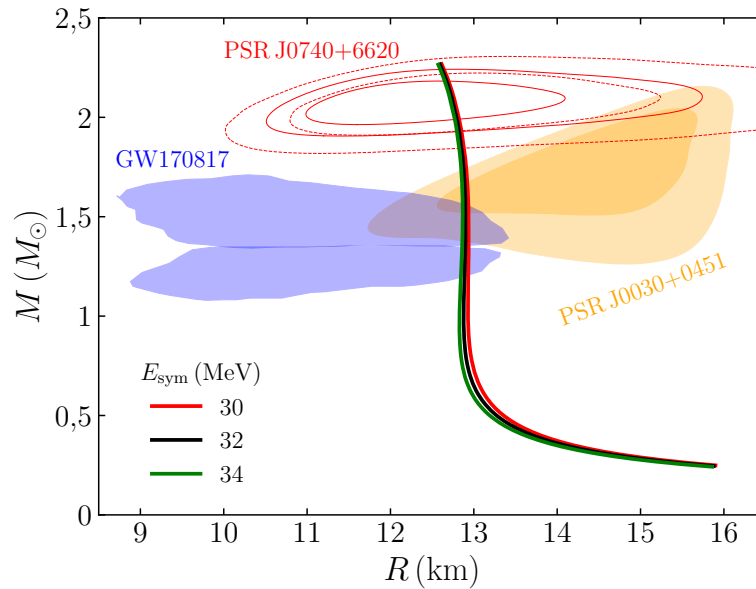


FIGURA 5.4 – Diagramas massa-raio construídos a partir do metamodelo para parametrizações com diferentes valores de E_{sym} . Os dados representados pelos contornos são os mesmos mostrados na Fig. 5.1.

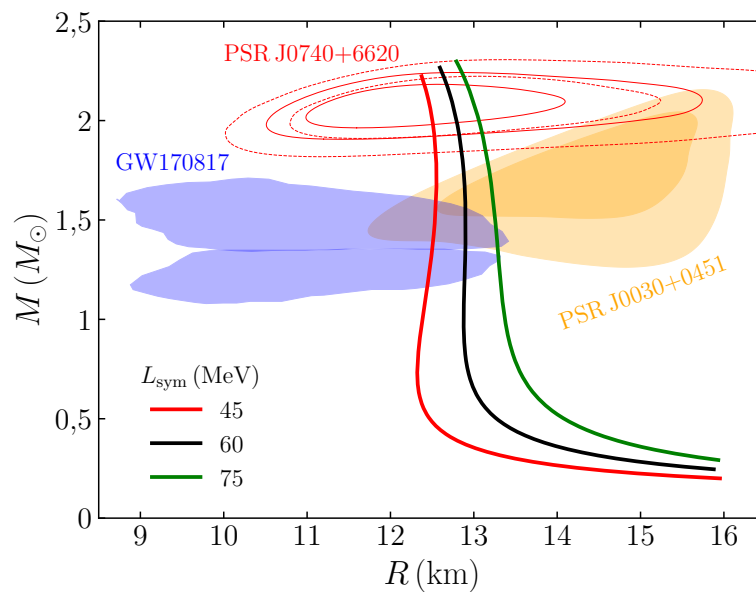


FIGURA 5.5 – Diagramas massa-raio construídos a partir do metamodelo para parametrizações com diferentes valores de L_{sym} . Os dados representados pelos contornos são os mesmos mostrados na Fig. 5.1.

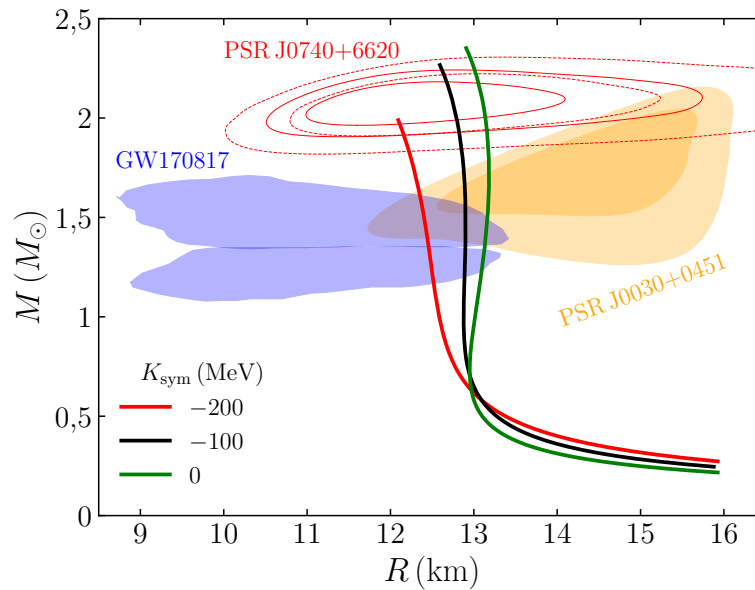


FIGURA 5.6 – Diagramas massa-raio construídos a partir do metamodelo para parametrizações com diferentes valores de K_{sym} . Os dados representados pelos contornos são os mesmos mostrados na Fig. 5.1.

claramente que E_{sym} tem impacto quase nulo nos diagramas, diferentemente do que acontece com a variação de L_{sym} e K_{sym} , de acordo com as Figs. 5.5 e 5.6, respectivamente. É interessante notar que o maior impacto da variação de L_{sym} é observado para massas mais baixas, que correspondem a densidades centrais mais baixas também, enquanto o impacto de K_{sym} é mais significativo em massas maiores. Isso é uma consequência da expansão de Taylor, na qual a construção do metamodelo está baseada, ou seja, o impacto dos parâmetros empíricos de ordem superior é maior em densidades mais altas, enquanto os parâmetros empíricos de ordem inferior são mais importantes em torno da densidade de saturação (MARGUERON *et al.*, 2018b). Por fim, mostramos nas Figs. 5.7 e 5.8 o impacto da variação de Q_{sym} e Z_{sym} . Note que o efeito é bastante semelhante ao observado para os parâmetros empíricos correspondentes de mesma ordem no canal isoescalar, Q_{sat} e Z_{sat} . Em ambos os casos, as correções associadas a termos de ordem mais alta da expansão de Taylor refletem-se principalmente nas regiões de maior densidade, onde as contribuições não lineares da energia de simetria tornam-se mais relevantes. Observa-se novamente que a diferença entre as curvas passa a ser mais evidente para massas estelares maiores ou, de forma equivalente, para densidades centrais mais elevadas. Esse comportamento é consistente com a natureza hierárquica da expansão: parâmetros de ordem superior, como Z_{sym} , influenciam mais fortemente o regime de altas densidades, enquanto os de ordem inferior, como Q_{sym} , exercem papel dominante em densidades mais baixas.

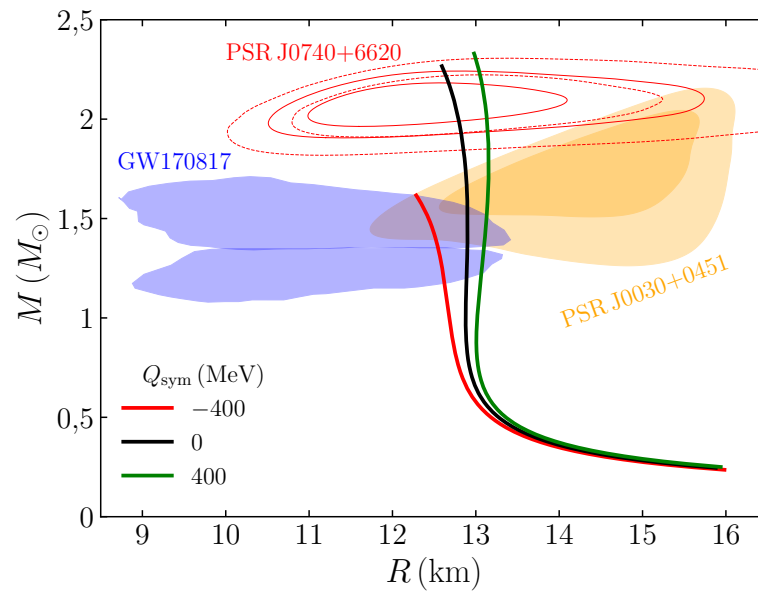


FIGURA 5.7 – Diagramas massa-raio construídos a partir do metamodelo para parametrizações com diferentes valores de Q_{sym} . Os dados representados pelos contornos são os mesmos mostrados na Fig. 5.1.

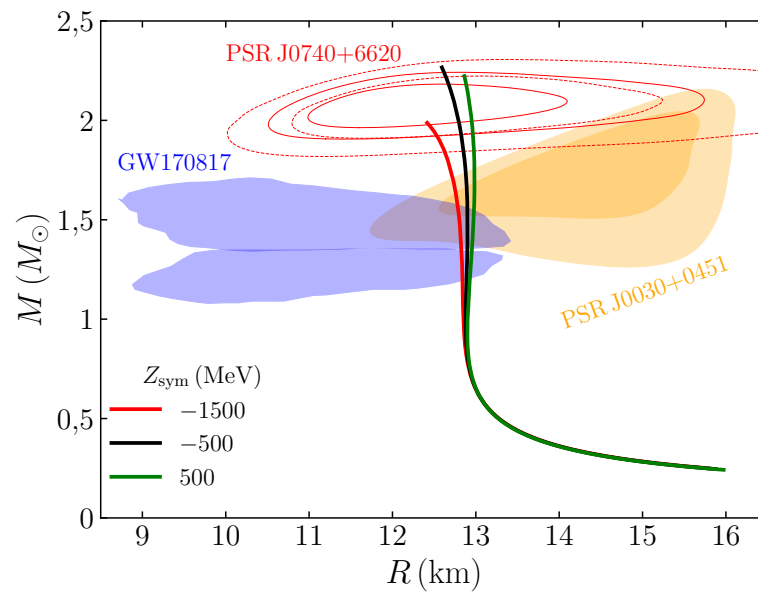


FIGURA 5.8 – Diagramas massa-raio construídos a partir do metamodelo para parametrizações com diferentes valores de Z_{sym} . Os dados representados pelos contornos são os mesmos mostrados na Fig. 5.1.

6 Conclusões e perspectivas

Nesta dissertação, investigou-se a equação de estado da matéria nuclear densa a partir do metamodelo proposto em (MARGUERON *et al.*, 2018a) com o objetivo de compreender como os parâmetros empíricos nucleares influenciam o diagrama massa-raio de estrelas de nêutrons. A abordagem adotada permitiu estabelecer uma ponte clara entre a microfísica nuclear, descrita pelos coeficientes da expansão do metamodelo em torno da densidade de saturação, e as grandezas macroscópicas que caracterizam os objetos compactos estudados.

O estudo iniciou-se pela formulação teórica do gás de Fermi não interagente, que serviu de base para a construção da parte cinética do metamodelo. Em seguida, a inclusão da parte potencial, expressa como uma série de Taylor no parâmetro de densidade reduzida, permitiu reconstruir a energia por partícula de forma sistemática e controlada, com coeficientes diretamente relacionados a parâmetros de bulk da matéria nuclear. Essa estrutura conferiu ao modelo clareza física e flexibilidade numérica, uma vez que cada parâmetro pôde ser variado independentemente para avaliar seu impacto sobre a equação de estado final (EOS). Com a EOS completa do modelo, obtiveram-se pressão e potenciais químicos de prótons e nêutrons. A EOS resultante foi então empregada na resolução numérica das equações de Tolman–Oppenheimer–Volkoff, permitindo a construção dos diagramas massa-raio sob condições de equilíbrio beta e neutralidade de carga.

Os resultados revelaram que os parâmetros isoescalares controlam a rigidez global da EOS e, portanto, a massa máxima suportada pela estrela. Em particular, a incompressibilidade K_{sat} e o parâmetro de skewness Q_{sat} aumentam a massa máxima quando seus valores crescem, indicando um “endurecimento” da EOS. Por outro lado, os parâmetros isovetoriais, especialmente a inclinação da energia de simetria L_{sym} e sua curvatura K_{sym} , exercem influência predominante sobre o raio estelar, em especial para massas intermediárias ($1,0–1,4 M_{\odot}$), enquanto os termos de ordem superior (Q_{sym} , Z_{sym}) tornam-se relevantes apenas em densidades centrais mais elevadas.

A comparação com os dados observacionais recentes, provenientes das missões NICER e da análise das ondas gravitacionais registradas no evento GW170817, demonstrou que o metamodelo é capaz de reproduzir curvas massa-raio compatíveis com esses vínculos astrofísicos recentes. Em síntese, o metamodelo mostrou-se uma ferramenta robusta para

explorar o espaço de incertezas da equação de estado nuclear. Sua estrutura hierárquica possibilita investigar de forma controlada o papel de cada parâmetro empírico e estabelecer conexões quantitativas entre a física nuclear e a astrofísica de objetos compactos. Trabalhos futuros poderão estender a abordagem aqui desenvolvida para incluir efeitos de temperatura finita e inclusão de híperons ou quarks, aprofundando a compreensão da matéria densa no interior das estrelas de nêutrons.

Referências

- ABBOTT, B. P.; ABBOTT, R.; ABBOTT, T. D.; ACERNESE, F.; ACKLEY, K.; ADAMS, C.; ADAMS, T.; ADDESSO, P.; ADHIKARI, R. X.; ADYA, V. B.; AFFELDT, C.; AGARWAL, B.; AGATHOS, M. *et al.* Gw170817: Measurements of neutron star radii and equation of state. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 121, p. 161101, oct 2018. Available at: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.121.161101>.
- BAADE, W.; ZWICKY, F. On super-novae. **PNAS**, v. 20, p. 254–259, may 1934. Available at: <https://www.pnas.org/doi/full/10.1073/pnas.20.5.254>.
- BACKER, D. C.; KULKARNI, S.; HEILES, C.; DAVIS, M. M.; GOSS, W. M. A millisecond pulsar. **Nature**, v. 300, p. 615–618, dec 1982. Available at: <https://research.rug.nl/en/publications/a-millisecond-pulsar/>.
- BAYM, G.; PETHICK, C.; SUTHERLAND, P. The ground state of matter at high densities: Equation of state and stellar models. **Astrophysical Journal**, v. 170, p. 299–317, may 1971. Available at: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1971ApJ...170..299B/abstract>.
- CARLSON, J.; GANDOLFI, S.; PEDERIVA, F.; STEVEN; PIEPER, C.; SCHIAVILLA, R.; SCHMIDT, K.; WIRINGA, R. Quantum monte carlo methods for nuclear physics. **arXiv**, p. 1–56, dec 2014. Available at: <https://arxiv.org/abs/1412.3081>.
- CHABANAT, E.; BONCHE, P.; HAENSEL, P.; MEYER, J.; SCHAEFFER, R. A skyrme parametrization from subnuclear to neutron star densities part ii. nuclei far from stabilities. **Nuclear Physics A**, v. 635, n. 1, p. 231–256, may 1998. ISSN 0375-9474. Available at: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0375947498001808>.
- DECHARGÉ, J.; GOGNY, D. Hartree-fock-bogolyubov calculations with the $d1$ effective interaction on spherical nuclei. **Phys. Rev. C**, American Physical Society, v. 21, p. 1568–1593, Apr 1980. Available at: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.21.1568>.
- DIRAC, P. A. M. On the theory of quantum mechanics. **Proc. R. Soc. Lond.**, v. 112, p. 661–677, mar 1926. Available at: <https://www.scirp.org/reference/referencespapers?referenceid=1714964>.
- DITTMANN, A. J.; MILLER, M. C.; LAMB, F. K.; HOLT, I. M.; CHIRENTI, C.; WOLFF, M. T.; BOGDANOV, S.; GUILLOT, S.; HO, W. C. G.; MORSINK, S. M.;

ARZOUMANIAN, Z.; GENDREAU, K. C. A more precise measurement of the radius of psr j0740+6620 using updated nicer data. **The Astrophysical Journal**, The American Astronomical Society, v. 974, n. 2, p. 295, oct 2024. Available at: <https://doi.org/10.3847/1538-4357/ad5f1e>.

DOUCHIN, F.; HAENSEL, P. A unified equation of state of dense matter and neutron star structure. **AA**, v. 380, n. 1, p. 151–167, dec 2001. Available at: <https://doi.org/10.1051/0004-6361:20011402>.

DUTRA, M.; FILHO, O. L.; MARTINS, J. S. S.; DELFINO, A.; STONE, J. R.; STEVENSON, P. D. Skyrme interaction and nuclear matter constraints. **Phys. Rev. C**, American Physical Society, v. 85, p. 035201, mar 2012. Available at: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.85.035201>.

DUTRA, M.; LOURENÇO, O.; AVANCINI, S. S.; CARLSON, B. V.; DELFINO, A.; MENEZES, D. P.; PROVIDÊNCIA, C.; TYPEL, S.; R., S. J. Relativistic mean-field hadronic models under nuclear matter constraints. **Physics Review C**, v. 90, p. 1–62, may 2014. Available at: <https://arxiv.org/abs/1405.3633>.

DUTRA M. LOURENÇO FILHO, O.; MARGUERON, J. Finite temperature description of fermi gases with in-medium effective mass. **The Astrophysical Journal**, The American Astronomical Society, v. 952, n. 1, p. 5, jul 2023. Available at: <https://dx.doi.org/10.3847/1538-4357/acd932>.

FERMI, E. Sulla quantizzazione del gas perfetto monoatomico. **Rend. Lincei**, v. 3, p. 145–149, mar 1926. Available at: <https://www.scirp.org/reference/referencespapers?referenceid=1714963>.

GENDREAU, K.; ARZOUMANIAN, Z. Searching for a pulse. **Nature Astronomy**, v. 1, p. 895–895, dec 2017. Available at: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2017NatAs...1..895G>.

GLENDENNING, N. K. **Compact Stars: Nuclear Physics, Particle Physics and General Relativity**. New York: Springer, 1996.

GOLDREICH, P.; JULIAN, H. W. Pulsar electrodynamics. **Astrophysical Journal**, v. 157, p. 869, aug 1969. Available at: <https://www.scirp.org/reference/referencespapers?referenceid=826244>.

GREINER, W.; NEISE, L.; STÖCKER, H. **Thermodynamics and Statistical Mechanics**. 1st. ed. New York: Springer-Verlag, 1997. (Classical Theoretical Physics). ISBN 978-0-387-94733-2.

GRIFFITHS, D. **Introduction to Quantum Mechanics**. 3rd. ed. United Kingdom: Cambridge University, 2018.

HEBELER, K.; J.D., H.; MENENDEZ, J.; SCHWENK, A. Nuclear forces and their impact on neutron-rich nuclei and neutron-rich matter. **Annual Review of Nuclear and Particle Science**, v. 65, p. 457–484, oct 2015. Available at: <https://www.annualreviews.org/content/journals/10.1146/annurev-nucl-102313-025446>.

- HERGERT, H. In-medium similarity renormalization group for closed and open-shell nuclei. **Phys. Scripta**, v. 92, p. 1–76, jul 2017. Available at: <https://arxiv.org/abs/1607.06882>.
- HEWISH, A.; BELL, S. J.; PILKINGTON, J. D. H.; SCOTT, P. F.; COLLINS, R. A. Observation of a rapidly pulsating radio source. **Nature**, v. 21, p. 709–713, feb 1968. Available at: <https://www.nature.com/articles/217709a0>.
- JIN, R.; DU, X.; CHEN, W. The use of metamodeling techniques for optimization under uncertainty. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 25, n. 2, p. 99–116, jun 2003. ISSN 1615-1488. Available at: <https://doi.org/10.1007/s00158-002-0277-0>.
- LATTIMER, J. M.; PRAKASH, M. The equation of state of hot, dense matter and neutron stars. **Physics Reports**, v. 621, p. 1–86, dec 2016. Available at: <https://arxiv.org/abs/1512.07820>.
- MANCHESTER, R. N.; LYNE, A. G.; ROBINSON, C.; D'AMICO, N.; BAILES, M.; LIM, J. Discovery of ten millisecond pulsars in the globular cluster 47 tucanae. **Nature**, v. 352, p. 219–221, jul 1991. Available at: <https://www.nature.com/articles/352219a0>.
- MARGUERON, J.; CASALI, R. H.; GULMINELLI, F. Equation of state for dense nucleonic matter from metamodeling. i. foundational aspects. **Phys. Rev. C**, American Physical Society, v. 97, p. 025805, feb 2018. Available at: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.97.025805>.
- MARGUERON, J.; CASALIAN, R. H.; GULMINELLI, F. Equation of state for dense nucleonic matter from metamodeling. ii. predictions for neutron star properties. **Physical Review C**, v. 97, p. 025806, feb 2018. Available at: <https://journals.aps.org/prc/abstract/10.1103/PhysRevC.97.025806>.
- OPPENHEIMER, J. R.; VOLKOFF, G. M. On massive neutron cores. **Physical Review Journals Archive**, v. 55, p. 374, feb 1939. Available at: <https://journals.aps.org/pr/abstract/10.1103/PhysRev.55.374>.
- PACINI, F. Energy emission from a neutron star. **Nature**, p. 567–568, nov 1967. Available at: <https://www.nature.com/articles/216567a0citeas>.
- PAULI, W. Über den zusammenhang des abschlusses der elektronengruppen im atom mit der komplexstruktur der spektren. **Springer Nature Link**, feb, v. 31, p. 765–783, feb 1925. Available at: <https://link.springer.com/article/10.1007/BF02980631citeas>.
- PIEKAREWICZ, J.; CENTELLES, M. Incompressibility of neutron-rich matter. **Phys. Rev. C**, American Physical Society, v. 79, p. 054311, may 2009. Available at: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.79.054311>.
- SALMI, T.; CHOUDHURY, D.; KINI, Y.; RILEY, T. E.; VINCIGUERRA, S.; WATTS, A. L.; WOLFF, M. T.; ARZOUMANIAN, Z.; BOGDANOV, S.; CHAKRABARTY, D.; GENDREAU, K.; GUILLOT, S.; HO, W. C. G.; HUPPENKOTHEN, D.; LUDLAM, R. M.; MORSINK, S. M.; RAY, P. S. The radius of the high-mass pulsar psr j0740+6620 with 3.6 yr of nicer data. **The Astrophysical Journal**, The American Astronomical Society, v. 974, n. 2, p. 294, oct 2024. Available at: <https://doi.org/10.3847/1538-4357/ad5f1f>.

- SCHAFFNER-BIELICH, J. **Compact Stars Physics**. New York: Cambridge: University Press, 2020.
- SCHUCK, P.; RING, P. **The Nuclear Many-Body problem**. New York: Springer-Verlag, 1980.
- SHAPIRO, S.; TEUKOLSKY, A. S. **Black Holes, White Dwarfs, and Neutron Stars: The Physics of Compact Objects**. New York: A Wiley-Interscience, 1983.
- SKYRME, T. H. R. Cvii. the nuclear surface. **The Philosophical Magazine: A Journal of Theoretical Experimental and Applied Physics**, Taylor & Francis, v. 1, n. 11, p. 1043–1054, sep 1956. Available at: <https://doi.org/10.1080/14786435608238186>.
- SOMÀ, V. Self-consistent green's function theory for atomic nuclei. **arXiv**, v. 8, p. 1–30, mar 2020. Available at: <https://arxiv.org/abs/2003.11321>.
- SOMMERFELD, A. Zur elektronentheorie der metalle auf grund der fermischen statistik. **Zeitschrift für Physik**, v. 47, p. 1–32, jan 1928. Available at: <https://link.springer.com/article/10.1007/BF01391052>.
- T., G. Rotating neutron stars as the origin of the pulsating radio sources. **Nature**, v. 218, p. 731–732, dec 1968. Available at: <https://www.nature.com/articles/218731a0>.
- TIMOTHY, W. S.; JENNIFER, D. P.; KOCH, P. N.; ALLEN, J. K. Metamodels for computer-based engineering design: Survey and recommendations. **Engineering with Computers**, v. 17, n. 2, p. 129–150, feb 2001. ISSN 1435-5663. Available at: <https://doi.org/10.1007/PL00007198>.
- VINCIGUERRA, S.; SALMI, T.; WATTS, A. L.; CHOUDHURY, D.; RILEY, T. E.; RAY, P. S.; BOGDANOV, S.; KINI, Y.; GUILLOT, S.; CHAKRABARTY, D.; HO, W. C. G.; HUPPENKOTHEN, D.; MORSINK, S. M.; WADIASINGH, Z.; WOLFF, M. T. An updated mass–radius analysis of the 2017–2018 nicer data set of psr j0030+0451. **The Astrophysical Journal**, The American Astronomical Society, v. 961, n. 1, p. 62, jan 2024. Available at: <https://doi.org/10.3847/1538-4357/acfb83>.
- WALECKA, J. D. **Theoretical Nuclear and Subnuclear Physics**. 2nd. ed. London: Imperial College Press, 2004.
- WOLSZCZAN, A. A nearby 37.9-ms radio pulsar in a relativistic binary system. **Nature**, p. 688–690, apr 1991. Available at: <https://www.nature.com/articles/350688a0>.
- WOLSZCZAN, A.; FRAIL, D. A. A planetary system around the millisecond pulsar psr1257 + 12. **Nature**, v. 355, p. 145–147, jan 1992. Available at: <https://www.nature.com/articles/355145a0>.
- WOLTJER, L. X-rays and type: Supernova remnants. **Astrophysical Journal**, p. 1309–1313, oct 1964. Available at: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1964ApJ...140.1309W/abstract>.
- YAKOVLEV; HAENSEL, D. G.; BAYM, P.; G.; PETHICK, C. J. Lev landau and the conception of neutron stars. **arXiv:1210.0682 [physics.hist-ph]**, p. 1–11, oct 2012. Available at: <https://arxiv.org/abs/1210.0682>.

Apêndice A - Relações úteis

A.1 Derivadas em relação a ρ_p e ρ_n

Como densidade total e fração de prótons são dados, respectivamente, por $\rho = \rho_p + \rho_n$ e $y = \rho_p/(\rho_p + \rho_n)$, as seguintes relações são observadas:

$$\frac{\partial \rho}{\partial \rho_p} = 1, \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{\partial y}{\partial \rho_p} = \frac{1}{\rho} - \frac{\rho_p}{\rho^2}, \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \rho_n} = 1, \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{\partial y}{\partial \rho_n} = -\frac{\rho_p}{\rho^2}. \quad (\text{A.4})$$

Tais relações permitem convertermos derivadas em relação a $\rho_{p,n}$ em derivadas em relação a ρ e y .

A.2 Cálculo da parte potencial do metamodelo

Apresentamos explicitamente algumas derivações utilizadas para o cálculo da parte potencial do metamodelo. São elas:

$$\frac{d}{dx} \left(\sum_{j=0}^N A_j \frac{1}{j!} x^j \right) = \sum_{j=0}^N A_j \frac{1}{j(j-1)!} j x^{j-1} = \sum_{j=0}^N A_j \frac{1}{(j-1)!}. \quad (\text{A.5})$$

Podemos reescrever os índices como

$$j - 1 = i \rightarrow j = i + 1, \quad (\text{A.6})$$

o que leva a

$$j_{max} = N = i_{max} + 1 \rightarrow i_{max} = N - 1. \quad (\text{A.7})$$

Logo,

$$\frac{d}{dx} \left(\sum_{j=0}^N A_j \frac{1}{j!} x^j \right) = \sum_{i=0}^{N-1} A_{i+1} \frac{1}{i!} x^i. \quad (\text{A.8})$$

A derivada da função u_j em relação a x é dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_j}{\partial x} &= -[N + 1 - j] - 3(-3x)^{N+1-j-1} e^{-\xi(\delta)(3x+1)} + (-3x)^{N+1-j} \xi(\delta) 3e^{\xi(\delta)(3x+1)} \\ &= e^{-\xi(\delta)(3x+1)} \{ [N + 1 - j] 3(-3x)^{N-j} + (-3x)^{N+1-j} (3\xi(\delta)) \} \\ &= e^{-\xi(\delta)(3x+1)} \{ [N + 1 - j] 3(-3x)^{N-j} - 3x(-3x)^{N+1-j-1} (\xi(\delta) 3) \} \\ &= (-3x)^{N-j} e^{-\xi(\delta)(3x+1)} \{ [N + 1 - j] 3 - 3x(\xi(\delta) 3) \} \\ &= 3(-3x)^{N-j} e^{-\xi(\delta)(3x+1)} [N + 1 - j - 3x\xi(\delta)]. \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Apêndice B - As equações de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV)

As equações de campo da Relatividade Geral, propostas por Einstein, possuem forma compacta e aparente simplicidade, porém constituem um sistema não linear em que espaço-tempo e matéria estão acoplados. Em geral, não existe uma geometria pré-definida do espaço-tempo, e soluções analíticas em forma fechada só são conhecidas para casos altamente simétricos, como a métrica de Schwarzschild (exterior de uma estrela esférica estática) e a métrica de Kerr (buraco negro em rotação) (GLENDENNING, 1996).

Para descrever a estrutura de uma estrela estática e esfericamente simétrica, consideramos as equações de Tolman–Oppenheimer–Volkoff (TOV). No exterior da estrela, o tensor energia-momento é nulo, e as equações de Einstein se reduzem às de vácuo, $G_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow R_{\mu\nu} = 0$. No interior, porém, o campo gravitacional é gerado pela própria densidade de energia e pressão do fluido estelar (GLENDENNING, 1996).

Adotamos uma métrica estática e esfericamente simétrica na forma

$$ds^2 = e^{2\nu(r)} dt^2 - e^{2\lambda(r)} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (\text{B.1})$$

onde $\nu(r)$ e $\lambda(r)$ são funções a serem determinadas a partir das equações de Einstein.

O tensor energia-momento de um fluido perfeito é

$$T^\mu{}_\nu = (\varepsilon + p) u^\mu u_\nu - p \delta^\mu_\nu, \quad (\text{B.2})$$

sendo ε a densidade de energia, p a pressão e u^μ o quadrivetor velocidade do fluido. No caso estático, $u^\mu = (e^{-\nu}, 0, 0, 0)$.

As equações de Einstein,

$$G^\mu{}_\nu = 8\pi G T^\mu{}_\nu, \quad (\text{B.3})$$

aplicadas à métrica acima fornecem as componentes independentes:

$$e^{-2\lambda} \left(\frac{2\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} = 8\pi G \varepsilon(r), \quad (\text{B.4})$$

$$e^{-2\lambda} \left(\frac{2\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} = -8\pi G p(r), \quad (\text{B.5})$$

$$e^{-2\lambda} \left(\nu'' + \nu'^2 - \lambda'\nu' + \frac{\nu' - \lambda'}{r} \right) = -8\pi G p(r). \quad (\text{B.6})$$

Definindo a função massa $m(r)$ como

$$m(r) \equiv 4\pi \int_0^r \varepsilon(r') r'^2 dr', \quad (\text{B.7})$$

a componente g_{rr} da métrica pode ser reescrita como

$$e^{-2\lambda(r)} = 1 - \frac{2Gm(r)}{r}. \quad (\text{B.8})$$

Com essas definições e adotando unidades naturais ($G = c = 1$), obtemos as equações diferenciais que descrevem o equilíbrio hidrostático relativístico:

$$\frac{dp}{dr} = - \frac{[\varepsilon(r) + p(r)] [m(r) + 4\pi r^3 p(r)]}{r [r - 2m(r)]}, \quad (\text{B.9})$$

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \varepsilon(r). \quad (\text{B.10})$$

Essas são as equações de Tolman–Oppenheimer–Volkoff (TOV). Elas determinam, para uma dada equação de estado $p(\varepsilon)$, a estrutura radial de uma estrela de nêutrons estática e esfericamente simétrica. O raio R é definido pela condição de fronteira $p(R) = 0$, e a massa gravitacional total é $M = m(R)$ (GLENDEENING, 1996).

FOLHA DE REGISTRO DO DOCUMENTO

¹ CLASSIFICAÇÃO/TIPO <p style="text-align: center;">DM</p>	² DATA <p style="text-align: center;">11 de fevereiro de 2026</p>	³ REGISTRO N° <p style="text-align: center;">DCTA/ITA/DM-003/2026</p>	⁴ N° DE PÁGINAS <p style="text-align: center;">66</p>
⁵ TÍTULO E SUBTÍTULO: Descrição de Estrelas de Nêutrons a partir do Metamodelo			
⁶ AUTOR(ES): Adla Medeiros Rosa			
⁷ INSTITUIÇÃO(ÕES)/ÓRGÃO(S) INTERNO(S)/DIVISÃO(ÕES): Instituto Tecnológico de Aeronáutica – ITA			
⁸ PALAVRAS-CHAVE SUGERIDAS PELO AUTOR: Gás de Fermi; Metamodelo; Estrelas de nêutrons; Diagramas massa-raio.			
⁹ PALAVRAS-CHAVE RESULTANTES DE INDEXAÇÃO: Estrelas de nêutrons; Metamodelos; Equações de estado; Matéria nuclear; Diagramas; Física nuclear; Física.			
¹⁰ APRESENTAÇÃO: <input checked="" type="checkbox"/> Nacional <input type="checkbox"/> Internacional 			
ITA, São José dos Campos. Curso de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Física. Área de Física Nuclear. Orientador: Prof. Dr. Odilon Lourenço da Silva Filho. Defesa em 20/01/2026. Publicada em 2026.			
¹¹ RESUMO: Esta dissertação tem como conteúdo o estudo da equação de estado da matéria nuclear densa e suas implicações na estrutura de estrelas de nêutrons a partir do metamodelo, construído a partir da expansão da densidade de energia em torno da densidade de saturação da matéria nuclear simétrica, permitindo associar de forma direta cada termo da expansão aos parâmetros empíricos nucleares, como a incompressibilidade, a energia de simetria e suas derivadas. Essa formulação possibilita analisar de forma independente como as variações de tais parâmetros afetam algumas propriedades macroscópicas das estrelas de nêutrons. A partir da equação de estado construída pelo metamodelo, incluindo as contribuições cinética e potencial, as equações de Tolman-Oppenheimer-Volkoff foram resolvidas numericamente, resultando em diagramas massa-raio para diferentes combinações dos parâmetros empíricos. Observou-se que os parâmetros isoescalares, como a incompressibilidade K_{sat} e o skewness Q_{sat} , influenciam principalmente a massa máxima das estrelas, enquanto os parâmetros isovetoriais, em especial a inclinação da energia de simetria L_{sym} e a curvatura K_{sym} , influenciam de forma mais sensível os seus raios. As soluções obtidas mostraram boa concordância com os vínculos observacionais astrofísicos atuais, incluindo os advindos da missão NICER e do evento GW170817 relacionado à emissão de ondas gravitacionais oriundas da coalescência de estrelas de nêutrons.			
¹² GRAU DE SIGILO: <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <input checked="" type="checkbox"/> OSTENSIVO <input type="checkbox"/> RESERVADO <input type="checkbox"/> SECRETO </div>			